NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ

NỘI DUNG CÂU HỎI

Câu 1. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \sin x)\,\mathrm{d}x$

A. $I = 5$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 2$.

Lời giải.

Ta có: $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \sin x)\,\mathrm{d}x = \left(-\dfrac{1}{2} \cdot \cos 2x - \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$

Chọn đáp án D □

Câu 2. Tính nguyên hàm $I = \int \left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right) \mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{2}{3}x^3 - 3\ln x + C$. **B.** $I = \dfrac{2}{3}x^3 - 3\ln|x| + C$.

C. $I = \dfrac{2}{3}x^3 + 3\ln x + C$. **D.** $I = \dfrac{2}{3}x^3 + 3\ln|x| + C$.

Lời giải.

$I = \int \left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right) \mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}x^3 - 3\ln|x| + C.$

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho hai quả bóng A, B di chuyển ngược chiều nhau va chạm với nhau. Sau va chạm mỗi quả bóng nảy ngược lại một đoạn thì dừng hẳn. Biết sau khi va chạm, quả bóng A nảy ngược lại với vận tốc $v_A(t) = 8 - 2t\,(m/s)$ và quả bóng B nảy ngược lại với vận tốc $v_B(t) = 12 - 4t\,(m/s)$. Tính khoảng cách giữa hai quả bóng sau khi đã dừng hẳn (Giả sử hai quả bóng đều chuyển động thẳng).

A. 36 mét. **B.** 32 mét. **C.** 34 mét. **D.** 30 mét.

Lời giải.

Thời gian quả bóng A chuyển động từ lúc va chạm đến khi dừng hẳn $v_A(t) = 0 \Leftrightarrow 8 - 2t = 0 \Rightarrow t = 4s$.

Quãng đường quả bóng A di chuyển $S_A = \int_0^4 (8 - 2t)\,\mathrm{d}x = 16m$

Thời gian quả bóng B chuyển động từ lúc va chạm đến khi dừng hẳn $v_B(t) = 0 \Leftrightarrow 12 - 4t = 0 \Rightarrow t = 3s$.

Quãng đường quả bóng B duy chuyển $S_B = \int_0^3 (12 - 4t)\,\mathrm{d}x = 18m$

Vậy: Khoảng cách hai quả bóng sau khi dừng hẳn là $S = S_A + S_B = 34m$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ và với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $f'(x) \cdot f(x) - \sin 2x = f'(x) \cdot \cos x - f(x).\sin x$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 1$. **B.** $I = \sqrt{2} - 1$. **C.** $I = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1$. **D.** $I = 2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) \cdot f(x) - \sin 2x = f'(x) \cdot \cos x - f(x) \cdot \sin x \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) - \sin 2x = [f(x) \cdot \cos x]'$.

Lấy nguyên hàm hai vế: $\int [f'(x) \cdot f(x) - \sin 2x]\,\mathrm{d}x = \int [f(x) \cdot \cos x]'\,\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \dfrac{f^2(x)}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x = \cos x \cdot f(x) + C.$

Vì $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f^2(x) + \cos 2x = 2\cos x \cdot f(x) \Leftrightarrow f^2(x) - 2\cos x \cdot f(x) + \cos^2 x = \sin^2 x.$

$\Leftrightarrow (f(x) - \cos x)^2 = \sin^2 x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) - \cos x = \sin x \\ f(x) - \cos x = -\sin x \end{array}\right.$.

Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ nên nhận $f(x) = \cos x - \sin x$.

Vậy $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x = (\cos x - \sin x)\left.\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x = 6$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^1 f(|3x-2|)\mathrm{d}x$

A. $I = 3$. **B.** $I = -2$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 9$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-1}^1 f(|3x-2|)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{\frac{2}{3}} f(-3x+2)\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{2}{3}}^1 f(3x-2)\mathrm{d}x = I_1 + I_2$.

$I_1 = \int\limits_{-1}^{\frac{2}{3}} f(-3x+2)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{\frac{2}{3}} f(-3x+2)\mathrm{d}(-3x+2)$.

Đặt $t = -3x + 2$ suy ra $x = -1 \Rightarrow t = 5$; $x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 0$. Do đó $I_1 = \frac{1}{3}\int\limits_0^5 f(t)\mathrm{d}t = 2$.

$I_2 = \int\limits_{\frac{2}{3}}^1 f(3x-2)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{2}{3}} 1 f(3x-2)\mathrm{d}(3x-2)$.

Đặt $t = 3x - 2$ suy ra $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 0$. Do đó $I_2 = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1$.

Vậy $I = I_1 + I_2 = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2\mathrm{e}^{x^3+1}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^3+1} + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^{x^3+1} + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3+1} + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\mathrm{e}^{x^3+1} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int x^2\mathrm{e}^{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{x^3+1}\,\mathrm{d}(x^3+1) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3+1} + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + C$. **B.** $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + C$.

C. $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x + C$. **D.** $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{5x+4}$.

A. $F(x) = \dfrac{1}{\ln 5}\ln|5x+4| + C$.
B. $F(x) = \ln|5x+4| + C$.
C. $F(x) = \dfrac{1}{5}\ln|5x+4| + C$.
D. $F(x) = \dfrac{1}{5}\ln(5x+4) + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \dfrac{1}{5x+4}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}\ln|5x+4| + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = 2x + \mathrm{e}^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2019$.

A. $F(x) = \mathrm{e}^x - 2019$.
B. $F(x) = x^2 + \mathrm{e}^x - 2018$.
C. $F(x) = x^2 + \mathrm{e}^x + 2017$.
D. $F(x) = x^2 + \mathrm{e}^x + 2018$.

Lời giải.

$F(x) = \int (2x + \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = x^2 + \mathrm{e}^x + C$.

Do $F(0) = 2019$ nên $0^2 + \mathrm{e}^0 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2018$.

Vậy $F(x) = x^2 + \mathrm{e}^x + 2018$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f(0) = 2\sqrt{2}$, $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(x).f'(x) = (2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó giá trị $f(1)$ bằng

A. $\sqrt{15}$. **B.** $\sqrt{23}$. **C.** $\sqrt{24}$. **D.** $\sqrt{26}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $2x + 1 = \dfrac{f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} \Rightarrow \int \dfrac{f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\,\mathrm{d}x = \int (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Bây giờ ta tính $I = \int \dfrac{f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\sqrt{1+f^2(x)} = t \Rightarrow 1 + f^2(x) = t^2 \Rightarrow 2f(x)f'(x)\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \Rightarrow f(x)f'(x)\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t$.

Do đó $I = \int \dfrac{t}{t}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}t = t + C = \sqrt{1+f^2(x)} + C$.

Ta nhận được $\sqrt{1+f^2(x)} + C = x^2 + x$. $f(0) = 2\sqrt{2} \Rightarrow C = -3$.

Từ đó $\sqrt{1+f^2(x)} - 3 = x^2 + x$. Khi $x = 1$ ta có

$\sqrt{1+f^2(1)} - 3 = 1 + 1 \Rightarrow 1 + f^2(1) = 25 \Rightarrow f(1) = \sqrt{24}$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 5$, khi đó $\int\limits_0^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** 12. **C.** -8. **D.** 1.

Lời giải.

$\int\limits_0^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 - 2\cdot 5 = -8$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ là

A. $\mathrm{e}^x + x^2 + C$.
B. $\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.
C. $\dfrac{1}{x+1}\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.
D. $\mathrm{e}^x + 1 + C$.

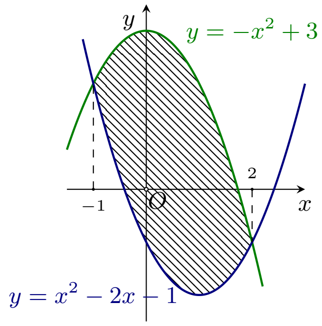
Lời giải.

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^x + x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 + C$

Chọn đáp án B □

Câu 13.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x^2 - 2x - 4)\,\mathrm{d}x$.
B. $\displaystyle\int_{-1}^{2} (-2x + 2)\,\mathrm{d}x$.
C. $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x - 2)\,\mathrm{d}x$.
D. $\displaystyle\int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$$S = \int_{-1}^{2} \left[(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)\right]\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án D □

Câu 14. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là

A. $2x^2 \ln x + 3x^2$.
B. $2x^2 \ln x + x^2$.
C. $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$.
D. $2x^2 \ln x + x^2 + C$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int 4x(1 + \ln x)\,\mathrm{d}x &= \int (1 + \ln x)\,\mathrm{d}(2x^2)\\ &= 2x^2(1 + \ln x) - \int 2x^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= 2x^2(1 + \ln x) - x^2 + C\\ &= 2x^2 \ln x + x^2 + C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a + b + c$ bằng

A. -2.
B. -1.
C. 2.
D. 1.

Lời giải.

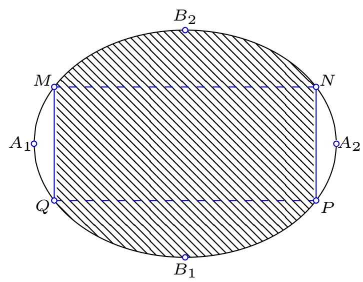
$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2} &= \int\limits_0^1 \frac{x+2-2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_0^1 \frac{x+2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \frac{2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \frac{2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln|x+2|\Big|_0^1 + \frac{2}{x+2}\Big|_0^1\\ &= \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Nên $a = -\dfrac{1}{3}$, $b = -1$, $c = 1$, suy ra $3a + b + c = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 16.

Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8$m, $B_1B_2 = 6$m và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3$m ?



A. 7.322.000 đồng. **B.** 7.213.000 đồng.

C. 5.526.000 đồng. **D.** 5.782.000 đồng.

Lời giải.

Giả sử phương trình elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} A_1A_2 = 8 \\ B_1B_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 3 \end{cases}$

Suy ra $(E)\colon \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm\dfrac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

Diện tích của elip (E) là $S_{(E)} = \pi ab = 12\pi\ (m^2)$.

Ta có: $MQ = 3 \Rightarrow \begin{cases} M = d \cap (E) \\ N = d \cap (E) \end{cases}$ với $d\colon y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow M(-2\sqrt{3}; \dfrac{3}{2})$ và $N(2\sqrt{3}; \dfrac{3}{2})$.

Khi đó, diện tích phần không tô màu là $S = 4\displaystyle\int\limits_{2\sqrt{3}}^{4} (\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2})\mathrm{d}x = 4\pi - 6\sqrt{3}(m^2)$.

Diện tích phần tô màu là $S' = S_{(E)} - S = 8\pi + 6\sqrt{3}$.

Số tiền để sơn theo yêu cầu bài toán là

$$T = 100.000 \times (4\pi - 6\sqrt{3}) + 200.000 \times (8\pi + 6\sqrt{3}) \approx 7.322.000 \text{ đồng}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 17. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin x$ là

A. $x^2 + \cos x + C$. **B.** $x^2 - \cos x + C$. **C.** $\dfrac{x^2}{2} - \cos x + C$. **D.** $\dfrac{x^2}{2} + \cos x + C$.

Lời giải.

Cách 1: Dựa vào bảng nguyên hàm các hàm số cơ bản ta có $\int (x+\sin x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2} - \cos x + C$.

Cách 2: Lấy đạo hàm các hàm số trên ta được kết quả.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = -1$, khi đó $\int\limits_{-1}^{2} [x + 2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{17}{2}$. **D.** $\dfrac{11}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\int\limits_{-1}^{2} [x+2f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} x\mathrm{d}x + 2\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + 3\int\limits_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2} + 4 - 3 = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ và $F(0) = \dfrac{201}{2}$. Giá trị $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$ là

A. $\dfrac{1}{2}\mathrm{e} + 200$. **B.** $2\mathrm{e} + 200$. **C.** $\dfrac{1}{2}\mathrm{e} + 50$. **D.** $\dfrac{1}{2}\mathrm{e} + 100$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$.

Theo đề bài ta có $F(0) = \dfrac{201}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^0 + C = \dfrac{201}{2} \Leftrightarrow C = 100$.

Vậy $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 100 \Rightarrow F(2) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e} + 100$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)\cdot g(x)$ biết $F(1) = 3$, biết $\int f(x)\mathrm{d}x = x + 2018$ và $\int g(x)\mathrm{d}x = x^2 + 2019$.

A. $F(x) = x^3 + 1$. **B.** $F(x) = x^3 + 3$. **C.** $F(x) = x^2 + 2$. **D.** $F(x) = x^2 + 3$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = x + 2018 \Rightarrow f(x) = (x+2018)' = 1$

và $\int g(x)\mathrm{d}x = x^2 + 2019 \Rightarrow g(x) = (x^2+2019)' = 2x$.

$\Rightarrow f(x)\cdot g(x) = 2x \Rightarrow F(x) = \int f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x = x^2 + C$.

Mặt khác $F(1) = 3 \Rightarrow 1^2 + C = 3 \Rightarrow C = 2$.

Vậy $F(x) = x^2 + 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho $\int_0^2 \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$ với a, b, c là các số thực. Giá trị của $a + b^2 - c^3$ bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{2}^{3} \dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)} = \int\limits_{2}^{3} \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \ln\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|\Bigg|_2^3 = \ln\dfrac{4}{5} - \ln\dfrac{3}{4} = 4\ln 2 - \ln 3 - \ln 5$.

Suy ra $a = 4, b = -1, c = -1$. Vậy $a + b^2 - c^3 = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x)+\tan x f'(x)=\dfrac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,b\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $P=a+b$ bằng

A. $\dfrac{14}{9}$. **B.** $-\dfrac{2}{9}$. **C.** $\dfrac{7}{9}$. **D.** $-\dfrac{4}{9}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)+\tan x f'(x)=\dfrac{x}{\cos^3 x}\Leftrightarrow \cos x\cdot f(x)+\sin x f'(x)=\dfrac{x}{\cos^2 x}\Leftrightarrow[\sin x\cdot f(x)]'=\dfrac{x}{\cos^2 x}$.

Do đó $\displaystyle\int[\sin x\cdot f(x)]'\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\Rightarrow \sin x\cdot f(x)=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Tính $I=\displaystyle\int\dfrac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\tan x.\end{cases}$

Khi đó $I=x\cdot\tan x-\displaystyle\int\tan x\,\mathrm{d}x=x\cdot\tan x-\int\dfrac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x}=x\cdot\tan x+\ln|\cos x|$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{x\cdot\tan x+\ln|\cos x|}{\sin x}=\dfrac{x}{\cos x}+\dfrac{\ln|\cos x|}{\sin x}$.

Do $\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3=\sqrt{3}\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{2\ln 2}{\sqrt{3}}\right)-\left(\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}+2\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{9}\ln 3$.

Khi đó $\begin{cases}a=\dfrac{5}{9}\\ b=-1\end{cases}$.

Vậy $P=a+b=-\dfrac{4}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2-1$ là

A. x^3+C. **B.** $\dfrac{x^3}{3}+x+C$. **C.** $6x+C$. **D.** x^3-x+C.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int(3x^2-1)\,\mathrm{d}x=x^3-x+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Giá trị của $\displaystyle\int\limits_0^1(2019x^{2018}-1)\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** $2^{2017}+1$. **C.** $2^{2017}-1$. **D.** 1.

Lời giải.

$$\int\limits_0^1(2019x^{2018}-1)\mathrm{d}x=2019\int\limits_0^1 x^{2018}\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\mathrm{d}x=\left.(x^{2019}-x+C)\right|_0^1=0$$

Chọn đáp án A □

Câu 25. Hàm số $f(x)=\cos(4x+7)$ có một nguyên hàm là

A. $-\sin(4x+7)+x$. **B.** $\dfrac{1}{4}\sin(4x+7)-3$. **C.** $\sin(4x+7)-1$. **D.** $-\dfrac{1}{4}\sin(4x+7)+3$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)=\cos(4x+7)$ có một nguyên hàm là $\dfrac{1}{4}\sin(4x+7)-3$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Biết $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2+2x}{(x+3)^2}\mathrm{d}x = \dfrac{a}{4} - 4\ln\dfrac{4}{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 bằng

A. 25. **B**. 41. **C**. 20. **D**. 34.

Lời giải.

$I = \int\limits_0^1 \dfrac{x^2+2x}{(x+3)^2}\mathrm{d}x$. Đặt $t = x+3 \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=3 \\ x=1 \Rightarrow t=4. \end{cases}$

$I = \int\limits_3^4 \dfrac{t^2-4t+3}{t^2}\mathrm{d}t = \int\limits_3^4 \left(1 - \dfrac{4}{t} + \dfrac{3}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \left(t - 4\ln|t| - \dfrac{3}{t}\right)\Big|_3^4 = \dfrac{5}{4} - 4\ln\dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2 = 34.$

Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 2$ và $F(\mathrm{e}) = \ln 2$. Giá trị của biểu thức $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + F(\mathrm{e}^2)$ bằng

A. $3\ln 2+2$. **B**. $\ln 2+2$. **C**. $\ln 2+1$. **D**. $2\ln 2+1$.

Lời giải.

Ta có $\int \dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \int \dfrac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$, $x>0$, $x \neq 1$.

Nên $F(x) = \begin{cases} \ln(\ln x) + C_1 \text{ khi } x>1 \\ \ln(-\ln x) + C_2 \text{ khi } 0<x<1. \end{cases}$

Mà $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 2$ nên $\ln\left(-\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2$; $F(\mathrm{e}) = \ln 2$ nên $\ln(\ln \mathrm{e}) + C_1 = \ln 2 \Leftrightarrow C_1 = \ln 2$.

Suy ra $F(x) = \begin{cases} \ln(\ln x) + \ln 2 \text{ khi } x>1 \\ \ln(-\ln x) + 2 \text{ khi } 0<x<1. \end{cases}$

Vậy $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + F\left(\mathrm{e}^2\right) = \ln\left(-\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + 2 + \ln(\ln \mathrm{e}^2) + \ln 2 = 3\ln 2 + 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\cos x$; $y=0$; $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$. Thể tích vật thể tròn xoay có được khi (H) quay quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$. **B**. 2π. **C**. $\dfrac{\pi}{4}$. **D**. $\dfrac{\pi^2}{2}$.

Lời giải.

Gọi V là thể tích khối tròn xoay cần tính. Ta có

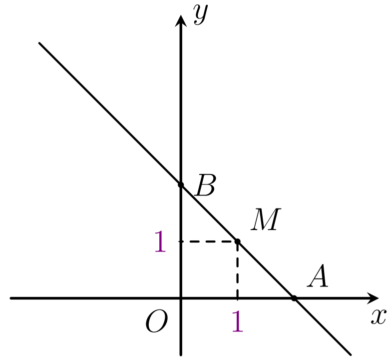
$$V = \pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \pi\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi^2}{4}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 29. Gọi d là đường thẳng tùy ý đi qua điểm $M(1;1)$ và có hệ số góc âm. Giả sử d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B. Quay tam giác OAB quanh trục Oy thu được một khối tròn xoay có thể tích là V. Giá trị nhỏ nhất của V bằng

A. 3π. **B.** $\frac{9\pi}{4}$. **C.** 2π. **D.** $\frac{5\pi}{2}$.

Lời giải.



Giả sử $A(a;0), B(0;b)$. Phương trình đường thẳng $d: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow d: y = -\frac{b}{a}x + b(1)$.

Mà $M(1;1) \in d$ nên $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow a + b = ab(2)$.

Từ (1) suy ra d có hệ số góc là $k = -\frac{b}{a}$, theo giả thiết ta có $-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow ab > 0$.

Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$ thì $a + b < 0$ mâu thuẫn với (2). Suy ra $a > 0, b > 0$. Mặt khác từ (2) suy ra $b = \frac{a}{a-1}$ kết hợp với $a > 0, b > 0$ suy ra $a > 1$.

Khi quay ΔOAB quanh trục Oy, ta được hình nón có chiều cao $h = b$ và bán kính đường tròn đáy $r = a$.

Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi a^2.b = \frac{1}{3}\pi.\frac{a^3}{a-1}$.

Suy ra V đạt giá trị nhỏ nhất khi $\frac{a^3}{a-1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x-1} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$.

$f'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{27}{4}$	↗	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của V bằng $\frac{1}{3}\pi.f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9\pi}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $\int\limits_0^3 [2x\ln(x+1) + xf'(x)]\,\mathrm{d}x = 0$ và $f(3) = 1$.

Biết $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a + b\ln 2}{2}$ với a, b là các số thực dương. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 35. **B.** 29. **C.** 11. **D.** 7.

Lời giải.

Tính $I = \int\limits_0^3 2x \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ v = x^2 \end{cases}$. Khi đó

$I = x^2 \ln(x+1)\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 \dfrac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = 9\ln 4 - \left(\dfrac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right)\Big|_0^3 = 16\ln 2 - \dfrac{3}{2}$.

Tính $J = \int\limits_0^3 x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u_J = x \\ dv_J = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u_J = \mathrm{d}x \\ v_J = f(x) \end{cases}$.

$J = \int\limits_0^3 x f'(x)\,\mathrm{d}x = xf\,(x)|_0^3 - \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3 - \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Mà $\int\limits_0^3 \left[2x\ln(x+1) + xf'(x)\right]\,\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow I + J = 0 \Rightarrow 16\ln 2 - \dfrac{3}{2} + 3 - \int\limits_0^3 f(x)dx = 0 \Rightarrow \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 16\ln 2 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3 + 32\ln 2}{2}$.

Suy ra $\begin{cases} a = 3 \\ b = 32 \end{cases}$. Vậy $a + b = 35$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

A. $\int [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)dx - \int g(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$.

C. $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Khẳng định A, B, D đúng theo tính chất của nguyên hàm.

Khẳng định C chỉ đúng khi $k \neq 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x\left(1 + 3x^3\right)$ là

A. $x^2\left(1 + \dfrac{3}{2}x^2\right) + C$. **B.** $x^2\left(1 + \dfrac{6x^3}{5}\right) + C$. **C.** $2x\left(x + \dfrac{3}{4}x^4\right) + C$. **D.** $x^2\left(x + \dfrac{3}{4}x^3\right) + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 2x\left(1 + 3x^3\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(2x + 6x^4\right)\,\mathrm{d}x = x^2 + \dfrac{6x^5}{5} + C = x^2\left(1 + \dfrac{6x^3}{5}\right) + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$, $\int\limits_0^2 [f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 4$

và $\int\limits_0^2 [2f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = 8$. Tính $I = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 1$. **B**. $I = 2$. **C**. $I = 3$. **D**. $I = 0$.

Lời giải.

Đặt $a = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, $b = \int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} a - 3b = 4 \\ 2a + b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 0. \end{cases}$

$$\text{Ta có } \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 - 3 = 1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 34. Hai người A và B ở cách nhau 180(m) trên đoạn đường thẳng và cùng chuyển động theo một hướng với vận tốc biến thiên theo thời gian , A chuyển động với vận tốc $v_1(t) = 6t + 5(\mathrm{m/s})$, B chuyển động với vận tốc $v_2(t) = 2at - 3(\mathrm{m/s})$ (a là hằng số), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A và B bắt đầu chuyển động . Biết rằng lúc A đuổi theo B và sao 10(giây) thì đuổi kịp. Hỏi sau 20(giây), A cách B bao nhiêu mét?

A. 320(m). **B**. 720(m). **C**. 360(m). **D**. 380(m).

Lời giải.

Quảng đường A đi được trong 10 (giây): $\int\limits_0^{10} (6t+5)\,\mathrm{d}t = \left(3t^2 + 5t\right)\Big|_0^{10} = 350(\mathrm{m})$.

Quảng đường B đi được trong 10 (giây): $\int\limits_0^{10} (2at-3)\,\mathrm{d}t = \left(at^2 - 3t\right)\Big|_0^{10} = 100a - 30(\mathrm{m})$.

Vì lúc đầu A đuổi theo B và sau 10 (giây) thì đuổi kịp nên ta có:

$$(100a - 30) + 180 = 350 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow v_2(t) = 4t - 3(\mathrm{m/s})$$

Sau 20(giây) quãng đường A đi được : $\int\limits_0^{20} (6t+5)\,\mathrm{d}t = \left(3t^2 + 5t\right)\Big|_0^{20} = 1300(\mathrm{m})$.

Sau 20(giây) quãng đường B đi được : $\int\limits_0^{20} (4t-3)\,\mathrm{d}t = \left(2t^2 - 3t\right)\Big|_0^{20} = 740(\mathrm{m})$.

Khoảng cách giữa A và B sau 20 (giây) $1300 - 740 - 180 = 380(\mathrm{m})$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho $\int\limits_0^1 \dfrac{9^x + 3m}{9^x + 3} dx = m^2 - 1$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m

A. $P = 12$. **B**. $P = \dfrac{1}{2}$. **C**. $P = 16$. **D**. $P = 24$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^1 \frac{9^x+3m}{9^x+3}dx = m^2-1\\ \Leftrightarrow\ &\int\limits_0^1 \frac{9^x}{9^x+3}dx + m\int\limits_0^1 \frac{3}{9^x+3}dx = m^2-1\\ \Leftrightarrow\ & m^2 - m\int\limits_0^1 \frac{3}{9^x+3}dx - \int\limits_0^1 \frac{9^x}{9^x+3}dx - 1 = 0\end{aligned}$$

Phương trình trên là phương trình bậc hai đối với biến m, với các hệ số

$$\begin{aligned} a &= 1\\ b &= -\int\limits_0^1 \frac{3}{9^x+3}dx\\ c &= -\int\limits_0^1 \frac{9^x}{9^x+3}dx - 1\end{aligned}$$

Áp dụng hệ thức Viet, tổng các giá trị của m là:

$$m_1+m_2 = -\frac{b}{a} = \int\limits_0^1 \frac{3}{9^x+3}dx = \frac{1}{2}$$

(dùng máy tính bỏ túi tính tích phân xác định)

Chọn đáp án B □

Câu 36. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\cos x$ là

A. $2x-\sin x+C$. **B.** $\frac{1}{3}x^3+\sin x+C$. **C.** $\frac{1}{3}x^3-\sin x+C$. **D.** $x^3+\sin x+C$.

Lời giải.

Ta có: $\int (x^2+\cos x)dx = \frac{1}{3}x^3+\sin x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Nếu $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$, $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$ thì $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5+(-1)=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Diện tích hình phẳng H được giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^3-2x-1$ và $y=2x-1$ được tính theo công thức

A. $S=\int\limits_{-2}^0 \left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_0^2 \left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{-2}^{2}\left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_{-2}^{2}\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^3-2x-1$ và $y=2x-1$ là

$$x^3-2x-1=2x-1\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=0\\x=-2\end{array}\right..$$

Vậy diện tích hình phẳng H được giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^3-2x-1$ và $y=2x-1$ được tính theo công thức $S=\int\limits_{-2}^{2}\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 39 (2D3B1-3). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x+1)\mathrm{e}^x$ là

A. $(2x-1)\mathrm{e}^x+C$. **B.** $(2x+3)\mathrm{e}^x+C$. **C.** $2x\mathrm{e}^x+C$. **D.** $(2x-2)\mathrm{e}^x+C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=2x+1\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x\\ v=\mathrm{e}^x.\end{cases}$

$\Rightarrow\int(2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(2x+1)\mathrm{e}^x-\int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(2x+1)\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x+C=(2x-1)\mathrm{e}^x+C$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 40. Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ quay quanh trục Ox.

A. $\dfrac{64\pi}{9}$. **B.** $\dfrac{10\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{8\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{8\pi^2}{3}$.

Lời giải.

(E) có $a^2=4\Rightarrow a=2$. Do đó hai đỉnh thuộc trục lớn có tọa độ $A'(-2;0)$ và $(2;0)$.

Vì $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1\Rightarrow y^2=1-\dfrac{x^2}{4}$.

Do đó thể tích khối tròn xoay là $V_{Ox}=\pi\int\limits_{-2}^{2}y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{-2}^{2}\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{8\pi}{3}$.

Vậy $V_{Ox}=\dfrac{8\pi}{3}$(đvtt).

Chọn đáp án C ☐

Câu 41. Cho $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$, với a,b là các số hữu tỷ. Khi đó $a+b$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

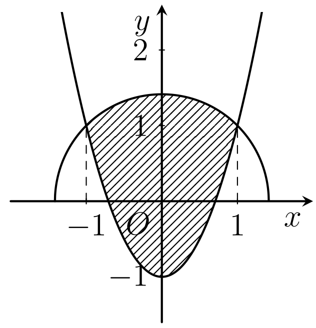
Lời giải.

Xét $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)\Bigg|_0^1=2\ln 2-\ln 3$.

Vậy $a=2,b=-1\Rightarrow a+b=1$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 42.



Người ta cần trồng một vườn hoa Cẩm Tú Cầu theo hình giới hạn bởi một đường Parabol và nửa đường tròn có bán kính $\sqrt{2}$ mét (phần tô trong hình vẽ). Biết rằng: để trồng mỗi m^2 hoa cần ít nhất là 250000 đồng, số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu gần bằng

A. 893000 đồng. **B**. 476000 đồng. **C**. 809000 đồng. **D**. 559000 đồng.

Lời giải.

Nửa đường tròn (T) có phương trình $y = \sqrt{2 - x^2}$.
Xét parabol (P) có trục đối xứng Oy nên có phương trình dạng: $y = ax^2 + c$.
(P) cắt Oy tại điểm $(0; -1)$ nên ta có: $c = -1$.
(P) cắt (T) tại điểm $(1; 1)$ thuộc (T) nên ta được: $a + c = 1 \Rightarrow a = 2$.
Phương trình của (P) là: $y = 2x^2 - 1$.
Diện tích miền phẳng D (tô màu trong hình) là:

$$S = \int\limits_{-1}^{1} \left(\sqrt{2 - x^2} - 2x^2 + 1 \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{2 - x^2}\, \mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{1} \left(-2x^2 + 1 \right) \mathrm{d}x.$$

$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} \left(-2x^2 + 1 \right) \mathrm{d}x = \left(-\dfrac{2}{3}x^3 + x \right)\Big|_{-1}^{1} = \dfrac{2}{3}$.

Xét $I_2 = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{2 - x^2}\, \mathrm{d}x$, đặt $x = \sqrt{2}\sin t, t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} \right]$ thì $\mathrm{d}x = \sqrt{2}\cos t\, dt$.

Đổi cận: $x = -1$ thì $t = -\dfrac{\pi}{4}$, với $x = 1$ thì $t = \dfrac{\pi}{4}$, ta được:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{2 - 2\sin^2 t}\sqrt{2}\cos t dt = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\cos^2 t dt \\ &= \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 2t)\, dt = \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $S = I_1 + I_2 = \dfrac{5}{3} + \dfrac{\pi}{2}$ m^2.

Số tiền trồng hoa tối thiểu là: $250000 \left(\dfrac{5}{3} + \dfrac{\pi}{2} \right) \approx 809365$ đồng. □

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(x) = x. \ln \left(\dfrac{x^3}{x.f'(x) - f(x)} \right)$ và $f(1) = 0$. Tính tích phân $I = \int\limits_{1}^{5} f(x)\, \mathrm{d}x$.

A. $12 \ln 13 - 13$. **B**. $13 \ln 13 - 12$. **C**. $12 \ln 13 + 13$. **D**. $13 \ln 13 + 12$.

Lời giải.

Từ giả thiết và

$$f(x)=x.\ln\left(\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}\right)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=\ln\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}.$$
$$\Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}\Leftrightarrow\frac{x.f'(x)-f(x)}{x^2}.\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=x.$$
$$\Leftrightarrow\ \left[\frac{f(x)}{x}\right]'.\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=x.\qquad(1)$$

Lấy nguyên hàm hai vế của (1) suy ra $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=\dfrac{x^2}{2}+C$.

Do $f(1)=0\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}$, nên $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=\dfrac{x^2+1}{2}\Rightarrow f(x)=x\ln\dfrac{x^2+1}{2}$ với $x\in(0;+\infty)$.

$I=\displaystyle\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^5 x.\ln\frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{d}x\qquad(2).$

Đặt $u=\ln\dfrac{x^2+1}{2}\Rightarrow du=\dfrac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$; $dv=x\,\mathrm{d}x$, chọn $v=\dfrac{x^2+1}{2}$.

Theo công thức tích phân từng phần, ta được:

$$I=\left(\frac{x^2+1}{2}.\ln\frac{x^2+1}{2}\right)\Bigg|_1^5-\int\limits_1^5 x\,\mathrm{d}x=13\ln 13-\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^5=13\ln 13-12.$$

Chọn đáp án B □

Câu 44. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$.

A. $\displaystyle\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{2x}+C$.

B. $\displaystyle\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}+C$.

C. $\displaystyle\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{2x+1}}{2x+1}+C$.

D. $\displaystyle\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b$, $(a<b)$ được tính theo công thức

A. $S=\left|\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

B. $S=\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\pi\displaystyle\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo lí thuyết về tính diện tích hình phẳng ta có diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b$, $(a<b)$ được tính theo công thức $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_1^5\frac{\mathrm{d}x}{1-2x}$.

A. $I=-\ln 9$. **B.** $I=\ln 9$. **C.** $I=-\ln 3$. **D.** $I=\ln 3$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_1^5 \dfrac{\mathrm{d}x}{1-2x} = -\dfrac{1}{2}\int\limits_1^5 \dfrac{\mathrm{d}(1-2x)}{1-2x} = -\dfrac{1}{2}\ln|1-2x|\Big|_1^5 = -\ln 3.$

Chọn đáp án C □

Câu 47. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$ biết rằng mỗi đơn vị dài trên các trục tọa độ là 2 cm.

A. $\dfrac{15}{4}$ cm^2. **B.** $\dfrac{17}{4}$ cm^2. **C.** 17 cm^2. **D.** 15 cm^2.

Lời giải.

Ta có $S = \int\limits_{-1}^{2} \left|x^3\right| \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \left|x^3\right| \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} \left|x^3\right| \mathrm{d}x = -\int\limits_{-1}^{0} x^3\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} x^3\,\mathrm{d}x = -\dfrac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \dfrac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2} = \dfrac{17}{4}.$

Do mỗi đơn vị trên trục là 2 cm nên $S = \dfrac{17}{4}\cdot 2^2$ cm^2 $= 17$ cm^2.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Biết $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = a\sqrt{\mathrm{e}} + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = ab$.

A. $P = 4$. **B.** $P = -8$. **C.** $P = 8$. **D.** $P = -4$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ v = 2\sqrt{x} \end{cases}$, ta có

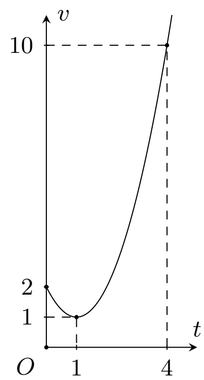
$$\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_{\mathrm{e}}^{1} - 2\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_{\mathrm{e}}^{1} - 4\sqrt{x}\Big|_{\mathrm{e}}^{1} = -2\sqrt{\mathrm{e}} + 4.$$

Từ đó suy ra $\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$. Vậy $P = ab = -8$.

Chọn đáp án B □

Câu 49.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v(km/h) phụ thuộc thời gian t(h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật đi được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s = \dfrac{40}{3}$(km). **B.** $s = 8$(km). **C.** $s = \dfrac{46}{3}$(km). **D.** $s = 6$(km).

Lời giải.

Vì đồ thị của hàm số $v(t)$ có dạng là một phần của parabol nên $v(t) = at^2 + bt + c$ $(a \neq 0, t \geq 0)$.

Đồ thị hàm số $v(t)$ đi qua các điểm $(0;2)$, $(1;1)$, $(4;10)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c = 2 \\ a + b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2. \end{cases}$$

Do đó $v(t) = t^2 - 2t + 2$.

Vậy quãng đường mà vật đi được là $s = \int\limits_0^4 v(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^4 (t^2 - 2t + 2)\,\mathrm{d}t = \dfrac{40}{3}(\mathrm{km})$.

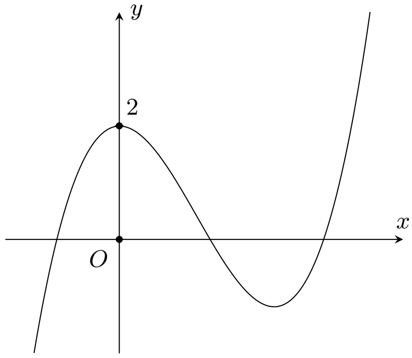
Chọn đáp án A $\square$

Câu 50.

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ bên. Biết $\int_1^4 xf''(x-1)\,\mathrm{d}x = 7$ và $\int_1^2 2xf'(x^2-1)\,\mathrm{d}x = -3$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 3$ là

A. $y = x - 4$. **B**. $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$.

C. $y = 2x - 7$. **D**. $y = 3x - 10$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta suy ra $f(0) = 2$ và $f'(0) = 0$.

Xét tích phân $\int\limits_1^2 2xf'(x^2-1)\,\mathrm{d}x$. Đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 0$; $x = 2 \Rightarrow u = 3$.

Do đó $\int\limits_1^2 2xf'(x^2-1)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 f'(u)\,\mathrm{d}u = f(u)\Big|_0^3 = f(3) - f(0) \Rightarrow f(3) - f(0) = -3 \Leftrightarrow f(3) = -1$.

Xét tích phân $\int\limits_1^4 xf''(x-1)\,\mathrm{d}x$. Đặt $u = x - 1 \Rightarrow x = u + 1 \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}u$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 0$; $x = 4 \Rightarrow u = 3$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int\limits_1^4 xf''(x-1)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 (u+1)f''(u)\,\mathrm{d}u &= \int\limits_0^3 (u+1)\,\mathrm{d}f'(u) = (u+1)f'(x)\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 f'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= 4f'(3) - f'(0) - f(u)\Big|_0^3 = 4f'(3) - f'(0) - f(3) + f(0).\end{aligned}$$

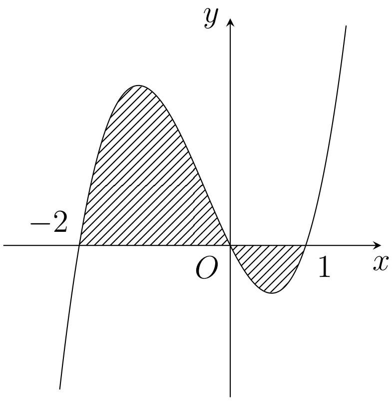
Do đó $4f'(3) - f'(0) - f(3) + f(0) = 7 \Leftrightarrow 4f'(3) = 7 + f(3) - f(0) = 4 \Leftrightarrow f'(3) = 1$.

Như vậy, $f(3) = -1$, $f'(3) = 1$. Suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = 3$ là $y = x - 4$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 51.

Đồ thị trong hình bên là của hàm số $y = f(x)$, S là diện tích hình phẳng (phần tô đậm trong hình). Chọn khẳng định đúng.



A. $S = \int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S = \int\limits_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \int\limits_{0}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S = \int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có $f(x) \geq 0, \forall x \in [-2; 0]$ và $f(x) \leq 0, \forall x \in [0; 1]$.

Do đó $S = \int\limits_{-2}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 52. Cho hàm số $f(x)$ biết $f(0) = 1$, $f'(x)$ liên tục trên $[0; 3]$ và $\int\limits_{0}^{3} f'(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Tính $f(3)$.

A. $f(3) = 9$. **B**. $f(3) = 10$. **C**. $f(3) = 8$. **D**. $f(3) = 7$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{0}^{3} f'(x)\,\mathrm{d}x = 9 \Leftrightarrow f(x)|_0^3 = 9 \Leftrightarrow f(3) - f(0) = 9 \Leftrightarrow f(3) = 9 + f(0) = 9 + 1 = 10$.

Vậy $f(3) = 10$.

Chọn đáp án B □

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $2[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ với $\forall x \in [0; 2]$. Biết $f(0) = 1;\ f(2) = e^6$.

Tích phân $I = \int\limits_{-2}^{0} (2x + 1) f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $1 + e$. **B**. $1 - e^2$. **C**. $1 - e$. **D**. $1 - e^{-1}$.

Lời giải.

$$
\begin{aligned}
& 2[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot f''(x) - [f'(x)]^2 = 2[f(x)]^2 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{f(x) \cdot f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = 2 \\
\Leftrightarrow\ & \int \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' dx = \int 2dx \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + \mathrm{C}_1 \\
\Leftrightarrow\ & \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 2x + C_1 \Leftrightarrow \ln|f(x)| = x^2 + C_1 x + C_2
\end{aligned}
$$

Ta có

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \Rightarrow \ln 1 = C_2 \Rightarrow C_2 = 0 \\ f(2) &= e^6 \Rightarrow 6 = 4 + 2C_1 \Rightarrow C_1 = 1 \\ \Rightarrow \ \ln|f(x)| &= x^2 + x \Rightarrow f(x) = e^{x^2+x} \\ \Rightarrow \quad I &= \int\limits_{-2}^{0} (2x+1)e^{x^2+x}dx = e^{x^2+x}\Big|_{-2}^{0} = 1 - e^2 \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 54. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \cos x$. Tìm khẳng định đúng.

A. $F(x) = \mathrm{e}^{-x} + \sin x + 2019$.
B. $F(x) = \mathrm{e}^{-x} + \cos x + 2019$.
C. $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \sin x + 2019$.
D. $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 2019$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int (\mathrm{e}^{-x} + \cos x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x} + \sin x + C$, với C là hằng số

Cho $C = 2019$ ta có $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \sin x + 2019$.

Chọn đáp án C □

Câu 55. Nếu $f(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-1}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = \dfrac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ thì $a + b + c$ có giá trị bằng

A. 3.
B. 0.
C. 2.
D. 4.

Lời giải.

Ta có: $g(x) = f'(x) = (2ax+b)\sqrt{2x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}(ax^2+bx+c) = \dfrac{(2ax+b)(2x-1) + (ax^2+bx+c)}{\sqrt{2x-1}}$.

$= \dfrac{5ax^2 + (3b-2a)x + c - b}{\sqrt{2x-1}}$.

Theo bài ra: $g(x) = \dfrac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}}$ nên

$$\frac{5ax^2 + (3b-2a)x + c - b}{\sqrt{2x-1}} = \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}} \Rightarrow \begin{cases} 5a = 10 \\ 3b - 2a = -7 \\ c - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 1. \end{cases}$$

Vậy $a + b + c = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[1;3]$ và thỏa mãn $\int\limits_1^3 [f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10$; $\int\limits_1^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 6$. Tính tích phân $I = \int\limits_1^3 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 6$.
B. $I = 7$.
C. $I = 8$.
D. $I = 9$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \int\limits_1^3 [f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10 \\ \int\limits_1^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 10 \\ 2\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \\ \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2. \end{cases}$

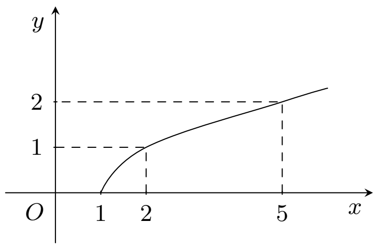
Vậy $I = \int\limits_1^3 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 4 + 2 = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Một bình cắm hoa dạng khối tròn xoay, biết đáy bình và miệng bình có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm. Mặt xung quanh của bình là một phần của mặt tròn xoay có đường sinh là đồ thị hàm số $y = \sqrt{x-1}$. Tính thể tích bình cắm hoa đó.

A. 8π dm^2. **B.** $\dfrac{15\pi}{2}$ dm^2. **C.** $\dfrac{14\pi}{3}$ dm^3. **D.** $\dfrac{15\pi}{2}$ dm^3.

Lời giải.



Vì đáy bình và miệng bình có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm nên đáy và miệng có bán kính đáy lần lượt là 1 dm và 2 dm.

Ta có $\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$ và $\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 5$.

Vậy thể tích bình hoa là $S = \pi \int\limits_2^5 (\sqrt{x-1})^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{15\pi}{2}$ dm^3.

Chọn đáp án D □

Câu 58. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

A. $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} + C$. **B.** $x^4 + x^3$. **C.** $3x^2 + 2x$. **D.** $\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{4}x^3$.

Lời giải.

$\int \left(x^3 + x^2\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 59. Giá trị của $\int\limits_{-1}^0 \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $1 - \mathrm{e}$. **B.** $\mathrm{e} - 1$. **C.** $-\mathrm{e}$. **D.** e.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-1}^0 \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x+1}\Big|_{-1}^0 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e} - 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 60. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ thỏa mãn $F(\mathrm{e}+1) = 4$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = 2\ln(x-1) + 2$. **B.** $F(x) = \ln(x-1) + 3$.

C. $F(x) = 4\ln(x-1)$. **D.** $F(x) = \ln(x-1) - 3$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln(x-1) + C$.
$F(e+1) = 4 \Rightarrow \ln e + C = 4 \Rightarrow C = 3$.
Vậy $F(x) = \ln(x-1) + 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 61. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2, y = 0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A. $\int\limits_0^2 (2x-x^2)dx$. **B.** $\pi\int\limits_0^2 (2x-x^2)^2dx$. **C.** $\int\limits_0^2 (2x-x^2)^2dx$. **D.** $\pi\int\limits_0^2 (2x-x^2)dx$.

Lời giải.

Ta có $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Theo công thức thể tích giới hạn bởi các đường ta có

$V = \pi\int\limits_0^2 (2x-x^2)^2dx$

Chọn đáp án B □

Câu 62. Cho $\int\limits_0^2 f(x)dx = 3$ và $\int\limits_0^2 g(x)dx = -1$. Giá trị của $\int\limits_0^2 [f(x) - 5g(x) + x]\,dx$ bằng

A. 12. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^2 [f(x) - 5g(x) + x]\,dx = \int\limits_0^2 f(x)dx - 5\int\limits_0^2 g(x)dx + \int\limits_0^2 xdx = 3 - 5\cdot(-1) + \frac{1}{2}(2^2 - 0) = 10$.

Chọn đáp án D □

Câu 63. Họ nguyên hàm của hàm số $y = 3x(x + \cos x)$ là

A. $x^3 + 3(x\sin x + \cos x) + C$. **B.** $x^3 - 3(x\sin x + \cos x) + C$.
C. $x^3 + 3(x\sin x - \cos x) + C$. **D.** $x^3 - 3(x\sin x - \cos x) + C$.

Lời giải.

Ta có $I = \int 3x(x+\cos x)dx = \int \left(3x^2 + 3x\cos x\right)dx = x^3 + 3\int x\cos x dx$.

Tính $J = \int x\cos x dx$. Đặt $\begin{cases} x = u \\ \cos x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ \sin x = v \end{cases}$.

$\Rightarrow J = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$.

Vậy $I = x^3 + 3(x\sin x + \cos x) + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 64. Cho $\int\limits_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2}dx = a\ln 3 + b\ln 2 + c\ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị 2^{a-3b+c} bằng

A. 12. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 64.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x = \int\limits_3^4 \left(\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)\mathrm{d}x = 3\ln|x-1|\Big|_3^4 + 2\ln|x-2|\Big|_3^4$

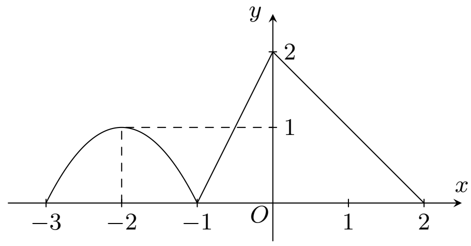
$= 3\ln 3 - 3\ln 2 + 2\ln 2 = -\ln 2 + 3\ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \Rightarrow a - 3b + c = 6 \\ c = 0 \end{cases}.$

Chọn đáp án D □

Câu 65.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ trên $[-3; 2]$ như hình bên (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2+bx+c$). Biết $f(-3) = 0$, giá trị của $f(-1) + f(1)$ bằng

A. $\dfrac{23}{6}$. **B.** $\dfrac{31}{6}$. **C.** $\dfrac{35}{3}$. **D.** $\dfrac{9}{2}$.



Lời giải.

Parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(-2; 1)$ và đi qua điểm $(-3; 0)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -2 \\ 4a - 2b + c = 1 \\ 9a - 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow y = -x^2 - 4x - 3.$$

Do $f(-3) = 0$ nên

$$\begin{aligned} f(-1) + f(1) &= [f(1) - f(0)] + [f(0) - f(-1)] + 2[f(-1) - f(3)] \\ &= \int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^0 f'(x)\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3)\,\mathrm{d}x \\ &= S_1 + S_2 + 2\int\limits_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{8}{3} = \frac{31}{6}. \end{aligned}$$

Với S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 0$ và $x = 0$, $x = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Cho $I = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + 2\cos x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c\pi$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của abc bằng

A. $\dfrac{15}{8}$. **B.** $\dfrac{5}{8}$. **C.** $\dfrac{5}{4}$. **D.** $\dfrac{17}{8}$.

Lời giải.

Đặt $u = \ln(\sin x + 2\cos x) \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}\mathrm{d}x$.

$\mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$, chọn $v = \tan x + 2 = \dfrac{\sin x + 2\cos x}{\cos x}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
I &= (\tan x + 2) \cdot \ln(\sin x + 2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - 2\frac{\sin x}{\cos x}\right) \mathrm{d}x \\
&= 3\ln\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\ln 2 - (x + 2\ln(\cos x))\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 3\ln\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\ln 2 - \frac{\pi}{4} - 2\ln\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= 3\ln 3 - \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\pi.
\end{aligned}$$

Vậy $abc = \dfrac{15}{8}$.

Chọn đáp án A □

Câu 67. Cho hai hàm số $f(x)$ và $f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(-x) = \dfrac{1}{4+x^2}$. Tính $I = \displaystyle\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{\pi}{20}$. **B.** $I = \dfrac{\pi}{10}$. **C.** $I = -\dfrac{\pi}{20}$. **D.** $I = -\dfrac{\pi}{10}$.

Lời giải.

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = -2 \Rightarrow t = 2$; $x = 2 \Rightarrow t = -2$, ta có

$$I = -\int\limits_2^{-2} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-2}^{2} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned}
2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2} \quad &\Leftrightarrow 2\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int\limits_{-2}^{2} f(-x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow 3I + 2I = \int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow I = \frac{1}{5}\int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Đặt $x = 2\tan u$ ta có $\mathrm{d}x = 2\dfrac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u = 2\left(1 + \tan^2 u\right)\mathrm{d}u$.

Đổi cận $x = -2 \Rightarrow u = -\dfrac{\pi}{4}$; $x = 2 \Rightarrow u = \dfrac{\pi}{4}$, ta có

$$I = \frac{1}{5}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\left(1+u^2\right)}{4 + 4\tan^2 u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{10}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}u = \frac{1}{10}u\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{10}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{20}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 68. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Hãy tính $\int\limits_1^4 \dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 4$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = \dfrac{1}{2}$. **D.** $I = 2$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = 1 \Leftrightarrow t = 1$; $x = 4 \Rightarrow t = 2$, ta có

$$I = 2\int\limits_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot 2 = 4.$$

Chọn đáp án A □

Câu 69. Cho $\int\limits_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$ và $\int\limits_5^{-2} g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int\limits_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1]\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 13$. **B.** $I = 27$. **C.** $I = -11$. **D.** $I = 3$.

Lời giải.

Theo tính chất của tích phân ta có

$$I = \int\limits_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x - 4\int\limits_{-2}^5 g(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-2}^5 \mathrm{d}x = 8\cdot 4\cdot(-3) - x\Big|_{-2}^5 = 13.$$

Chọn đáp án A □

Câu 70. Tích phân $\int\limits_0^2 \dfrac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{3}$. **B.** $\ln\dfrac{7}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{7}$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Đặt $u = x^2 + 3 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}u$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = 3$; $x = 2 \Rightarrow u = 7$, ta có

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_3^7 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_3^7 = \frac{1}{2}\ln 7 - \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 71. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau?

A. $\int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2(\mathrm{e}^x + C)$. **B.** $\int x^3\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^4 + C}{4}$.

C. $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$. **D.** $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$ nên mệnh đề ở phương án C sai.

Chọn đáp án C □

Câu 72. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^{2x}$?

A. $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = 2.5^{2x}\ln 5 + C$. **B.** $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = 2.\dfrac{5^{2x}}{\ln 5} + C$.

C. $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{25^x}{2\ln 5} + C$. **D.** $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{25^{x+1}}{x+1} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}.\dfrac{5^{2x}}{\ln 5} + C = \dfrac{25^x}{2\ln 5} + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và $f(2) = 16$; $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_0^1 xf'(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 7$. **B.** $I = 20$. **C.** $I = 12$. **D.** $I = 13$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$, ta có

$$I = \int\limits_0^2 \frac{t}{2} f'(t) \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int\limits_0^2 tf'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = f'(t)\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = f(t) \end{cases}$, ta có

$$I = \frac{1}{4}\left[tf(t)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \right] = \frac{1}{4}\left[2f(2) - 4\right] = \frac{1}{4}(2\cdot 16 - 4) = 7.$$

Chọn đáp án A □

Câu 74. Cho các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\limits_a^a kf(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

B. $\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = x\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào các đáp án ta dễ dàng nhận thấy các đáp án A, C, D đúng, đáp án B sai.

Chọn đáp án B □

Câu 75. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $\int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Kết quả $I =$

$\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{1+e^x}\, \mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 8$. **B.** $I = 4$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = -1$; $x = -1 \Rightarrow t = 1$, ta có

$$I = e\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\, \mathrm{d}x = -\int\limits_{1}^{-1} \frac{f(-t)}{1+\mathrm{e}^{-t}}\, \mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(-x)}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}}\, \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x f(-x)}{1+\mathrm{e}^x}\, \mathrm{d}x.$$

Do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(x) = f(-x), \forall x \in [-1;1] \Rightarrow I = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{e}^x f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\, \mathrm{d}x$.

Từ đó suy ra

$$I + I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\, \mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\, \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(\mathrm{e}^x+1) f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\, \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x = 4.$$

Vậy $I = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 76. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t. Tính thời điểm t tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

A. $t = 2$. **B.** $t = 1$. **C.** $t = 4$. **D.** $t = 3$.

Lời giải.

Vận tốc của chất điểm tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t = 12 - 3(t-2)^2 \leq 12$.

Vậy tại thời điểm $t = 2$ tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

Chọn đáp án A □

Câu 77. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \dfrac{1}{x}$.

A. $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3^x}{\ln 3} - \dfrac{1}{x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$. **B.** $\dfrac{x^3}{3} - 3^x + \dfrac{1}{x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

C. $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R}$. **D.** $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \left(x^2 - 3^x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 78. Cho tích phân $I = \int\limits_{0}^{4} f(x)\, \mathrm{d}x = 32$. Tính tích phân $J = \int\limits_{0}^{2} f(2x)\, \mathrm{d}x$.

A. $J = 64$. **B.** $J = 8$. **C.** $J = 16$. **D.** $J = 32$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{2} = \mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 2 \Rightarrow t = 4$.

Khi đó $J = \dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{4} f(t)\, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2} \cdot 32 = 16$.

Chọn đáp án C □

Câu 79. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2}{4x-3}$.

A. $\displaystyle\int \frac{2}{4x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|4x-3| + C$.

B. $\displaystyle\int \frac{2}{4x-3}\,\mathrm{d}x = 2\ln\left|2x-\frac{3}{2}\right| + C$.

C. $\displaystyle\int \frac{2}{4x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|2x-\frac{3}{2}\right| + C$.

D. $\displaystyle\int \frac{2}{4x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(2x-\frac{3}{2}\right) + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{2}{4x-3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2x-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|2x-\frac{3}{2}\right| + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 80. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $F\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 3-\sqrt{3}$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}-4$. **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{2\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{2}{\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin x) - \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C. \end{aligned}$$

Suy ra $F'(x) = f(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$.

Trên khoảng $(0;\pi)$, $F'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$ nên ta có

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{3}}{3} + C = \sqrt{3} \Leftrightarrow C = 2\sqrt{3}.$$

Vậy $F(x) = -\dfrac{2}{\sin x} + \cot x + 2\sqrt{3}$. Do đó $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 81. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp một, đạo hàm cấp hai liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x f''(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$. Giá trị của biểu thức $\dfrac{\mathrm{e}f'(1) - f'(0)}{\mathrm{e}f(1) - f(0)}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 2.

Lời giải.

Đặt $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f''(x)\,\mathrm{d}x = k.$

— $k = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f''(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}f'(x) = \mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1 - k.$

Suy ra $2k = \mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1.$

— $k = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}f(x) = \mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1 - k.$

Suy ra $2k = \mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1.$

Vậy $\dfrac{\mathrm{e}f'(1) - f'(0)}{\mathrm{e}f(1) - f(0)} = \dfrac{\mathrm{e}^x f'(x)\Big|_0^1}{\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1} = 1.$

Chọn đáp án B □

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $f(0) = 2018$, $f(2) = 2019$. Tính $S = f(3) - f(-1)$.

A. $S = \ln 4035$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = \ln 2$. **D.** $S = 1$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x = \ln|x-1| + C$

Khi đó $f(-1) = \ln 2 + C_1$; $f(0) = C_2 = 2018$; $f(2) = C_3 = 2019$; $f(3) = \ln 2 + C_4$

- $\int_2^3 f'(x)dx = \int_2^3 \dfrac{1}{x-1}dx \Leftrightarrow f(3) - f(2) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln 2 + C_4 - C_3 = \ln 2 \Rightarrow C_3 = C_4$
- $\int_{-1}^0 f'(x)dx = \int_{-1}^0 \dfrac{1}{x-1}dx \Leftrightarrow f(0) - f(-1) = -\ln 2 \Leftrightarrow C_2 - C_1 - \ln 2 = -\ln 2 \Rightarrow C_1 = C_2$

Vậy $S = f(3) - f(-1) = C_4 - C_1 = 2019 - 2018 = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 83. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 7$, $\int\limits_3^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 8$, $\int\limits_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Giá trị của $I = \int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 5$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 7$. **D.** $I = 8$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_3^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^{10} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 8 - 9 = -1$

Khi đó $I = \int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7 - 1 = 6.$

Chọn đáp án B □

Câu 84. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để tích phân $\int\limits_1^{1+a} \dfrac{\mathrm{d}x}{x(x-5)(x-4)}$ tồn tại.

A. $-1 < a < 3$. **B.** $a < -1$. **C.** $a \neq 4, a \neq 5$. **D.** $a < 3$.

Lời giải.

Tích phân $\int\limits_1^{1+a} \dfrac{\mathrm{d}x}{x(x-5)(x-4)}$ tồn tại khi và chỉ khi hàm số $y = \dfrac{1}{x(x-5)(x-4)}$ liên tục trên $[1; 1+a]$ hoặc $[1+a; a]$.

Mà hàm số $y = \dfrac{1}{x(x-5)(x-4)}$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$; $(0; 4)$; $(4; 5)$; $(5; +\infty)$.

Nên hàm số liên tục trên $[1; 1+a]$ hoặc $[1+a; 1] \Leftrightarrow 0 < 1+a < 4 \Leftrightarrow -1 < a < 3$.

Vậy $-1 < a < 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 85. Hàm số $F(x) = x^2 \ln(\sin x - \cos x)$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin x - \cos x}$.

B. $f(x) = 2x \ln(\sin x - \cos x) + \dfrac{x^2}{\sin x - \cos x}$.

C. $f(x) = 2x \ln(\sin x - \cos x) + \dfrac{x^2(\cos x + \sin x)}{\sin x - \cos x}$.

D. $f(x) = \dfrac{x^2(\sin x + cosx)}{\sin x - \cos x}$.

Lời giải.

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên

$$f(x) = F'(x) = 2x \cdot \ln(\sin x - \cos x) + x^2 \cdot \frac{(\sin x - \cos x)'}{\sin x - \cos x} = 2x \cdot \ln(\sin x - \cos x) + x^2 \cdot \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 86. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - xf(x) = 0, f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Giá trị của$f(1)$ bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. **B.** $\dfrac{1}{e}$. **C.** $\sqrt{e}$. **D.** e.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = x \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \ln[f(x)] = \dfrac{1}{2}x^2 + C$ (do $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Do đó $\ln[f(0)] = \dfrac{1}{2} \cdot 0^2 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \ln f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow f(1) = \sqrt{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 87. Cho hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \sin x$. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm $f(x)$.

A. $y = \dfrac{4}{3}\cos^3 - \dfrac{4}{5}\sin^5 x + C$. **B.** $y = -\dfrac{4}{3}\cos^3 x + \dfrac{4}{5}\cos^5 x + C$.

C. $y = \dfrac{4}{3}\sin^3 x - \dfrac{4}{5}\cos^5 x + C$. **D.** $y = -\dfrac{4}{3}\sin^3 x + \dfrac{4}{5}\sin^5 x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin^2 2x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = 4\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

$$= -4\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \mathrm{d}(\cos x) = -4\int \left(1 - \cos^2 x\right) \cdot \cos^2 x \cdot \mathrm{d}(\cos x)$$

$$= -4\int \left(\cos^2 x - \cos^4 x\right) \cdot \mathrm{d}(\cos x) = -\frac{4}{3}\cos^3 x + \frac{4}{5}\cos^5 x + C.$$

Chọn đáp án B □

Câu 88. Tích phân $\int\limits_0^{\pi^2} \left(\sin\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}\right)\, \mathrm{d}x = A + B\pi$. Tính $A + B$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải.

Đặt $y = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \pi^2 \Rightarrow t = \pi$ Suy ra $I = 2\int\limits_0^{\pi} (\sin t - \cos t)t\,\mathrm{d}t$.

Đặt $u = t$; $\mathrm{d}v = (\sin t - \cos t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}t; v = -\cos t - \sin t$.

$$I = 2\left[t(-\cos t - \sin t)\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} (\cos t + \sin t)\,\mathrm{d}t\right] = 2\left[\pi + (\sin t - \cos t)\Big|_0^{\pi}\right] = 4 + 2\pi.$$

Nên $A = 4$; $B = 2 \Rightarrow A + B = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 89. Hàm số có đạo hàm bằng $2x + \frac{1}{x^2}$ là

A. $y = \frac{2x^3 - 2}{x^3}$. **B.** $y = \frac{x^3 + 1}{x}$. **C.** $y = \frac{3x^3 + 3x}{x}$. **D.** $y = \frac{x^3 + 5x - 1}{x}$.

Lời giải.

Ta xét $\int \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x = x^2 - \frac{1}{x} + C = \frac{x^3 + Cx - 1}{x}$.

Chọn $C = 5$ ta được hàm số thoả yêu cầu bài toán là $y = \frac{x^3 + 5x - 1}{x}$.

Chọn đáp án D □

Câu 90. Công thức nào sau đây là **sai**?

A. $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$. **B.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \cot x + C$.

C. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. **D.** $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản.

Cách giải: Ta có $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ do đó đáp án B sai.

Chọn đáp án B □

Câu 91. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 + x - 1$ là:

A. $x^4 + x^2 + x + C$. **B.** $12x^2 + 1 + C$. **C.** $x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$. **D.** $x^4 - \frac{1}{2}x^2 - x + C$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng nguyên hàm cơ bản $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

Cách giải: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - x + C = x^4 + \frac{1}{2} \cdot x^2 - x + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x(\ln x + 2)^2}$?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln x + 2} + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{\ln x + 2} + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{\ln x + 2} + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln x + 2 + C$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{-1}{x} + C$ và công thức vi phân $\mathrm{d}\left[f(x)\right] = f'(x)\mathrm{d}x$.

Cách giải: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\ln x+2)}{(\ln x+2)^2} = \frac{-1}{\ln x+2} + C$.

Chú ý: HS có thể sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ để giải bài toán này bằng cách đặt $t = \ln x + 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 93. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ thỏa mãn $F(0) = 5$. Khi đó phương trình $F(x) = 5$ có số nghiệm thực là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng các công thức nguyên hàm cơ bản để tìm $F(x)$ sau đó giải phương trình.

Cách giải:

Ta có: $F(x) = \int (x^3 - 2x^2 + 1)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + x + C$.

Lại có: $F(0) = 5 \Leftrightarrow C = 5 \Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + x + 5$.

$F(x) = 5 \Leftrightarrow \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x \approx -1,04 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

Câu 94. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ và trục hoành.

A. $\frac{31\pi}{3}$. **B.** $\frac{32\pi}{3}$. **C.** $\frac{34\pi}{3}$. **D.** $\frac{35\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{4x - x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4. \end{array}\right.$

Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox là

$$V = \pi \int\limits_0^4 \left(\sqrt{4x - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^4 \left(4x - x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = \frac{32\pi}{3} \text{ đvtt.}$$

Chọn đáp án B □

Câu 95. Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thoả: $\int\limits_1^3 \left[f(x) + 3g(x)\right] \mathrm{d}x = 10$, $\int\limits_1^3 \left[2f(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x = 6$. Tính $\int\limits_1^3 \left[f(x) + g(x)\right] \mathrm{d}x$

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải.

Đặt $I_1 = \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, $I_2 = \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x$. Theo bài ra ta có

$$\begin{cases}\displaystyle\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x=10\\ \displaystyle\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x+3\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x=10\\ \displaystyle 2\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}I_1+3I_2=10\\ 2I_1-I_2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}I_1=4\\ I_2=2.\end{cases}$$

Vậy $\displaystyle\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=I_1+I_2=6$.

Chọn đáp án B □

Câu 96. Tính $\displaystyle\int (x-\sin 2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{x^2}{2}+\cos 2x+C$. **B.** $x^2+\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **C.** $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $\dfrac{x^2}{2}+\sin x+C$.

Lời giải.

$$\int (x-\sin 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x+C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 97. Giả sử $I=\displaystyle\int_1^{64}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=a\ln\frac{2}{3}+b$ với a,b là số nguyên. Khi đó giá trị $a-b$ là:

A. -17. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 17.

Lời giải.

Đặt $\sqrt[6]{x}=t\Leftrightarrow x=t^6;\ t\geq 0$. Khi đó ta có $dx=6t^5\cdot\mathrm{d}t$.

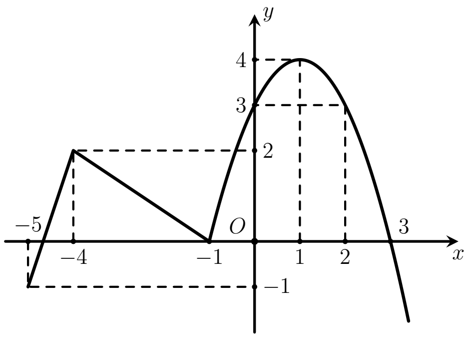
Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{64}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int_1^2\frac{6t^5\cdot\mathrm{d}t}{t^3+t^2}=\int_1^2\frac{6t^3.\mathrm{d}t}{t+1}\\ &= \int_1^2\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\cdot\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)\Bigg|_1^2=6\ln\frac{2}{3}+11.\end{aligned}$$

Do đó $a=6;\ b=11$. Vậy $a-b=-5$.

Chọn đáp án C □

Câu 98. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-5;3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$).



Biết $f(0) = 0$, giá trị của $2f(-5) + 3f(2)$ bằng:

A. 33. **B**. $\dfrac{109}{3}$. **C**. $\dfrac{35}{3}$. **D**. 11.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có $f'(x) = \begin{cases} 3x + 14 & \text{nếu} - 5 \le x \le -4 \\ -\dfrac{2}{3}(x+1) & \text{nếu} - 4 \le x \le -1 \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{nếu} - 1 \le x \le 3 \end{cases}$.

Suy ra $f(x) = \begin{cases} 3 \cdot \dfrac{x^2}{2} + 14x + C_1 & \text{nếu} - 5 \le x \le -4 \\ -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x^2}{2} + x\right) + C_2 & \text{nếu} - 4 \le x \le -1 \\ -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C_3 & \text{nếu} - 1 \le x \le 3 \end{cases}$.

Mặt khác

$f(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$.

$f(-1) = -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2} - 1\right) + C_2 = -\dfrac{1}{3} + 1 - 3 \Rightarrow C_2 = -2$.

$f(-4) = 24 - 56 + C_1 = -\dfrac{16}{3} + \dfrac{8}{3} - 2 \Rightarrow C_1 = \dfrac{82}{3}$.

Khi đó $2f(-5) + 3f(2) = \dfrac{35}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 99. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \cos x + x$ là

A. $\sin x + \dfrac{1}{2}x^2 + C$. **B**. $\sin x + x^2 + C$. **C**. $-\sin x + \dfrac{1}{2}x^2 + C$. **D**. $-\sin x + x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \displaystyle\int (\cos x + x)\,\mathrm{d}x = \sin x + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 100. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \displaystyle\int_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$. **B**. $S = \pi\displaystyle\int_0^2 3^{2x}\,\mathrm{d}x$. **C**. $S = \pi\displaystyle\int_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$. **D**. $S = \displaystyle\int_0^2 3^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $S = \displaystyle\int_0^2 |3^x|\,\mathrm{d}x = \int_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 101. Tìm tất cả các giá trị thực m thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^m (2x+1)\,\mathrm{d}x < 2$.

A. $m < -2$. **B**. $-2 < m < 1$. **C**. $m \ge 1$. **D**. $m > 2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^m (2x+1)dx < 2 \Leftrightarrow \left(x^2 + x\right)\Big|_0^m < 2 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 102. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int\limits_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$.

Giá trị tích phân $I=\int\limits_1^2 f(2x+1)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải.

Đặt $t=2x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x,\ x=1\Rightarrow t=3;\ x=2\Rightarrow t=5$.

Vậy $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_3^5 f(t)\,\mathrm{d}t=6$.

Chọn đáp án B □

Câu 103. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1, f'(x)=f(x)\cdot(3x^2+2mx+m)$ với m là tham số. Giá trị của tham số m để $f(3)=e^{-4}$ là

A. $m=-2$. **B.** $m=\sqrt{3}$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=4$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=3x^2+2mx+m\Rightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int(3x^2+2mx+m)\,\mathrm{d}x$.

Nên $\ln[f(x)]=x^3+mx^2+mx+C\Rightarrow f(x)=e^{x^3+mx^2+mx+C}$.

Do $f(1)=1\Rightarrow e^{1+2m+C}=1\Rightarrow C=-2m-1$.

Vậy $f(x)=e^{x^3+mx^2+mx-2m-1}\Rightarrow f(3)=e^{-4}\Leftrightarrow e^{26+10m}=e^{-4}\Leftrightarrow m=-3$.

Chọn đáp án C □

Câu 104. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\left[\dfrac{1}{3};3\right]$ thỏa mãn $f(x)+xf\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^3-x$. Giá trị tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^3\dfrac{f(x)}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{8}{9}$. **B.** $\dfrac{16}{9}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Theo giả thiết $f(x)+xf\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^3-x$.

Đặt $x=\dfrac{1}{t}\Rightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t; x=3\Rightarrow t=\dfrac{1}{3}; x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow t=3$.

Suy ra $I=\int\limits_3^{\frac{1}{3}}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{\left(\dfrac{1}{t}\right)^2+\dfrac{1}{t}}\cdot\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{3}}^3\dfrac{tf\left(\dfrac{1}{t}\right)}{t^2+t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{3}}^3\dfrac{xf\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow 2I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^3\dfrac{f(x)+xf\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^2+x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{3}}^3\dfrac{x^3-x}{x^2+x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{3}}^3(x-1)\,\mathrm{d}x=\dfrac{16}{9}$.

$\Rightarrow I=\dfrac{8}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 105. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}7-4x^2 \text{ khi } 0\le x\le 1\\ 4-x^2 \text{ khi } x>1\end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x=0$, $x=3$, $y=0$.

A. $\dfrac{16}{3}$. **B.** $\dfrac{20}{3}$. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải.

Phương pháp: Công thức tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường thẳng $x = a, x = b$ $(a < b)$ và các đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$.

Cách giải:

Xét các phương trình hoành độ giao điểm:

— $4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \notin (1; +\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2.$

— $7 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2} \notin [0; 1].$

$$\begin{aligned}\Rightarrow S &= \int\limits_0^1 \left|7 - 4x^2\right|\,dx + \int\limits_1^2 \left|4 - x^2\right|\,dx + \int\limits_2^3 \left|4 - x^2\right|\,dx \\ &= \int\limits_0^1 \left(7 - 4x^2\right)\,dx + \int\limits_1^2 \left(7 - 4x^2\right)\,dx + \int\limits_2^3 \left(7 - 4x^2\right)\,dx \\ &= 7 - 1 + \frac{16}{3} - \frac{11}{3} - 3 + \frac{16}{3} = 10.\end{aligned}$$

□

Câu 106. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = 4x + 3$ và $f(1) = -1$. Biết rằng phương trình $f(x) = 10$ có hai nghiệm thực x_1, x_2. Tính tổng $\log_2|x_1| + \log_2|x_2|$.

A. 8. **B.** 16. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức: $f(x) = \int f'(x)\,dx$ để tìm hàm số $f(x)$ sau đó giải phương trình và tính tổng đề bài yêu cầu.

Ta có: $f(x) = \int (4x + 3)\,dx = 2x^3 + 3x + C$.

Lại có: $f(1) = -1 \Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + C = -1 \Leftrightarrow C = -6 \Rightarrow f(x) = 2x^2 + 3x - 6$.

$\Rightarrow f(x) = 10 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 6 = 10 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 16 = 0 \quad (*)$.

Ta có: $ac = 2 \cdot (-16) = -32 < 0 \Rightarrow (*)$ luôn có hai nghiệm trái dấu.

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{3}{2} \\ x_1x_2 = -8. \end{cases}$

Ta có: $\log_2|x_1| + \log_2|x_2| = \log_2|x_1x_2| = \log_2|-8| = \log_2 2^3 = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 107. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\int\limits_0^3 f(x)\,dx = 8$ và $\int\limits_0^5 f(x)\,dx = 4$.

Tính $\int\limits_{-1}^1 (|4x - 1|)\,dx$.

A. 3. **B.** 6. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $\dfrac{11}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng phương pháp tích phân đổi biến.

Ta có: $I = \int\limits_{-1}^{1} f(|4x-1|)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f(-4x+1)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)\,\mathrm{d}x$.

Xét $I_1 = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f(-4x+1)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $-4x+1 = t \Rightarrow\ \mathrm{d}t = -4\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = 5 \\ x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow t = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = -\dfrac{1}{4}\int\limits_{5}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{4}\int\limits_{0}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{4}\int\limits_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\cdot 4 = 1.$

Xét $I_2 = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $4x-1 = t \Rightarrow\ \mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 3 \\ x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow t = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow I_2 = \dfrac{1}{4}\int\limits_{0}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{4}\int\limits_{0}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{4}\int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\cdot 8 = 2$

$I = I_1 + I_2 = 1 + 2 = 3$

Chọn đáp án A □

Câu 108. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \tan x f(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{8} \dfrac{f(\sqrt[3]{x})}{x}\,\mathrm{d}x = 6$. Tính tích phân $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \dfrac{f(x^2)}{x}\,\mathrm{d}x$.

A. 4. **B**. 6. **C**. 7. **D**. 10.

Lời giải.

— Xét tích phân $I_1 = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \tan x f(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = 6$.

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow\ \mathrm{d}t = -2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$.

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t = \dfrac{1}{4}$. Ta có

$$I_1 = -\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} f(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f(t)}{2t}\,\mathrm{d}t = 6 \Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x = 6.$$

— Xét tích phân $I_2 = \int\limits_{1}^{8} \dfrac{f(\sqrt[3]{x})}{x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = t^3 \Rightarrow\ \mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t$.

Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1$, $x = 8 \Rightarrow t = 2$. Ta có

$$I_2 = \int\limits_1^2 \frac{3t^2 f(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t = 6 \Rightarrow \int\limits_1^2 \frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x = 1.$$

— Xét tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$. Khi $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$, khi $x = \sqrt{2} \Rightarrow t = 2$. Ta có

$$I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2xf(x^2)}{2x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(t)}{2t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} \frac{f(x)}{2x}\,\mathrm{d}x = 6 + 1 = 7.$$

Chọn đáp án C □

Câu 109. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + 3$ là

A. $\frac{x^3}{3} + 3x + C$. **B.** $x^3 + 3x + C$. **C.** $\frac{x^3}{2} + 3x + C$. **D.** $x^2 + 3 + C$.

Lời giải.

Sử dụng công thức $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 110 (2D3B2-1). Tích phân $\int\limits_0^1 \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{7}$. **C.** $-\frac{4}{35}$. **D.** $\frac{1}{2}\log\frac{7}{5}$.

Lời giải.

Sử dụng công thức $\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 111. Diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$ là

A. $S = \frac{397}{4}$. **B.** $S = \frac{937}{12}$. **C.** $S = \frac{3943}{12}$. **D.** $S = \frac{793}{4}$.

Lời giải.

Phương pháp: Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Cách giải: Giải phương trình $-x^3 + 12x = -x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Diện tích S của hình phẳng (H) là

$$S = \int\limits_{-3}^{4} \left|\left(-x^3 + 12x\right) - \left(-x^2\right)\right|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{4} \left|-x^3 + 12x + x^2\right|\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{-3}^{0} \left|-x^3+12x+x^2\right| \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{4} \left|-x^3+12x+x^2\right| \mathrm{d}x\\
&= \int\limits_{-3}^{0} \left(-x^3+12x+x^2\right) \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{4} \left(-x^3+12x+x^2\right) \mathrm{d}x\\
&= \left(\frac{1}{4}x^4-6x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-3}^{0} + \left(\frac{1}{4}x^4-6x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{0}^{4}\\
&= 0-\left(\frac{1}{4}\cdot 3^4-6\cdot 3^2+\frac{1}{3}\cdot 3^3\right)+\left(-\frac{1}{4}\cdot 4^4+6\cdot 4^2+\frac{1}{3}\cdot 4^3\right)-0=\frac{937}{12}.
\end{aligned}
$$

Chọn đáp án B □

Câu 112. Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$ hàm số $f(x)=\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}, (a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tổng $S=a+b+c$ bằng

A. 6. **B**. 5. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.

Phương pháp: $f(x)$ có một nguyên hàm $F(x)\Leftrightarrow (F(x))'=f(x)$.

Cách giải:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{2x-3}\\
\Rightarrow (F(x))' &= (2ax+b)\sqrt{2x-3}+\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{2x-3}}=\frac{(2ax+b)(2x-3)+ax^2+bx+c}{\sqrt{2x-3}}\\
&= \frac{5ax^2+(3b-6a)x-3b+c}{\sqrt{2x-3}}.
\end{aligned}
$$

$f(x)$ có một nguyên hàm $F(x)\Leftrightarrow (F(x))'=f(x)$, khi đó $\begin{cases} 5a=20\\ 3b-6a=-30\\ -3b+c=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=4\\ b=-2\\ c=1\end{cases}.$

$\Rightarrow S=a+b+c=3.$

Chọn đáp án D □

Câu 113. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x\cdot f'(2x)\,\mathrm{d}x$

A. 13. **B**. 12. **C**. 20. **D**. 7.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức từng phần: $\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v=uv|_a^b-\int\limits_a^b v\,\mathrm{d}u.$

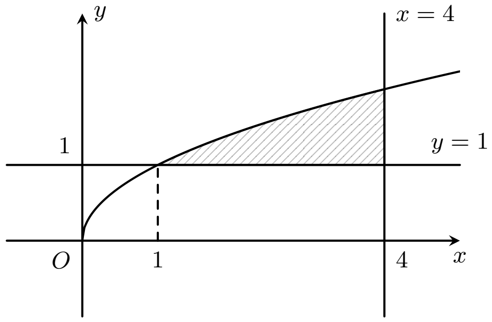
Cách giải:

$$
\begin{aligned}
I=\int\limits_0^2 x\cdot f'(2x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}\left(f(2x)\right)\\
&= \frac{1}{2}x\cdot f(2x)|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}f(2) - \frac{1}{4}\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}(2x) \\
&\overset{\text{đặt } t=2x}{=} \frac{1}{2}f(2) - \frac{1}{4}\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}f(2) - \frac{1}{4}\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 16 - \frac{1}{4}\cdot 4 = 8 - 1 = 7.
\end{aligned}
$$

Chọn đáp án D □

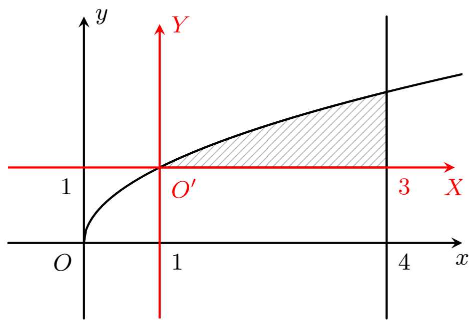
Câu 114. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số sau $y = \sqrt{x}, y = 1$ đường thẳng $x = 4$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình (H) khi quay quanh đường thẳng $y = 1$ bằng



A. $\frac{9}{2}\pi$. **B.** $\frac{119}{6}\pi$. **C.** $\frac{7}{6}\pi$. **D.** $\frac{21}{2}\pi$.

Lời giải.

Phương pháp: Gắn hệ trục tọa độ mới. Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi hai đồ thị số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ khi quay quanh trục Ox là: $V = \pi\int\limits_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right|\,\mathrm{d}x$.



Cách giải: Đặt $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$. Ta được hệ trục tọa độ OXY như hình vẽ:

Ta có: $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow Y + 1 = \sqrt{X+1} \Leftrightarrow Y = \sqrt{X+1} - 1$.

Thể tích cần tìm là

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int\limits_0^3 \left(\sqrt{X+1} - 1\right)^2\,\mathrm{d}X = \pi\int\limits_0^3 \left(X + 2 - 2\sqrt{X+1}\right)\,\mathrm{d}X \\
&= \pi\left(\frac{1}{2}X^2 + 2X - \frac{4}{3}(X+1)\sqrt{X+1}\right)\Bigg|_0^3 = \pi\left[\left(\frac{9}{2} + 6 - \frac{32}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)\right] = \frac{7\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

Chọn đáp án C □

Câu 115. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(x) + 2f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{e^2}$. **B.** $\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4e^2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4e^2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e^2}$.

Lời giải.

Phương pháp: $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$.

Cách giải: Ta có

$$\begin{aligned} f'(x)+2f(x)=1 &\Leftrightarrow e^{2x}f'(x)+e^{2x}\cdot 2f(x)=e^{2x}\\ &\Leftrightarrow \left(e^{2x}\cdot f(x)\right)'=e^{2x}\\ &\Rightarrow e^{2x}\cdot f(x)=\int e^{2x}\,dx\\ &\Leftrightarrow e^{2x}\cdot f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C. \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} f(0)&=1\\ \Rightarrow 1&=\frac{1}{2}+C\\ \Rightarrow C&=\frac{1}{2}\\ \Rightarrow e^{2x}\cdot f(x)&=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\\ \Leftrightarrow f(x)&=\frac{e^{2x}+1}{2e^{2x}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \frac{e^{2x}+1}{2e^{2x}}\,dx\\ &=\int_0^1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx\\ &=\left.\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}e^{-2x}\right)\right|_0^1\\ &=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4e^2}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)\\ &=\frac{3}{4}-\frac{1}{4e^2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 116 (2D3Y1-1). Nếu $\int f(x)\,dx=\dfrac{x^3}{3}+e^x+C$ thì $f(x)$ bằng

A. $f(x)=3x^2+e^x$. **B.** $f(x)=\dfrac{x^4}{3}+e^x$. **C.** $f(x)=x^2+e^x$. **D.** $f(x)=\dfrac{x^4}{12}+e^x$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,dx=\dfrac{x^3}{3}+e^x+C\Rightarrow f(x)=x^2+e^x$.

Chọn đáp án C □

Câu 117 (2D3Y1-1). Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^{2019}$, $(x\in\mathbb{R})$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $F(x)=2019x^{2018}+C$, $(C\in\mathbb{R})$. **B.** $F(x)=x^{2020}+C$, $(C\in\mathbb{R})$.

C. $F(x) = \dfrac{x^{2020}}{2020} + C,\ (C \in \mathbb{R})$. **D.** $F(x) = 2018x^{2019} + C,\ (C \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\displaystyle\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$, ta có $\displaystyle\int f(x)\, \mathrm{d}x = \int x^{2019}\, \mathrm{d}x = \frac{x^{2020}}{2020} + C$. □

Câu 118 (2D3B1-1). Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $f'(x) = 27 + \cos x$ và $f(0) = 2019$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x) = 27x + \sin x + 1991$. **B.** $f(x) = 27x - \sin x + 2019$.
C. $f(x) = 27x + \sin x + 2019$. **D.** $f(x) = 27x - \sin x - 2019$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 27 + \cos x \Rightarrow \displaystyle\int f'(x)\, \mathrm{d}x = \int (27 + \cos x)\, \mathrm{d}x \Rightarrow f(x) = 27x + \sin x + C$.

Lại có $f(0) = 2019 \Rightarrow 27 \cdot 0 + \sin 0 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2019 \Rightarrow f(x) = 27x + \sin x + 2019$.

Chọn đáp án C □

Câu 119 (2D3Y1-1). Hàm số $F(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$. **B.** $f(x) = x^2\mathrm{e}^{x^2}$. **C.** $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$. **D.** $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = (F(x))' = \left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 120 (2D3K1-1). Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018x^{2017}\mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 2018$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = 2019\mathrm{e}^{2018}$. **B.** $f(1) = 2019\mathrm{e}^{-2018}$. **C.** $f(1) = 2017\mathrm{e}^{2018}$. **D.** $f(1) = 2018\mathrm{e}^{2018}$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) - 2018f(x) = 2018x^{2017}\mathrm{e}^{2018x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f'(x) - 2018\mathrm{e}^{-2018x}f(x) = 2018x^{2017}$.

$\Rightarrow \left(\mathrm{e}^{-2018x}f(x)\right)' = 2018x^{2017} \Rightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f(x)$ là 1 nguyên hàm của$2018x^{2017}$.

Ta có: $\displaystyle\int 2018x^{2017}\, \mathrm{d}x = x^{2018} + C \Rightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f(x) = x^{2018} + C_0$.

Mà $f(0) = 2018 \Rightarrow 2018 = C_0 \Rightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f(x) = x^{2018} + 2018 \Rightarrow f(x) = x^{2018}\mathrm{e}^{2018x} + 2018\mathrm{e}^{2018x}$

$\Rightarrow f(1) = \mathrm{e}^{2018} + 2018\mathrm{e}^{2018} = 2019\mathrm{e}^{2018}$.

Chọn đáp án A □

Câu 121 (2D3Y1-1). Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\displaystyle\int \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \mathrm{d}x = \frac{\displaystyle\int f(x)\, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int g(x)\, \mathrm{d}x}, (g(x) \neq 0, \forall x \in \mathrm{R})$.

B. $\displaystyle\int f(x) - g(x)\, \mathrm{d}x = \int f(x)\, \mathrm{d}x - \int g(x)\, \mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int k \cdot f(x)\, \mathrm{d}x = k\int f(x)\, \mathrm{d}x, (k \neq 0, k \in \mathbb{R})$.

D. $\displaystyle\int f(x) + g(x)\, \mathrm{d}x = \int f(x)\, \mathrm{d}x + \int g(x)\, \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo tính chất của nguyên hàm ta có mệnh đề sai là $\displaystyle\int \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \mathrm{d}x = \frac{\displaystyle\int f(x)\, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int g(x)\, \mathrm{d}x}, (g(x) \neq 0, \forall x \in \mathrm{R})$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 122. Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$.

A. $\dfrac{3^{-x}}{\ln 3} + C$. **B.** $-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3} + C$. **C.** $-3^{-x} + C$. **D.** $-3^{-x}\ln 3 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int 3^{-x}\mathrm{d}x = -\dfrac{3^{-x}}{\ln 3} + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 123. Giả sử $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và a, b, c, $b+c \in (\alpha;\beta)$. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{b+c}^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào tính chất của tích phân, với $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và a, b, c, $b+c \in (\alpha;\beta)$ ta luôn có

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{b+c}^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Vậy mệnh đề sai là $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 124. Giả sử $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và a, b, c, $b+c \in (\alpha;\beta)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào tính chất của tích phân, với $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và a,b,c,$b+c \in (\alpha;\beta)$ ta có:

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b+c}^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Vậy mệnh đề sai là $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Chọn đáp án (B) □

Câu 125. Cho $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $S = \int\limits_{-2}^{2} |f(x)|\mathrm{d}x$.

B. $S = 2\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| + 2\left|\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

C. $S = 2\int\limits_{0}^{2} |f(x)|\mathrm{d}x$.

D. $S = 2\left|\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ và trục hoành

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{-2}^{2} |f(x)|\mathrm{d}x \quad (1) \\ &= 2\int_0^2 |f(x)|\mathrm{d}x \quad (2)\ (\text{do } f(x) \text{ là hàm số chẵn}) \\ &= 2\int\limits_{0}^{1} |f(x)|\mathrm{d}x + 2\int\limits_{1}^{2} |f(x)|\mathrm{d}x \\ &= 2\left|\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right| + 2\left|\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x\right| \quad (3)\ (\text{do trong các khoảng} (0;1), (1;2) \text{ phương trình } f(x) = 0 \text{ vô nghiệm}). \end{aligned}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra các đáp án A, B, C là đúng, đáp án D là sai.

Máy tính: Bấm máy kiểm tra, ba kết quả đầu bằng nhau nên đáp án là đáp án D.

Chọn đáp án D □

Câu 126. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

A. $-x\cot x + \ln(\sin x) + C$.

B. $x\cot x - \ln|\sin x| + C$.

C. $x\cot x + \ln|\sin x| + C$.

D. $-x\cot x - \ln(\sin x) + C$.

Lời giải.

$F(x) = \displaystyle\int f(x)dx = \int \frac{x}{\sin^2 x}dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{1}{\sin^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x}{\sin^2 x}dx = -x.\cot x + \int \cot x dx = -x.\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = -x.\cot x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} \\ &= -x.\cot x + \ln|\sin x| + C. \end{aligned}$$

Với $x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow \ln|\sin x| = \ln(\sin x)$.

Vậy $F(x) = -x\cot x + \ln(\sin x) + C$

Chọn đáp án A □

Câu 127. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ là

A. $x\cot x - \ln|\sin x| + C$. **B.** $.-x\cot x + \ln(\sin x) + C$.

C. $-x\cot x - \ln(\sin x) + C$. **D.** $x\cot x + \ln|\sin x| + C$.

Lời giải.

$F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\cot x \end{cases}.$

Khi đó: $F(x) = \displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -x.\cot x + \int \cot x\mathrm{d}x = -x.\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = -x.\cot x + \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x} = -x.\cot x + \ln|\sin x| + C.$

Với $x \in (0;\pi)$ suy ra $\sin x > 0$ suy ra $\ln|\sin x| = \ln(\sin x)$.

Vậy $F(x) = -x\cot x + \ln(\sin x) + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 128. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

A. $(x-1)e^x + C$. **B.** $(x-2)e^x + e^x + C$.

C. $(x+1)e^x + C$. **D.** $(x+2)e^{2x} + e^x + C$.

Lời giải.

Chọn C.

Sử dụng phương pháp tọa độ hóa. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Chuẩn hóa $a = 1$ (đơn vị dài). Khi đó $SA = \sqrt{11}$ Đặt $OC = OD = b > 0; OS = c > 0$ ta có:

$SA^2 = SC^2 = SO^2 + OC^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = 11(1)$. Tọa độ các điểm $B(0;-b;0), C(b;0;0), D(0;b;0), S(0;0;c$

Mặt phẳng (SBC) có phương trình $\frac{x}{b} + \frac{y}{-b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow$ vtpt của (SBC) là: $\left(\dfrac{1}{b}; -\dfrac{1}{b}; \dfrac{1}{c}\right)$. Theo giả thiết ta có: $|cos(n_1;n_2)| = \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{|1|}{\sqrt{1}.\sqrt{2}} = \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{c^2}}{\frac{2}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{9}{c^2} = \dfrac{2}{b^2} \Leftrightarrow 9b^2 - 2c^2 = 0$. Kết hợp (1) và (2) ta được: $b^2 = 2$ và $c^2 = 9 \Rightarrow b = \sqrt{2}$ và $c = 3$ (do $b, c > 0$). Vậy $CD = OC\sqrt{2} = 2; SO = 3 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}.2^2.3 = 4$ (đơn vị thể tích). Vậy $V_{S.ABCD} = 4a^3$.

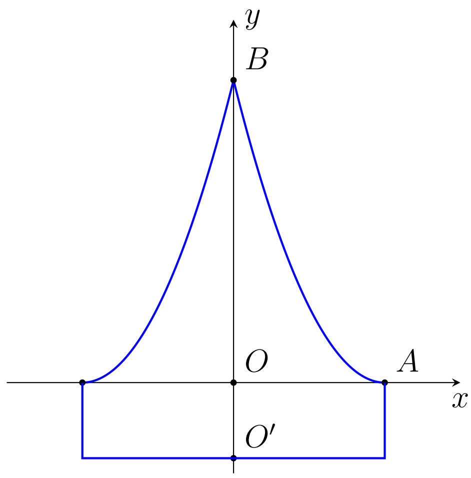
□

Câu 129.

Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ *cm*, $OA = 10$ *cm*, $OB = 20$ *cm*, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng

A. $\dfrac{2750\pi}{3}$ (cm^3). **B.** $\dfrac{2500\pi}{3}$ (cm^3).

C. $\dfrac{2050\pi}{3}$ (cm^3). **D.** $\dfrac{2250\pi}{3}$ (cm^3).



Lời giải.

Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V.

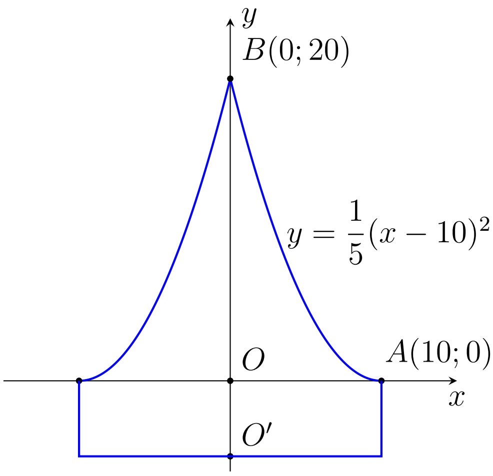
Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1.

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2.

Ta có $V = V_1 + V_2$.

$V_1 = 5.10^2\pi = 500\pi\ (cm^3)$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng (P) : $y = a(x-10)^2$.

Vì (P) qua điểm $B(0;20)$ nên $a = \dfrac{1}{5}$.

Do đó, $(P) : y = \dfrac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x < 10$).

Suy ra $V_2 = \pi \displaystyle\int_0^{20} \left(10 - \sqrt{5y}\right)^2 dy = \pi\left(3000 - \dfrac{8000}{3}\right) = \dfrac{1000}{3}\pi\ (cm^3)$.

Do đó $V = V_1 + V_2 = \dfrac{1000}{3}\pi + 500\pi = \dfrac{2500}{3}\pi\ (cm^3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 130. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số bất kỳ liên tục trên $\mathbb{R}$ và a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0$.

B. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.

C. $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$.

D. $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Lời giải.

Theo tính chất tích phân ta có:

— $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$.

— $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, với $c \in \mathbb{R}$.

— $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Chọn đáp án C □

Câu 131. Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x$.

A. $\dfrac{1}{5}\cos 5x + C$. **B.** $\cos 5x + C$. **C.** $-\cos 5x + C$. **D.** $-\dfrac{1}{5}\cos 5x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \sin 5x\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \sin 5x\mathrm{d}(5x) = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 132. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ thỏa mãn $F(2) = 4$. Giá trị $F(-1)$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 2.

Lời giải.

$F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x+2} + C$.

Theo đề bài $F(2) = 4$ nên $2\sqrt{2+2} + C = 4 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(-1) = 2\sqrt{-1+2} = 2$.

Vậy $F(-1) = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 133. Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 4$, biết rằng khi cắt bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 < x < 4)$ thì được thiết diện là nửa hình tròn có bán kính $R = x\sqrt{4-x}$.

A. $V = \dfrac{64}{3}$. **B.** $V = \dfrac{32}{3}$. **C.** $V = \dfrac{64\pi}{3}$. **D.** $V = \dfrac{32\pi}{3}$.

Lời giải.

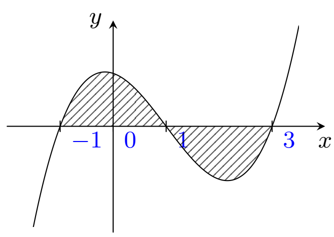
Ta có diện tích thiết diện là $S(x) = \dfrac{1}{2}\pi R^2 = \dfrac{1}{2}\pi x^2(4-x) = \dfrac{1}{2}\pi\left(4x^2 - x^3\right)$.

Thể tích của vật thể cần tìm là: $V = \displaystyle\int\limits_0^4 S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi\int\limits_0^4 \left(4x^2 - x^3\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32\pi}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 134.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - \dfrac{1}{3}x + 1$ và trục hoành như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A. $S = \displaystyle\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = 2\displaystyle\int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S = 2\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \displaystyle\int\limits_{-1}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành:

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Từ hình vẽ ta thấy $f(x) > 0, \forall x \in (-1;1)$ và $f(x) > 0, \forall x \in (1;3)$.

Do đó $S = \displaystyle\int\limits_{-1}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra các phương án A, C, D đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 135. Cho Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(x) - x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B**. 2. **C**. 0. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = x_0 > 1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $g(x) = f(x) - x$ có một điểm cực trị .

Chọn đáp án D □

Câu 136. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = \log_2(f(2x))$ đồng biến trên khoảng

A. $(1; 2)$. **B**. $(-\infty; -1)$. **C**. $(-1; 0)$. **D**. $(-1; 1)$.

Lời giải.

Đặt $g(x) = \log_2(f(2x))$, ta có $g'(x) = \dfrac{2f'(x)}{f(2x)\ln 2}$.

Theo giả thiết ta có $f(2x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(2x) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq 2x \leq 1 \\ 2x \geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ x \geq 1 \end{array}\right.$$

và có dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm, suy ra hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ và $(1; +\infty)$. Vậy hàm số đồng biến trên $(1; 2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 137. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m sao cho tồn tại hai số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn đồng thời các phương trình $|z - 1| = |z - i|$ và $|z + 2m| = m + 1$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có $|z + 2m| = m + 1 \geq 0$.

TH1: $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow z = 2$ (loại) vì không thỏa mãn phương trình $|z - 1| = |z - i|$

TH2: $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$ (1).

Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} |z-1| = |z-i| \\ |z+2m| = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |(x-1)+yi| = |x+(y-1)i| \\ |(x+2m)+yi| = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \\ (x+2m)^2 + y^2 = (m+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ (x+2m)^2 = (m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 + 4mx + 3m^2 - 2m - 1 = 0 (*) \end{cases}.$$

Để tồn tại hai số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn thỏa mãn yêu cầu đề bài thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - 2(3m^2 - 2m - 1) = 2(-m^2 + 2m + 1) > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < m < 1 + \sqrt{2}$ (2)

Từ (1), (2) và $m \in \mathbb{Z}$ ta nhận được $S = \{0; 1; 2\}$.

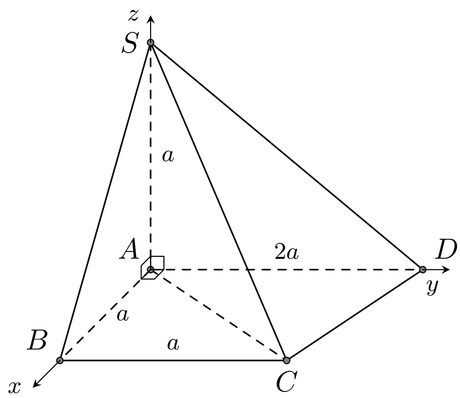
Vậy tổng các phần tử của S là $0 + 1 + 2 = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 138. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD.

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho

$A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $C(a; a; 0)$, $D(0; 2a; 0)$ và $S(0; 0; a)$.

Khi đó ta có

$\overrightarrow{AC} = (a; a; 0)$, $\overrightarrow{SD} = (0; 2a; -a)$, $\overrightarrow{SA} = (0; 0; -a)$,

$[\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{SD}] = (-a; a; 2a)$ và

$[\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{SD}] \cdot \overrightarrow{SA} = -a \cdot 0 + a \cdot 0 + 2a \cdot (-a) = -2a^2$.

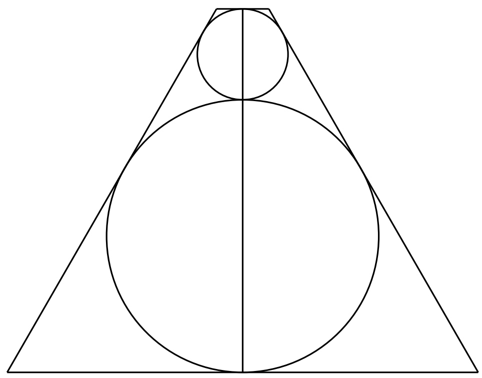
Vậy ta có

$$\mathrm{d}(AC, SD) = \frac{|[\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{SD}] \cdot \overrightarrow{SA}|}{|[\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{SD}]|} = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + a^2 + 4a^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

Chọn đáp án C □

Câu 139.

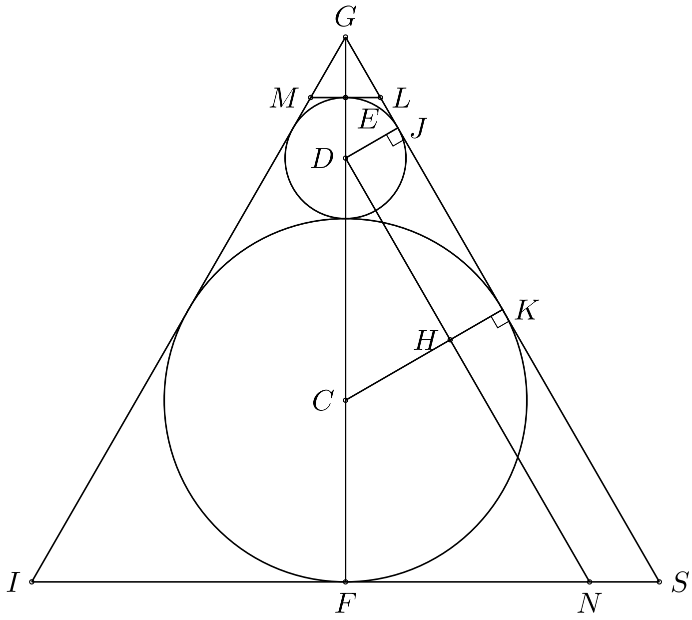
Người ta sản xuất một vật lưu niệm (N) bằng thủy tinh trong suốt có dạng khối tròn xoay mà thiết diện qua trục của nó là một hình thang cân (xem hình vẽ). Bên trong (N) có hai khối cầu ngũ sắc với bán kính lần lượt là $R = 3$ cm, $r = 1$ cm tiếp xúc với nhau và cùng tiếp xúc với mặt xung quanh của (N), đồng thời hai khối cầu lần lượt tiếp xúc với hai mặt đáy của (N). Tính thể V tích vật lưu niệm đó



A. $V = \dfrac{485\pi}{6}$ (cm^3). **B.** $V = 81\pi$ (cm^3).

C. $V = 72\pi$ (cm^3). **D.** $V = \dfrac{728\pi}{9}$ (cm^3).

Lời giải.



Gọi tâm của hai đường tròn trong (N) là C và D. Ta có GS là tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại K và J. Khi đó $DJ \perp GS$, $CK \perp GS$.

Kẻ $DN \parallel GS$ $(N \in IS)$, khi đó $DHKJ$ là hình chữ nhật nên $HK = DJ = 1$ cm, do đó ta có $CH = 2$ cm.

Ta có tam giác DHC đồng dạng với tam giác GJD nên $\dfrac{DJ}{CH} = \dfrac{GD}{CD} \Rightarrow DG = \dfrac{DJ \cdot CD}{CH} = 2$ cm, từ đó suy ra $GF = 9$ cm.

Ta lại có tam giác DHC đồng dạng với tam giác GFS nên $\dfrac{DS}{DC} = \dfrac{GF}{DH} \Rightarrow GS = \dfrac{DC \cdot GF}{DH} = \dfrac{DC \cdot GF}{\sqrt{DC^2 - CH^2}} = 6\sqrt{3}$ cm, từ đó suy ra $FS = \sqrt{GS^2 - GF^2} = 3\sqrt{3}$ cm.

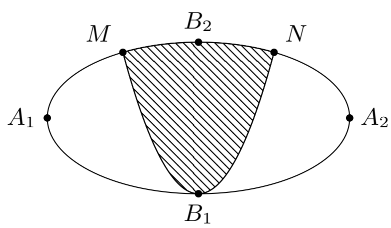
Vì tam giác GEL đồng dạng với tam giác GFS nên $\dfrac{EL}{FS} = \dfrac{GE}{GF} \Rightarrow EL = \dfrac{GE \cdot FS}{GF} = \dfrac{3\sqrt{3}}{9} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ cm.

Vì (N) là khối nón cụt nên $V_{(N)} = \dfrac{1}{3}(EL^2 + FS^2 + EL \cdot FS) \cdot EF = \dfrac{728\pi}{9}$.

Chọn đáp án D □

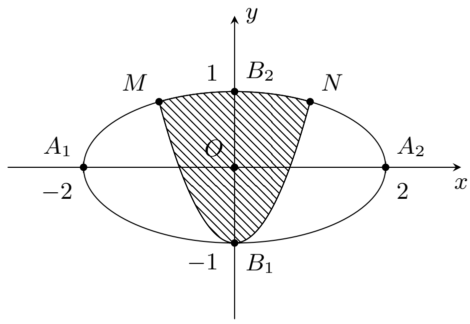
Câu 140.

Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Người ta chia elip bởi Parabol có đỉnh B_1, trục đối xứng B_1B_2 và đi qua các điểm M, N. Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/m^2 và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/m^2. Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết rằng $A_1A_2 = 4$m, $B_1B_2 = 2$m, $MN = 2$m.



A. 2.431.000 đồng. **B**. 2.057.000 đồng. **C**. 2.760.000 đồng. **D**. 1.664.000 đồng.

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của A_1A_2.
Tọa độ các đỉnh $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$, $B_1(0;-1)$, $B_2(0;1)$.
Phương trình đường Elip (E): $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$.
Ta có $M\left(-1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $N\left(1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\in(E)$.
Parabol (P) có đỉnh $B_1(0;-1)$ và trục đối xứng là Ox nên (P) có phương trình $y=ax^2-1$, $(a>0)$, đi qua M, N.
$\Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1 \Rightarrow (P)$ có phương trình $y=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2-1$.
Diện tích phần tô đậm

$$S_1=2\int\limits_0^1\left[\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2+1\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)+2.$$

Đặt $x=2\sin t$, $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$.

$$\Rightarrow S_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t-\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)+2=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{4}{3}$$

$$=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{4}{3}=(2t+\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{4}{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{4}{3}.$$

Diện tích hình Elip là $S=\pi ab=2\pi$.
$\Rightarrow$ Diện tích phần còn lại $S_2=S-S_1=\dfrac{5\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}-\dfrac{4}{3}$.
Kinh phí sử dụng là $200000S_1+500000S_2\approx 2341000$ (đồng).
Chọn đáp án A □

Câu 141. Giả sử hàm f có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(1)=1$ và $f(1-x)+x^2f''(x)=2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.
Từ giả thiết $f(1-x)+x^2f''(x)=2x\Rightarrow f(1)=0$.

Suy ra $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2f''(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 2x\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=f''(x)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x\\ v=f'(x).\end{cases}$

Khi đó $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2f''(x)\,\mathrm{d}x=x^2f'(x)\Big|_0^1-2\int\limits_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=1-2I$.

Mà $\displaystyle\int\limits_0^1 2x\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1-\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1-xf(x)\Big|_0^1+\int\limits_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=1+I$.

Suy ra $1-2I=1+I\Rightarrow I=0$.
Chọn đáp án C □

Câu 142. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 \dfrac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x$

A. $I = 1 - \ln 2$. **B.** $I = \dfrac{7}{4}$. **C.** $I = 1 + \ln 2$. **D.** $I = 2\ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I = \int\limits_1^2 \frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= \left.(x - \ln|x|)\right|_1^2 \\ &= (2 - \ln 2) - (1 - \ln 1) \\ &= 1 - \ln 2 \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 143. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$ trên $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$.

A. $\dfrac{1}{2}\ln|2x-1| + C$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln|1-2x| + C$. **C.** $-\dfrac{1}{2}\ln|2x-1| + C$. **D.** $\ln|2x-1| + C$.

Lời giải.

Trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$, ta có $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-2x}\mathrm{d}(1-2x) = -\frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 144. Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{x}{4}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình (D) quanh trục Ox.

A. $\dfrac{15}{16}$. **B.** $\dfrac{15\pi}{8}$. **C.** $\dfrac{21\pi}{16}$. **D.** $\dfrac{21}{16}$.

Lời giải.

Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình (D) quanh trục Ox là

$$V = \pi \cdot \int\limits_1^4 \left(\frac{x}{4}\right)^2 dx = \left.\frac{\pi x^3}{48}\right|_1^4 = \frac{21\pi}{16}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 145. Biết rằng hàm số $F(x) = mx^3 + (3m+n)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$. Tính mn.

A. $mn = 1$. **B.** $mn = 2$. **C.** $mn = 0$. **D.** $mn = 3$.

Lời giải.

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó, $3mx^2 + 2(3m+n)x - 4 = 3x^2 + 10x - 4, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 3 \\ 2(3m+n) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2. \end{cases}$

Vậy $m.n = 2$

Chọn đáp án B □

Câu 146. Tích phân $I = \int\limits_0^1 \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}dx = a - \ln b$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a + b$.

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 \left(1-\frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= x\Big|_0^1 - \ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 \\ &= 1-\ln 2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a+b=3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

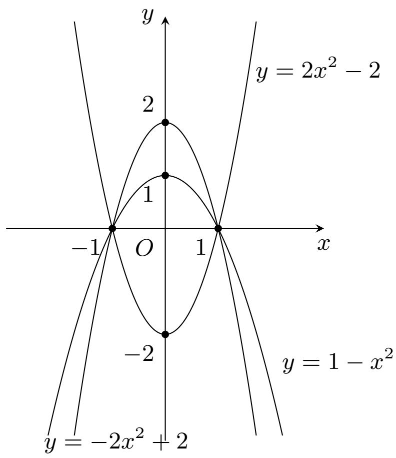
Câu 147. Cho hình phẳng D được giới hạn bởi hai đường $y = 2(x^2-1); y = 1-x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành do D quay quanh trục Ox.

A. $\frac{64\pi}{15}$. **B.** $\frac{32}{15}$. **C.** $\frac{32\pi}{15}$. **D.** $\frac{64}{15}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = 2(x^2-1)$ và $y = 1-x^2$ là

$$2(x^2-1) = 1-x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$



Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = 2(x^2-1)$ qua trục Ox ta được đồ thị hàm số $y = 2(1-x^2)$.

Ta có $2(1-x^2) \geq 1-x^2, \forall x \in [-1;1]$.

Khi đó trên đoạn $[-1;2]$ phần thể tích của hàm số $y = 2(x^2-1)$ chứa cả phần thể tích của hàm số $y = 1-x^2$.

Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi\int\limits_{-1}^{1}\left[2(x^2-1)\right]^2\mathrm{d}x = \frac{64\pi}{15}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 148. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2-3)(x^4-1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. So sánh $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$ ta được

A. $f(2) < f(0) < f(-2)$. **B.** $f(0) < f(-2) < f(2)$.

C. $f(-2) < f(2) < f(0)$. **D.** $f(-2) < f(0) < f(2)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = (x-1)(x^2-3)(x^4-1) = x^7-x^6-3x^5+3x^4-x^3+x^2+3x-3$.

— $I_1 = \int_{-2}^{0} f'(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0}(x^7-x^6-3x^5+3x^4-x^3+x^2+3x-3)\mathrm{d}x = -\frac{464}{105} < 0$.
$\Rightarrow f(0)-f(-2) < 0 \Rightarrow f(0) < f(-2)$.

— $I_2 = \int_0^2 f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 (x^7 - x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 3)\mathrm{d}x = -\dfrac{44}{105} < 0.$
$\Rightarrow f(2) - f(0) < 0 \Rightarrow f(2) < f(0).$

Vậy $f(2) < f(0) < f(-2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 149. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Tính $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \cdots + F(10\pi)$.

A. 55. **B.** 44. **C.** 45. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$.

Suy ra $F(x) = \begin{cases} \tan x + C_0, & x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_1, & x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_2, & x \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right) \\ \dots \\ \tan x + C_9, & x \in \left(\dfrac{17\pi}{2}; \dfrac{19\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_{10}, & x \in \left(\dfrac{19\pi}{2}; \dfrac{21\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\dfrac{\pi}{4} + 0\pi\right) = 1 + C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = -1 \\ F\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi\right) = 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \\ F\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\right) = 1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1 \\ \dots \\ F\left(\dfrac{\pi}{4} + 9\pi\right) = 1 + C_9 = 9 \Rightarrow C_9 = 8 \\ F\left(\dfrac{\pi}{4} + 10\pi\right) = 1 + C_{10} = 10 \Rightarrow C_{10} = 9. \end{cases}$

Vậy $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \cdots + F(10\pi) = \tan 0 - 1 + \tan\pi + \tan 2\pi + 1 + \cdots + \tan 10\pi + 9 = 44$.

Chọn đáp án B □

Câu 150. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$, $f(1) = \cot 1$.

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \left[f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x\right]\mathrm{d}x$

A. -1. **B.** $1 - \ln(\cos 1)$. **C.** 0. **D.** $1 - \cot 1$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^1 \left[f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\tan^2 x\mathrm{d}x + \int_0^1 f'(x)\tan x\mathrm{d}x$.

Mà

— $\displaystyle\int_0^1 f(x)\tan^2 x\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x - 1.$

— $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\tan x\mathrm{d}x = \int_0^1 \tan x\mathrm{d}(f(x)) = f(x)\cdot\tan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = 1 - \int_0^1 \frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

Vậy $I = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 151. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A. $x^3 + \cos x + C$. **B.** $6x + \cos x + C$. **C.** $x^3 - \cos x + C$. **D.** $6x - \cos x + C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int \left(3x^2 + \sin x\right)\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{x^3}{3} - \cos x + C = x^3 - \cos x + C.$

Chọn đáp án C □

Câu 152. Với hàm số $f(x)$ tùy ý liên tục trên $\mathbb{R}, a < b$, diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a, x = b$ được xác định theo công thức

A. $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S=\left|\pi\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

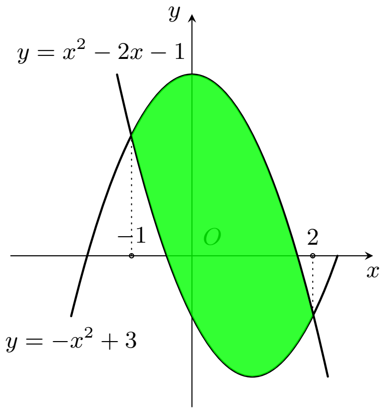
Lời giải.

Công thức tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường thẳng $y=0, x=a, x=b (a<b)$và đồ thị hàm số $y=f(x)$là $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 153.

Diện tích hình phẳng bôi đậm trong hình vẽ dưới đây được xác định theo công thức



A. $\int\limits_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_{-1}^{2}\left(2x^2+2x-4\right)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_{-1}^{2}\left(-2x^2-2x+4\right)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy công thức tính diện tích hình phẳng cần tính là

$$\int\limits_{-1}^{2}\left(-x^2+3-x^2+2x+1\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án C □

Câu 154. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}$ là

A. $\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$. **B.** $2\ln|x+1|+\ln|x+2|+C$.

C. $2\ln|x+1|-\ln|x+2|+C$. **D.** $-\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$.

Lời giải.

Ta có:

$$I=\int f(x)dx=\int\frac{x+3}{x^2+3x+2}dx=\int\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}dx$$

$$=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=2\ln|x+1|-\ln|x+2|+C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 155. Biết rằng tồn tại duy nhất bộ các số nguyên a,b,c sao cho $\int\limits_2^3(4x+2)\ln x\,\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 19. **B.** -19. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải.

Đặt $I=\int\limits_2^3(4x+2)\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = (4x+2)\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ v = 2x^2 + 2x = 2x(x+1) \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= [2x(x+1)\ln x]\,\big|_2^3 - \int\limits_2^3 \frac{2x(x+1)}{x}\,\mathrm{d}x \\ I &= 24\ln 3 - 12\ln 2 - 2\int\limits_2^3 (x+1)dx \\ I &= 24\ln 3 - 12\ln 2 - 2\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\big|_2^3 \\ I &= 24\ln 3 - 12\ln 2 - 2\left(\frac{15}{2} - 4\right) \\ I &= 24\ln 3 - 12\ln 2 - 7 = a + b\ln 2 + c\ln 3. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = -12 \Rightarrow a+b+c = -7-12+24 = 5\,. \\ c = 24 \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 156. Cho hàm số $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}, f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $4 < f(3) < 6$. **B.** $f(3) < 2$. **C.** $2 < f(3) < 4$. **D.** $f(3) > 6$.

Lời giải.

Phương pháp:

+) Từ giả thiết suy ra $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

+) Sử dụng phương pháp nguyên hàm 2 vế.

Cách giải:

Theo bài ra ta có: $f(x) = \sqrt{x+1}f'(x)$ (*)

Do $f(x) > 0 \forall x \in R$ nên từ (*) ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được:

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

$\Leftrightarrow \ln|f(x)|\,dx = 2\sqrt{x+1} + C \Leftrightarrow \ln f(x) = 2\sqrt{x+1} + C \Leftrightarrow f(x) = e^{2\sqrt{x+1}+C}$.

Ta có $f(0) = 1 \Rightarrow 1 = e^{2+C} \Leftrightarrow 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2$.

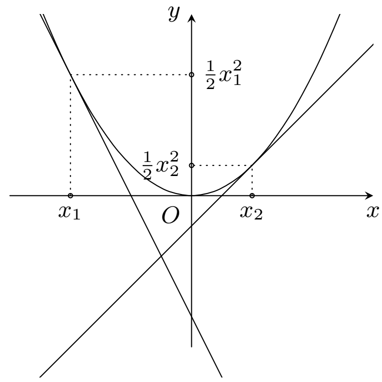
Do đó $f(x) = e^{2\sqrt{x+1}-2} \Rightarrow f(3) = e^2 \approx 7,4 > 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 157. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P). Xét các điểm A, B thuộc (P) sao cho tiếp tuyến tại A và B của (P) vuông góc với nhau, diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB bằng $\dfrac{9}{4}$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A và B. Giá trị của $(x_1 + x_2)^2$ bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** 13. **D.** 11.

Lời giải.



$(P): y = \dfrac{1}{2}x^2$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x$

Giả sử $A\left(x_1; \dfrac{1}{2}x_1^2\right); B\left(x_2; \dfrac{1}{2}x_2^2\right) \in (P)(x_1 \neq x_2)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm A của (P) là $y = x_1(x-x_1)+\dfrac{1}{2}x_1^2 \Leftrightarrow y = x_1x - \dfrac{1}{2}x_1^2 (d_1)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm B của (P) là $y = x_2(x-x_2)+\dfrac{1}{2}x_2^2 \Leftrightarrow y = x_2x - \dfrac{1}{2}x_2^2 (d_2)$.

Do $(d_1)\perp(d_2)$ nên ta có $x_1x_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{-1}{x_1}$.

Phương trình đường thẳng AB:

$$\begin{aligned}
&\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-\frac{1}{2}x_1^2}{\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}x_1^2}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}(x-x_1)\left(x_2^2-x_1^2\right) = \left(y-\frac{1}{2}x_1^2\right)(x_2-x_1)\\
\Leftrightarrow\ & (x-x_1)(x_2+x_1) = 2y - x_1^2\\
\Leftrightarrow\ & (x_1+x_2)x - 2y - x_1x_2 = 0\\
\Leftrightarrow\ & y = \frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)x - x_1x_2\right] = \frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)x+1\right]
\end{aligned}$$

Do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi AB, (P) là:

$$\begin{aligned}
& S = \frac{1}{2}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left((x_1+x_2)x+1-x^2\right)dx\\
\Leftrightarrow\ & \frac{9}{4} = \frac{1}{2}\left((x_1+x_2)\frac{x^2}{2}+x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x_1}^{x_2}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{9}{4} = \frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)\left(\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}\right)+(x_2-x_1)-\frac{x_2^3-x_1^3}{3}\right]\\
\Leftrightarrow\ & \frac{9}{4} = \frac{1}{2}(x_1+x_2)\left(x_2^2-x_1^2\right)+(x_2-x_1)-\frac{x_2^3-x_1^3}{3}\\
\Leftrightarrow\ & 27 = 3\left(x_1x_2^2-x_1^3+x_2^3-x_1^2x_2\right)+6(x_2-x_1)-2x_2^3+2x_1^3\\
\Leftrightarrow\ & 27 = 3x_1x_2^2-3x_1x_2^2+x_2^3-x_1^3+6(x_2-x_1)\\
\Leftrightarrow\ & 27 = -3(x_2-x_1)+(x_2-x_1)\left(x_1^2+x_2^2-1\right)+6(x_2-x_1)\\
\Leftrightarrow\ & 27 = 3(x_2-x_1)+(x_2-x_1)\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\\
\Leftrightarrow\ & 27 = (x_2-x_1)\left(x_1^2+x_2^2+2\right)\\
\Leftrightarrow\ & 27 = (x_2-x_1)\left(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\right)\\
\Leftrightarrow\ & 27 = (x_2-x_1)(x_2-x_1)^2 = (x_2-x_1)^3\\
\Leftrightarrow\ & x_2 - x_1 = 3
\end{aligned}$$

Thay $x_2 = \dfrac{-1}{x_1}$ ta có:

$$\frac{-1}{x_1} - x_1 = 3$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ -1-x_1^2-3x_1=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x_2=\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}\\ x_1=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x_2=\dfrac{-2}{-3+\sqrt{5}}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\ (x_1+x_2)^2=5.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 158. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+1$ là

A. $F(x)=2x^2+x$. **B.** $F(x)=2$.

C. $F(x)=C$. **D.** $F(x)=x^2+x+C$.

Lời giải.

Ta có

$$F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(2x+1)\,\mathrm{d}x=x^2+x+C.$$

Chọn đáp án D □

Câu 159. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{x^2}\left(x^3-4x\right)$. Hàm số $F\left(x^2+x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
F(x)&=\int e^{x^2}\left(x^3-4x\right)\,\mathrm{d}x &&=\int e^{x^2}\left(x^2-4\right)x\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\cdot\int(x^2-4)\,\mathrm{d}(e^{x^2}) &&=\frac{1}{2}\left[(x^2-4)\cdot e^{x^2}-2\cdot\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{1}{2}\cdot(x^2-5)e^{x^2}+C.
\end{aligned}$$

Đặt $g(x)=F(x^2+x)$.

Suy ra $g(x)=F(x^2+x)=\dfrac{1}{2}\cdot[(x^2+x)^2-5]\cdot e^{(x^2+x)^2}+C$.

$$\Rightarrow g'(x)=(x^2+x)\,(2x+1)e^{\left(x^2+x\right)^2}\left[\left(x^2+x\right)^2-4\right].$$

$g'(x)=x(x+1)(2x+1)\left(x^2+x-2\right)\left(x^2+x+2\right)e^{\left(x^2+x\right)^2}$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm1\\ x=\dfrac{-1}{2}\\ x=-2\end{array}\right..$$

Vậy hàm số $F\left(x^2+x\right)$ có 5 điểm cực trị.

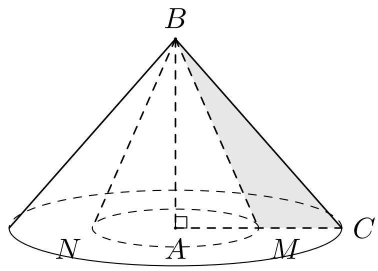
Chọn đáp án B □

Câu 160. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $AB=6, AC=8$ và M là trung điểm của cạnh AC. Khi đó thể tích của khối tròn xoay do tam giác BMC quanh cạnh AB là

A. 86π. **B.** 106π. **C.** 96π. **D.** 98π.

Lời giải.

Khi quay tam giác BMC quanh cạnh AB tạo ra 2 khối tròn xoay có thể tích là: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot AC^2 \cdot AB - \frac{1}{3}\pi \cdot AM^2 \cdot AB = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 6 - \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 96\pi$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 161. Cho hàm số $f(x) > 0$ với $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(3) < 2$. **B.** $2 < f(3) < 4$. **C.** $4 < f(3) < 6$. **D.** $f(3) < f(6)$.

Lời giải.

Do giả thiết $f(x) > 0$ với $x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x)$ suy ra $\sqrt{x+1} > 0$.

Khi đó $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Suy ra $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \quad (*)$.

Mà $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C_1$. Vì $f(x) > 0$ nên $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln f(x) + C_1$.

Mặt khác $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} + C_2$.

Từ $(*)$ suy ra $\ln f(x) = 2\sqrt{x+1} + C \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}+C}$.

Do $f(0) = 1$ nên $\mathrm{e}^{2+C} = 1 \Leftrightarrow 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2$ suy ra $f(x) = \mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}-2}$.

Khi đó $f(3) = \mathrm{e}^{2\sqrt{3+1}-2} = \mathrm{e}^2$ và $f(6) = \mathrm{e}^{2\sqrt{7}-2}$ suy ra $f(3) < f(6)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 162. Cho $\displaystyle\int 2x(3x-2)^6\mathrm{d}x = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với $A, B, C \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $12A + 7B$.

A. $\dfrac{23}{252}$. **B.** $\dfrac{241}{252}$. **C.** $\dfrac{52}{9}$. **D.** $\dfrac{7}{9}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\int 2x(3x-2)^6\mathrm{d}x \\
=\ &\frac{2}{3}\int 3x(3x-2)^6\mathrm{d}x \\
=\ &\frac{2}{3}\int \left[(3x-2)^7 + 2(3x-2)^6\right]\mathrm{d}x \\
=\ &\frac{2}{3}\left[\frac{1}{3\cdot 8}\cdot(3x-2)^8 + \frac{2}{3\cdot 7}\cdot(3x-2)^7\right] + C \\
=\ &\frac{1}{36}\cdot(3x-2)^8 + \frac{4}{63}\cdot(3x-2)^7 + C.
\end{aligned}$$

Suy ra $A = \dfrac{1}{36}$, $B = \dfrac{4}{63}$ nên $12A + 7B = \dfrac{7}{9}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 163. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \dfrac{1}{x}$

A. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}-\ln|x|+C$. **B.** $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{1}{x^2}+C$.
C. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}-\ln x+C$. **D.** $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+\ln|x|+C$.

Lời giải.

$I=\displaystyle\int\left(x^2-3x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\ln|x|+C$

Chú ý khi giải: Dùng dấu giá trị tuyệt đối khi có $\ln|x|$, học sinh có thể chọn nhầm đáp án C.

Chọn đáp án D □

Câu 164. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\displaystyle\int_0^{10}f(x)\,\mathrm{d}x=7$ và $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính $P=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10}f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $P=-4$. **B.** $P=10$. **C.** $P=7$. **D.** $P=4$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int_0^{10}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10}f(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow P=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{10}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x=7-3=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 165. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x-\cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** Vô số điểm. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow F'(x)=f(x)$.

$\Rightarrow F'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x-\cos x}{x^2}=0\ (x\neq 0)\Leftrightarrow g(x)=x-\cos x=0$.

Xét hàm số $g(x)=x-\cos x$ ta có $g'(x)=1+\sin x\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án A □

Câu 166. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=0$. Biết $\displaystyle\int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{9}{2}$ và $\displaystyle\int\limits_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng.

$\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{6}{\pi}$. **B.** $\dfrac{2}{\pi}$. **C.** $\dfrac{4}{\pi}$. **D.** $\dfrac{1}{\pi}$.

Lời giải.

Phương pháp

— Sử dụng phương pháp từng phần đối với tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}$.

— Xét $\displaystyle\int\limits_0^1\left[f(x)+k\sin\frac{\pi x}{2}\right]^2\mathrm{d}x=0$, tìm k, từ đó suy ra $f(x)=-k\sin\dfrac{\pi x}{2}$.

— $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 -k\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x.$

Cách giải

Đặt $\begin{cases} u = \cos\frac{\pi x}{2} \\ dv = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}.$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int\limits_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x &= \cos\frac{\pi x}{2}f(x)\Big|_0^1 + \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= f(1)\cdot\cos\frac{\pi}{2} - f(0)\cdot\cos 0 + \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Xét tích phân

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 \left[f(x) + k\sin\frac{\pi x}{2}\right]^2\mathrm{d}x = 0 &\Leftrightarrow \int\limits_0^1 \left[f^2(x) + 2kf(x)\sin\frac{\pi x}{2} + k^2\sin^2\frac{\pi x}{2}\right]\mathrm{d}x = 0 \\ &\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2k\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2} + k^2\int\limits_0^1 \sin^2\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{9}{2} + 2k\frac{3}{2} + \frac{1}{2}k^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow k = -3.\end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$\int\limits_0^1 \left[f(x) - 3\sin\frac{\pi x}{2}\right]^2\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f(x) - 3\sin\frac{\pi x}{2} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3\sin\frac{\pi x}{2}.$$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 3\int\limits_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}dx = -3\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi}{2}}\Bigg|_0^1 = \dfrac{-6}{\pi}\cos\dfrac{\pi x}{2}\Bigg|_0^1 = -\dfrac{6}{\pi}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \dfrac{6}{\pi}.$

Chọn đáp án A □

Câu 167. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int\limits_0^1 f(x)dx = 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 f(x)dx$.

A. $I = 3$. **B.** $I = 5$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 6$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_1^2 f(x)dx = \int\limits_0^2 f(x)dx - \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^2 f(x)dx - 1 = J - 1, \left(\text{với } J = \int\limits_0^2 f(x)dx\right).$

Mặt khác ta có $1 = \int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 3f(x)dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 f(2x)dx = 1 \Rightarrow \int\limits_0^1 f(2x)dx = 3$

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2. \end{cases}$

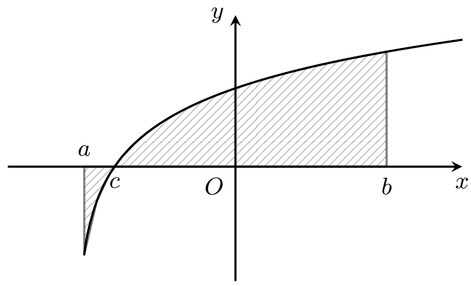
$$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(2x)dx = \int\limits_0^2 f(t)dt = \int\limits_0^2 f(x)dx = 3 \Rightarrow J = 3.$$

Vậy $I = \int\limits_1^2 f(x)dx = 3 - 1 = 2.$

Chọn đáp án C □

Câu 168.

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính theo công thức nào dưới đây?



A. $S = -\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

B. $S = \left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$

C. $S = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

D. $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Lời giải.

Ta có: $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án A □

Câu 169. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox.

A. $V = \frac{16}{15}\pi.$ **B**. $V = \frac{16}{15}.$ **C**. $V = \frac{4}{3}.$ **D**. $V = \frac{4}{3}\pi.$

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Thể tích $V = \pi\int\limits_0^2 (2x - 2^2)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x = \pi\left(4\frac{x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{15}\pi.$

Chọn đáp án A □

Câu 170. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^2 \left(f(x) + 3x^2\right)\,\mathrm{d}x = 10$. Tính $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. -18. **B**. -2. **C**. 18. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có: $\int\limits_0^2 \left(f(x)+3x^2\right)\,\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 10 - \int\limits_0^2 3x^2\,\mathrm{d}x = 10 - x^2\Big|_0^2 = 2.$

Chọn đáp án D □

Câu 171. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(4x^2-1)^{-3}$.

A. $\mathscr{D}=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. **C.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $\mathscr{D}=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $4x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm\frac{1}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 172. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\sin x$ là

A. $F(x)=x^3+\sin x+C$. **B.** $F(x)=x^3-\cos x+C$.

C. $F(x)=3x^3-\sin x+C$. **D.** $F(x)=x^3+\cos x+C$.

Lời giải.

Ta có: $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(3x^2+\sin x\right)\,\mathrm{d}x = x^3-\cos x+C$.

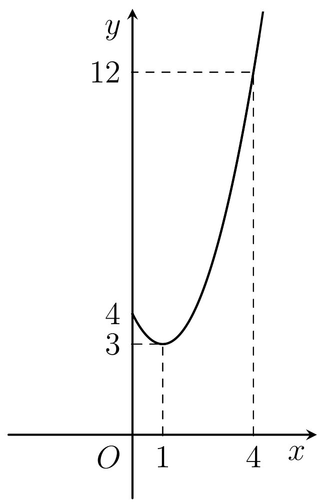
Chọn đáp án B □

Câu 173.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v\,(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t\,(h)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;3)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.

A. $s=\frac{50}{3}\,(km)$. **B.** $s=10\,(km)$.

C. $s=20\,(km)$. **D.** $s=\frac{64}{3}\,(km)$.



Lời giải.

Ta có $v(t)=at^2+bt+c$ có dạng parabol đỉnh $I(1;3)$, đi qua điểm $A(0;4)$ và $B(4;12)$.

$$\begin{cases}\frac{-b}{2a}=1\\ a+b+c=3\\ v(0)=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{-b}{2a}=1\\ a+b+c=3\\ 0+0+c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-2a\\ a+b=-1\\ c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-2a\\ a+(-2a)=-1\\ c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-2\\ a=1\\ c=4.\end{cases}$$

Do đó $v(t)=t^2-2t+4$.

Quãng đường vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát được tính như sau

$$s=\int\limits_0^4 v(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^4\left(t^2-2t+4\right)\,\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}-t^2+4t\right)\Big|_0^4=\left(\frac{4^3}{3}-4^2+4.4\right)-0=\frac{64}{3}\,(\text{km}).$$

Chọn đáp án D □

Câu 174. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và $f(3)=21$, $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=9$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x\cdot$

$f'(3x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 6$. **B.** $I = 12$. **C.** $I = 9$. **D.** $I = 15$.

Lời giải.

Đặt $3x = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{3}$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 3. \end{cases}$

$I = \displaystyle\int_0^3 \frac{t}{3} f'(t) \frac{\mathrm{d}t}{3} = \frac{1}{9} \int_0^3 x f'(x) \mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

Suy ra $I = \dfrac{1}{9}\left(x f(x)\Big|_0^3 - \displaystyle\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x \right) = 6.$

Chọn đáp án A □

Câu 175. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, biết $f'(x) + (2x+1)f(x) = 0$, $f(x) = 0, f'(x) > 0, f(2) = \dfrac{1}{6}$. Tính giá trị của $P = f(1) + f(2) + \ldots + f(2019)$.

A. $P = \dfrac{2020}{2019}$. **B.** $P = \dfrac{2019}{2020}$. **C.** $P = \dfrac{2018}{2019}$. **D.** $P = \dfrac{2021}{2020}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) + (2x+1)f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{-f'(x)}{f(x)} = 2x + 1 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{-f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int (2x+1)\mathrm{d}x.$

Suy ra $\dfrac{1}{f(x)} = x^2 + x + c \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+c}$. Mà $f(2) = \dfrac{1}{6} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x^2+x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.

$P = f(1) + f(2) + \ldots + f(2019) = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \ldots + \dfrac{1}{2019} - \dfrac{1}{2020} = \dfrac{2019}{2020}$.

Chọn đáp án B □

Câu 176. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 2x + 5\cos x + 5$. **B.** $f(x) = 2x + 5\cos x + 3$.

C. $f(x) = 2x - 5\cos x + 10$. **D.** $f(x) = 2x - 5\cos x + 15$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 2 - 5\sin x \Rightarrow f(x) = \int (2 - 5\sin x)\, dx = 2x + 5\cos x + C$.

Mà $f(0) = 10 \Rightarrow C = 5 \Rightarrow f(x) = 2x + 5\cos x + 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 177. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin 2x$.

A. $x^2 - \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. **B.** $x^2 + \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. **C.** $x^2 - 2\cos 2x + C$. **D.** $x^2 + 2\cos 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int 2x + \sin 2x = x^2 - \frac{1}{2}\cos 2x + C.$

Chọn đáp án A □

Câu 178. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{2x+1}\mathrm{d}x$.

A. $2\ln 5$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln 5$. **C.** $\ln 5$. **D.** $4\ln 5$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}(2x+1) = \ln|2x+1|\Big|_0^2 = \ln 5.$

Chọn đáp án C □

Câu 179. Cho $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{3} + b\ln 2 + c\ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $a+b+c$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2tdt = dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 3 \Rightarrow t = 2$.

Ta có $\displaystyle I = \int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{2(t^2-1)t}{4+2t}dt = \int_1^2 \frac{t^3-t}{t+2}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{(t+2)(t^2-2t+3)-6}{t+2}\,\mathrm{d}t$

$\displaystyle = \int_1^2 \left(t^2 - 2t + 3 - \frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 3t - 6\ln t = \frac{7}{3} - 12\ln 2 + 6\ln 3.$

Suy ra $a = 7; b = -12; c = 6 \Rightarrow a+b+c = 7-12+6 = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 180. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\cos 2x$.

A. $\dfrac{x\sin 2x}{2} - \dfrac{\cos 2x}{4} + C$. **B.** $x\sin 2x - \dfrac{\cos 2x}{2} + C$.

C. $x\sin 2x + \dfrac{\cos 2x}{2} + C$. **D.** $\dfrac{x\sin 2x}{2} + \dfrac{\cos 2x}{4} + C$.

Lời giải.

Đặt $u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}\sin 2x$. Suy ra

$\displaystyle I = \int x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 181. Với cách đổi biến $u = \sqrt{1+3\ln x}$ thì tích phân $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+3\ln x}}\,\mathrm{d}x$ trở thành

A. $\displaystyle\frac{2}{3}\int_1^2 (u^2-1)\,\mathrm{d}u$. **B.** $\displaystyle\frac{2}{9}\int_1^2 (u^2-1)\,\mathrm{d}u$. **C.** $\displaystyle 2\int_1^2 (u^2-1)\,\mathrm{d}u$. **D.** $\displaystyle\frac{2}{9}\int_1^2 \frac{u^2-1}{u}\,\mathrm{d}u$.

Lời giải.

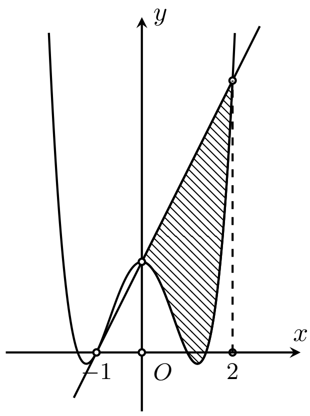
Với $u = \sqrt{1+3\ln x} \Rightarrow u^2 = 1 + 3\ln x \Rightarrow \dfrac{u^2-1}{3} = \ln x \Rightarrow \dfrac{2u}{3}\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Khi đó, $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+3\ln x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{\frac{u^2-1}{3}\cdot\frac{2u}{3}}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{9}\int_1^2 (u^2-1)\,\mathrm{d}u.$

Chọn đáp án B □

Câu 182.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C), biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ có diện tích bằng $\dfrac{28}{5}$ (phần gạch chéo trong hình vẽ). Tính diện tích giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 0$.



A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx$.

Phương trình tiếp tuyến d tại $A(-1;0)$ là $d: y = y'(-1)(x+1) + 0 = (-4a-2b)(x+1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $(-4a-2b)(x+1)=ax^4+bx^2+c$.
Theo giả thiết, $x=0$ và $x=2$ là hai nghiệm của phương trình này, lần lượt thay $x=0$ và $x=2$ vào ta được

$$\begin{cases} -4a-2b=c \\ -12a-6b=16a+4b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b+c=0 & (1) \\ 28a+10b+c=0 & (2) \end{cases}$$

Mặt khác, diện tích của phần gạch chéo là

$$\begin{aligned} \frac{28}{5}=&\int_0^2 \left[(-4a-2b)(x+1)-(ax^4+bx^2+c)\right]\,\mathrm{d}x \\ =&\left[(-4a-2b)\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-\left(\frac{ax^5}{5}+\frac{bx^3}{3}+cx\right)\right]\Big|_0^2 \\ =&(-4a-2b)\cdot 4-\left(\frac{32}{5}a+\frac{8}{3}b+2c\right) \end{aligned}$$

Tương đương với $\dfrac{112}{5}a+\dfrac{32}{3}b+2c=-\dfrac{28}{5}$ (3)
Từ (1), (2) và (3) suy ra $a=1, b=-3, c=2$.
Do đó, $(C): y=x^4-3x^2+2$, $d: y=2x+2$. Suy ra diện tích của hình giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=-1$, $x=0$ là $S=\displaystyle\int_{-1}^{0}\left[(x^4-3x^2+2)-(2x+2)\right]\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 183. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $c\in[a;b]$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo tính chất của tích phân suy ra $\displaystyle\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 184. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\tan^2 2x+\dfrac{1}{2}$.

A. $\displaystyle\int\left(\tan^2 2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=2\tan 2x-2x+C$.

B. $\displaystyle\int\left(\tan^2 2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\tan 2x-\frac{x}{2}+C$.

C. $\displaystyle\int\left(\tan^2 2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\tan 2x-x+C$.

D. $\displaystyle\int\left(\tan^2 2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan 2x-\frac{x}{2}+C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \int\left(\tan^2 2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{1}{\cos^2 2x}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &=\frac{1}{2}\tan 2x-\frac{x}{2}+C. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 185. Cho $a > b > -1$. Tích phân $I = \int\limits_a^b \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $I = (x+1)\ln(x+1)\Big|_a^b - a + b$.

B. $I = (x+1)\ln(x+1)\Big|_a^b - b + a$.

C. $I = \dfrac{1}{x+1}\Big|_a^b$.

D. $I = x\ln(x+1)\Big|_a^b + \int\limits_a^b \dfrac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_a^b \ln(x+1)\,\mathrm{d}(x+1) \\ &= (x+1)\ln(x+1)\Big|_a^b - \int\limits_a^b (x+1)\,\mathrm{d}\left(\ln(x+1)\right) \\ &= (x+1)\ln(x+1)\Big|_a^b - (b-a) \\ &= (x+1)\ln(x+1)\Big|_a^b - b + a. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 186. Tính tổng $T = \dfrac{\mathrm{C}_{2018}^0}{3} - \dfrac{\mathrm{C}_{2018}^1}{4} + \dfrac{\mathrm{C}_{2018}^2}{5} - \dfrac{\mathrm{C}_{2018}^3}{6} + \cdots - \dfrac{\mathrm{C}_{2018}^{2017}}{2020} + \dfrac{\mathrm{C}_{2018}^{2018}}{2021}$.

A. $\dfrac{1}{4121202989}$.

B. $\dfrac{1}{4121202990}$.

C. $\dfrac{1}{4121202992}$.

D. $\dfrac{1}{4121202991}$.

Lời giải.

Ta có $x^2(1-x)^{2018} = x^2 \cdot \sum\limits_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^k x^k(-1)^k = \sum\limits_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^k x^{k+2}(-1)^k$.

Do đó $\int\limits_0^1 x^2(1-x)^{2018}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \sum\limits_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^k x^{k+2}(-1)^k\,\mathrm{d}x$.

Mặt khác $\int\limits_0^1 \sum\limits_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^k x^{k+2}(-1)^k\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^k \dfrac{x^{k+3}}{k+3}(-1)^k\Big|_0^1 = \sum\limits_{k=0}^{2018} \mathrm{C}_{2018}^k \cdot \dfrac{(-1)^k}{k+3} = T$.

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = 1 \Rightarrow t = 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 x^2(1-x)^{2018}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_1^0 t^{2018}(1-t)^2(-\,\mathrm{d}t) \\ &= \int\limits_0^1 t^{2018}(t^2 - 2t + 1)\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{t^{2021}}{2021} - 2\cdot\frac{t^{2020}}{2020} + \frac{t^{2019}}{2019}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{2021} - \frac{2}{2020} + \frac{1}{2019} \\ &= \frac{1}{1010\cdot 2019\cdot 2021} = \frac{1}{4121202990}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 187. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(2017 + \sqrt{2019 - x^2})$ trên tập xác định của nó. Tính $M - m$.

A. $\sqrt{2019} + \sqrt{2017}$. **B.** $2019\sqrt{2019} + 2017\sqrt{2017}$.

C. 4036. **D.** $4036\sqrt{2018}$.

Lời giải.

Tập xác định là $\mathscr{D} = \left[-\sqrt{2019}; \sqrt{2019}\right]$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= 2017 + \sqrt{2019 - x^2} - \frac{x}{\sqrt{2019 - x^2}} \cdot x \\ &= 2017 + \frac{2019 - 2x^2}{\sqrt{2019 - x^2}} \\ &= \frac{2017 \cdot \sqrt{2019 - x^2} + 2019 - 2x^2}{\sqrt{2019 - x^2}}. \end{aligned}$$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 2017 \cdot \sqrt{2019 - x^2} + 2019 - 2x^2 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{2019 - x^2} > 0$. Khi đó $2017t + 2t^2 - 2019 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1 & \text{(thỏa mãn)} \\ t = -\dfrac{2019}{2} & \text{(loại)} \end{array}\right.$.

Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{2019 - x^2} = 1 \Leftrightarrow 2019 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2018}$ (thỏa mãn).

Bảng biến thiên

x	$-\sqrt{2019}$		$-\sqrt{2018}$		$\sqrt{2018}$		$\sqrt{2019}$
y'	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖
y	$-2017\sqrt{2019}$	↘	$-2018\sqrt{2018}$	↗	$2018\sqrt{2018}$	↘	$2017\sqrt{2019}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $M = 2018\sqrt{2018}$, $m = -2018\sqrt{2018} \Rightarrow M - m = 4036\sqrt{2018}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 188. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \cos x$ là

A. $x^2 - \sin x + C$. **B.** $x^2 + \sin x + C$. **C.** $2 + \sin x + C$. **D.** $2 - \sin x + C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int (2x + \cos x)\,\mathrm{d}x = x^2 + \sin x + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 189. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = -x^3 + 3x^2 - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ là

A. $S = \dfrac{5}{2}$. **B.** $S = \dfrac{3}{2}$. **C.** $S = \dfrac{7}{2}$. **D.** $S = 4$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành $-x^3+3x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Diện tích cần tính là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^2 |-x^3+3x^2-2|\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 |-x^3+3x^2-2|\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 |-x^3+3x^2-2|\,\mathrm{d}x \\ &= \left|\left(-\frac{1}{4}x^4+x^3-2x\right)\Big|_0^1\right| + \left|\left(-\frac{1}{4}x^4+x^3-2x\right)\Big|_1^2\right| \\ &= \left|-\frac{5}{4}\right| + \left|\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 190. Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{\pi}{2}$. **B.** $I=\frac{\pi}{2}-1$. **C.** $I=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{\pi}{3}$.

Lời giải.

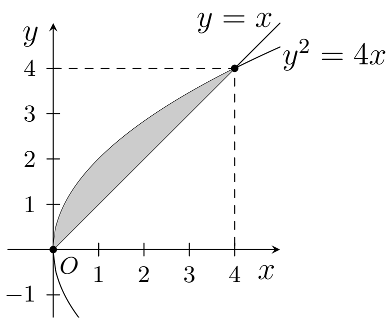
$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}(\sin x) = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1.$

Chọn đáp án B □

Câu 191.

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2=4x$ và $y=x$ (với $0\le x\le 4$) được minh họa bằng hình vẽ bên (phần tô đậm). Cho (H) quay quanh trục Ox. Thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng

A. 11π. **B.** $\frac{32}{3}\pi$. **C.** $\frac{15}{7}\pi$. **D.** 10π.



Lời giải.

$y^2=4x \Rightarrow y=2\sqrt{x}$ (xét $y\ge 0$).

Thể tích khối tròn xoay cần tính là

$$V=\pi\int\limits_0^4 (2\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x - \pi\int\limits_0^4 x^2\,\mathrm{d}x = 2\pi x^2\Big|_0^4 - \frac{\pi}{3}x^3\Big|_0^4 = \frac{32}{3}\pi.$$

Chọn đáp án B □

Câu 192. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục và $a>0$. Giả sử rằng với mọi $x\in[0;a]$, ta có $f(x)>0$ và $f(x)\cdot f(a-x)=1$. Tính $\int\limits_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$ được kết quả bằng

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $2a$. **C.** $a\ln(a+1)$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Lời giải.

$f(x)\cdot f(a-x)=1\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{f(a-x)}$.

$$\begin{aligned} I=\int\limits_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)} &= \int\limits_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+\dfrac{1}{f(a-x)}}=\int\limits_0^a \frac{f(a-x)}{1+f(a-x)}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int\limits_0^a \frac{f(a-x)}{1+f(a-x)}\,\mathrm{d}(a-x)=-\int\limits_a^0 \frac{f(t)}{1+f(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_0^a \frac{f(t)}{1+f(t)}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

$2I=\displaystyle\int\limits_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}+\int\limits_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^a \mathrm{d}x=a$. Vậy $I=\dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 193. Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6;6]$. Biết rằng $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=8$ và $\displaystyle\int\limits_{1}^{3} f(-2x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=11$. **C.** $I=5$. **D.** $I=14$.

Lời giải.

$\displaystyle\int\limits_1^3 f(-2x)\,\mathrm{d}x=3\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int\limits_1^3 f(-2x)\,\mathrm{d}(-2x)=3\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{-6} f(t)\,\mathrm{d}t=3\Leftrightarrow \int\limits_{-6}^{-2} f(t)\,\mathrm{d}t=6.$

$I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x=8+\int\limits_{-2}^{-6} f(-t)\,\mathrm{d}(-t)=8+\int\limits_{-6}^{-2} f(t)\,\mathrm{d}t=14.$

Chọn đáp án D □

Câu 194. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+xf'(x)\geq x^{2018}$ với mọi $x\in[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2019\times 2021}$. **B.** $\dfrac{1}{2018\times 2021}$. **C.** $\dfrac{1}{2018\times 2019}$. **D.** $\dfrac{1}{2021\times 2022}$.

Lời giải.

Đặt $I=\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Vì $x \in [0;1] \Rightarrow x^2 - 1 \le 0$ nên

$$\begin{aligned}
& 3f(x) + xf'(x) \ge x^{2018} \\
\Leftrightarrow\ & 3(x^2-1)f(x) + x(x^2-1)f'(x) \le (x^2-1)x^{2018} \\
\Leftrightarrow\ & 3x^2f(x) + x^3f'(x) - [3f(x) + xf'(x)] \le x^{2020} - x^{2018} \\
\Rightarrow\ & 3\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 x^3\,\mathrm{d}f(x) - \left[3I + \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}f(x)\right] \le \int\limits_0^1 x^{2020}\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 x^{2018}\,\mathrm{d}x \\
\Rightarrow\ & 3\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + x^3 f(x)\Big|_0^1 - 3\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \left[3I + xf(x)\Big|_0^1 - I\right] \le \frac{1}{2021} - \frac{1}{2019} \\
\Rightarrow\ & f(1) - [2I + f(1)] \le \frac{-2}{2019\cdot 2021} \\
\Rightarrow\ & I \ge \frac{1}{2019\cdot 2021}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 195. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x = 2$ là

A. $3 - \ln 2$. **B.** $3 - 2\ln 2$. **C.** $3 + 2\ln 2$. **D.** $3 + \ln 2$.

Lời giải.

Cho $\dfrac{x+1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int\limits_{-1}^{2} \left|\frac{x+1}{x+2}\right| \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2}\left(1 - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = (x - \ln|x+2|)\Big|_{-1}^{2} = 3 - 2\ln 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 196. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\int\limits_0^1 x\left(f'(x) - 2\right)\mathrm{d}x = f(1)$.

Giá trị của $I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = (f'(x) - 2)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) - 2x \end{cases}$. Ta có

$$\begin{aligned}
& f(1) = x\left(f(x) - 2x\right)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \left(f(x) - 2x\right)\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\ & f(1) = f(1) - 2 - \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\ & \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -2.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 197. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.
B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 6\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.
C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.
D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

Lời giải.

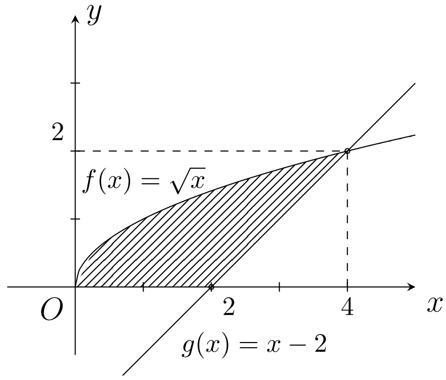
$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 198.

Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) trong hình sau.

A. $S = \frac{8}{3}$. **B.** $S = \frac{11}{3}$. **C.** $S = \frac{10}{3}$. **D.** $S = \frac{7}{3}$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, ta có

$$S = \int\limits_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^4 \left(\sqrt{x} - x + 2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_2^4 = \frac{10}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 199. Nguyên hàm $\int \frac{1 + \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ $(x > 0)$ bằng

A. $x + \ln^2 x + C$. **B.** $\ln^2 x + \ln x + C$. **C.** $\frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x + C$. **D.** $x + \frac{1}{2}\ln^2 x + C$.

Lời giải.

Đặt $u = 1 + \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Do đó

$$\int \frac{1 + \ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(1 + \ln x)^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 200. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y = 8x$, $y = x$ và đồ thị hàm số $y = x^3$ là phân số tối giản. Khi đó $a + b$ bằng

A. 66. **B.** 33. **C.** 67. **D.** 62.

Lời giải.

— Ta có $8x = x \Leftrightarrow x = 0$.

— $8x = x^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

— $x^3 = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^1 |8x - x|\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^{2\sqrt{2}} \left|8x - x^3\right|\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 (8x - x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^{2\sqrt{2}} \left(8x - x^3\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{7}{2}x^2\right|_0^1 + \left.\left(4x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\right|_1^{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{63}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 63$ và $b = 4$ nên $a + b = 67$.

Chọn đáp án C □

Câu 201. Họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \dfrac{1}{x}$ là

A. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + \ln x + C$. **B.** $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$.

C. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{2}x^2 + \ln x + C$. **D.** $F(x) = 2x - 3 - \dfrac{1}{x} + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \displaystyle\int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 202. Cho $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -2$ và $\displaystyle\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \displaystyle\int\limits_a^b [2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -13$. **B.** $I = 13$. **C.** $I = -5$. **D.** $I = 5$.

Lời giải.

$I = \displaystyle\int\limits_a^b [2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot(-2) - 3\cdot 3 = -13$.

Chọn đáp án A □

Câu 203. Cho biết $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2018$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{f(|x|)\,\mathrm{d}x}{1 + 2018^x}$.

A. $I = \mathrm{e}^{2018}$. **B.** $I = 2018$. **C.** $I = 1009$. **D.** $I = 2019$.

Lời giải.

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = -1; x = -1 \Rightarrow t = 1$. Ta có

$$I = \int\limits_{-1}^1 \frac{f(|x|)\,\mathrm{d}x}{1 + 2018^x} = -\int\limits_1^{-1} \frac{f(|-t|)\,\mathrm{d}t}{1 + 2018^{-t}} = \int\limits_{-1}^1 \frac{2018^t \cdot f(|t|)\,\mathrm{d}t}{1 + 2018^t} = \int\limits_{-1}^1 \frac{2018^x \cdot f(|x|)\,\mathrm{d}x}{1 + 2018^x}.$$

Khi đó $2I = \displaystyle\int\limits_{-1}^1 f(|x|)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 f(|x|)\,\mathrm{d}x \Rightarrow I = \int\limits_0^1 f(|x|)\,\mathrm{d}x$.

Vì hàm $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn trên $[-1; 1]$, nên $I = \displaystyle\int\limits_0^1 f(|x|)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2018$.

Chọn đáp án B □

Câu 204. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^3}, (x \neq 0)$.

A. $F(x) = x - 3\ln|x| - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + C$.

B. $F(x) = x - 3\ln|x| + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + C$.

C. $F(x) = x + 3\ln|x| - \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + C$.

D. $F(x) = x - 3\ln|x| + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + C$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$, do đó $F(x) = x + 3\ln|x| - \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 205. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 25 m. **B.** $\dfrac{44}{5}$ m. **C.** $\dfrac{25}{2}$ m. **D.** $\dfrac{45}{4}$ m.

Lời giải.

Khi $v = 0$ thì $t = 5$, khi đó quãng đường ô tô đi được đến khi dừng hẳn là

$$S = \int_0^5 (10 - 2t)\,\mathrm{d}t = 25 \quad (\mathrm{m}).$$

Chọn đáp án A □

Câu 206. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x = y^2$ và đường thẳng $x = a$ với $a > 0$. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của vật thể trong xoay được sinh ra khi quay hình (H) quanh trục hoành và trục tung. Kí hiệu ΔV là giá trị lớn nhất của $V_1 - \dfrac{V_2}{8}$ đạt được khi $a = a_0 > 0$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $5\Delta V = 2\pi a_0$. **B.** $5\Delta V = 4\pi a_0$. **C.** $4\Delta V = 5\pi a_0$. **D.** $2\Delta V = 5\pi a_0$.

Lời giải.

Ta có $V_1 = \pi \displaystyle\int_0^a x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi a^2}{2}$; $V_2 = 2\pi \displaystyle\int_0^{\sqrt{a}} (a^2 - y^4)\,\mathrm{d}y = \dfrac{8\pi a^2\sqrt{a}}{5}$; $V_1 - \dfrac{V_2}{8} = \dfrac{\pi}{10} a^2(5 - 2\sqrt{a})$.

Do đó $\Delta V \leq \dfrac{\pi}{20}\left(\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a} + 10 - 4\sqrt{a}}{5}\right)^5 = \dfrac{32\pi}{20} = \dfrac{8\pi}{5}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = a_0 = 4 \Rightarrow 5\Delta V = 2\pi a_0$.

Chọn đáp án A □

Câu 207. Tính diện tích của S của hình phẳng giới hạn bởi elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, với $a, b > 0$.

A. $S = \pi\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a}\right)^2$. **B.** $S = \pi(a+b)^2$. **C.** $S = \pi ab$. **D.** $S = \dfrac{\pi a^2 b^2}{a+b}$.

Lời giải.

$$S = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \pi ab.$$

Chọn đáp án C □

Câu 208. Giả sử f là hàm số liên tục trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ với $f\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$, thỏa mãn hai điều kiện

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x^2 f(x)}{(x\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{4-\pi}{4+\pi}$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x f'(x)}{\cos x(x\sin x+\cos x)}\,\mathrm{d}x = 0$. Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{f(x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=\dfrac{\pi}{4-\pi}$. **C.** $I=\dfrac{4}{4+\pi}$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{4+\pi}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{4-\pi}{4+\pi} &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 f(x)}{(x\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x f(x)}{\cos x}\cdot\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x f(x)}{\cos x}\,\mathrm{d}\left(\frac{-1}{x\sin x+\cos x}\right)\\ &= -\frac{x f(x)}{\cos x}\cdot\frac{1}{x\sin x+\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x f'(x)}{\cos x(x\sin x+\cos x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{-2\pi}{4+\pi}+I\\ \Rightarrow\ & I = \frac{4-\pi}{4+\pi}+\frac{2\pi}{4+\pi}=1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 209. Một xe buýt bắt đầu đi từ một nhà chờ xe buýt A với vận tốc $v(t)=10+3t^2$ (m/s) (khi bắt đầu chuyển động từ A thì $t=0$) đến nhà chờ xe buýt B cách đó 175 m. Hỏi thời gian xe đi từ A đến B là bao nhiêu giây?

A. 7 . **B.** 8 . **C.** 9 . **D.** 5 .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^b v(t)\,\mathrm{d}t = 175\\ \Leftrightarrow\ &\int\limits_0^b (10+3t^2)\,\mathrm{d}t = 175\\ \Leftrightarrow\ &(10t+t^3)\Big|_0^b = 175\\ \Leftrightarrow\ &10b+b^3=175\\ \Leftrightarrow\ &b=5.\end{aligned}$$

Vậy xe đi từ A đến B mất 5 giây.

Chọn đáp án D □

Câu 210. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ và thỏa mãn $f(2)=0$, $\int\limits_1^2 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{5}{12}+\ln\dfrac{2}{3}$ và $\int\limits_1^2 \dfrac{f(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{5}{12}+\ln\dfrac{3}{2}$. Tính tích phân $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{3}{4}+2\ln\dfrac{2}{3}$. **B.** $\ln\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{4}-2\ln\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{4}+2\ln\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}f(x)\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{x-1}{x+1}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{x-1}{x+1}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vậy

$$-\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{x-1}{x+1}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\ -\int\limits_1^2 \frac{x-1}{x+1}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{6}+2\ln\frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Mà

$$\int\limits_1^2 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{5}{3}-4\ln\frac{3}{2} \Rightarrow \int\limits_1^2 \left[\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right]\mathrm{d}x = \frac{5}{12}-\ln\frac{3}{2}. \qquad (2)$$

Mặt khác $\int\limits_1^2 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x = \frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3} = \frac{5}{12}-\ln\frac{3}{2}.$ (3)

Từ (1), (2) và 3, ta được

$$\int\limits_1^2 \left[\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right]\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 \frac{x-1}{x+1}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \int\limits_1^2 \left[f'(x)-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]^2 \mathrm{d}x = 0$$

$$\Rightarrow\ f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

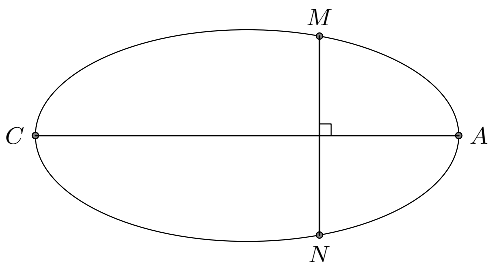
$$\Rightarrow\ f(x) = \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \ln|x+1| + C.$$

Mà $f(2)=0 \Rightarrow c = \ln 3 - 1$.

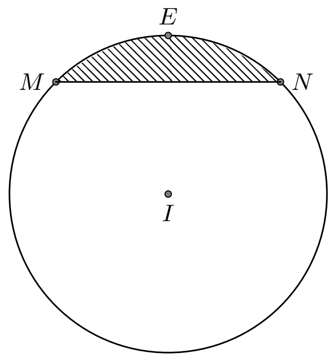
Vậy $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}-\ln\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 211. Sân vận động Sports Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức ở Singapore năm 2015. Nền sân là một Elip (E) có trục lớn dài 150 m, trục bé dài 90 m (Hình 3). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt Elip (E) ở M, N (Hình a) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong Hình b) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí cho sân vận động thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu làm mái không đáng kể. Hỏi thể tích đó xấp xỉ bao nhiêu?



Hình a



Hình b

A. 57793 m^3 . **B**. 115586 m^3 . **C**. 32162 m^3 . **D**. 101793 m^3 .

Lời giải.

Ta có $2a = 150 \Rightarrow a = 75$, $2b = 90 \Rightarrow b = 45$. Phương trình Elip có dạng $\dfrac{x^2}{75^2} + \dfrac{y^2}{45^2} = 1$.

Gọi $M(x, y) \in (E) \Rightarrow N(x, -y) \in (E) \Rightarrow MN = 2|y| = 2 \cdot \dfrac{45}{75}\sqrt{75^2 - x^2} = \dfrac{6}{5}\sqrt{75^2 - x^2}$.

Diện tích phần gạch sọc được tính bằng

$$\frac{1}{4}S_{(I,IM)} - S_{\triangle IMN} = \frac{1}{4}\pi IM^2 - \frac{1}{2}IM^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) IM^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{MN}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Khi đó, thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, được tính bằng

$$\int\limits_{-75}^{75}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{MN}{\sqrt{2}}\right)^2 \mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\int\limits_{-75}^{75}\frac{18}{25}(75^2 - x^2)\,\mathrm{d}x \approx 115586 \text{ m}^3.$$

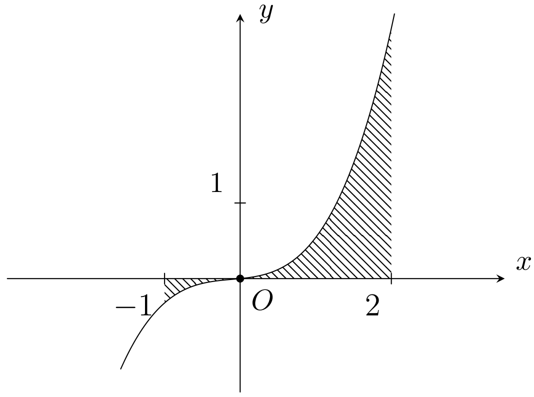
Chọn đáp án B □

Câu 212.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a = \displaystyle\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x, b = \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = b - a$. **B**. $S = b + a$.

C. $S = -b + a$. **D**. $S = -b - a$.



Lời giải.

Ta có diện tích hình phẳng

$$S = \int\limits_{-1}^{2}|f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -a + b.$$

Chọn đáp án A □

Câu 213. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x + 2$

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3x^2 + 2x + C$. **B**. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3x^2 - 2x + C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

Lời giải.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 214. Biết $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^a + 1}{b}$ với $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}$. Khi đó $\sin a + \cos 2a + b$ bằng

A. 2 . **B.** 4 . **C.** 1 . **D.** 0 .

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \sin x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x \end{cases}$. Ta được

$$I = \mathrm{e}^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x$$

Xét $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x$, đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x \end{cases}$, ta có

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + I.$$

Do đó, $I = \mathrm{e}^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - I \Leftrightarrow 2I = \mathrm{e}^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1$.

Vậy $a = \dfrac{\pi}{2}$, $b = 0$ suy ra $\sin a + \cos 2a + b = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 215. Cho $\int\limits_1^4 \dfrac{\sqrt{25 - x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = a + b \cdot \sqrt{6} + c \cdot \ln\left(\dfrac{5\sqrt{6} + 12}{5\sqrt{6} - 12}\right) + d \cdot \ln 2$ với a, b, c, d là các số hữu tỉ. Tính tổng $a + b + c + d$.

A. $-\dfrac{3}{20}$. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** $-\dfrac{3}{24}$. **D.** $-\dfrac{3}{25}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^4 \dfrac{\sqrt{25 - x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 \dfrac{x\sqrt{25 - x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = I$. Đặt $t = \sqrt{25 - x^2} \Rightarrow \begin{cases} -t\,\mathrm{d}t = x\mathrm{d}x \\ x^2 = 25 - t^2 \end{cases}$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 2\sqrt{6}$, $x = 4 \Rightarrow t = 3$. Khi đó,

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{2\sqrt{6}}^{3} \frac{-t^2\,\mathrm{d}t}{25-t^2} \\ &= \int\limits_{2\sqrt{6}}^{3} \left[1 - \frac{25}{25-t^2}\right] \mathrm{d}t \\ &= \int\limits_{2\sqrt{6}}^{3} \left[1 - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{5-t} + \frac{1}{5+t}\right)\right] \mathrm{d}t \\ &= t + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{5-t}{5+t}\right|\Bigg|_{2\sqrt{6}}^{3} \\ &= 3 + \frac{5}{2}\ln\frac{1}{4} - 2\sqrt{6} - \frac{5}{2}\ln\frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}} \\ &= 3 - 5\ln 2 - 2\sqrt{6} + \frac{5}{2}\ln\frac{5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12}. \end{aligned}$$

Vậy $a = 3$, $b = -2$, $c = \dfrac{5}{2}$, $d = -5$ suy ra $a + b + c + d = -\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 216. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{\pi}{2} - 1$. **B.** $\dfrac{\pi}{2} + 1$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \sin x. \end{cases}$

Ta có $I = (x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = (x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2} - 1.$

Chọn đáp án A □

Câu 217. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \mathrm{e}^x$ và các đường thẳng $y = 0$; $x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $V = \displaystyle\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. **B.** $V = \pi\displaystyle\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$. **C.** $V = \displaystyle\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi\displaystyle\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích cần tính là $V = \pi\displaystyle\int\limits_0^1 (\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x = \pi\displaystyle\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án D □

Câu 218. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x\sqrt{2x+3} + C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2x+3} + C$.

Lời giải.

Xét $I = \int \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{2x+3}$, suy ra $t^2 = 2x+3$. Khi đó $t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Ta có

$$I = \int \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C.$$

Chọn đáp án B □

Câu 219. Cho $\int\limits_0^1 f(2x+1)\,\mathrm{d}x = 12$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right)\sin 2x\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 26. **B.** 22. **C.** 27. **D.** 15.

Lời giải.

— Với $I_1 = \int\limits_0^1 f(2x+1)\,\mathrm{d}x = 12$.

Đặt $t = 2x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2}$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = 3$.

Do đó, $I_1 = \int\limits_1^3 f(t)\dfrac{\mathrm{d}t}{2} = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 24$.

— Với $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right)\sin 2x\,\mathrm{d}x = 3$.

Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}x = \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Do đó, $I_2 = \int\limits_0^1 f\,(t)\;\mathrm{d}t \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$.

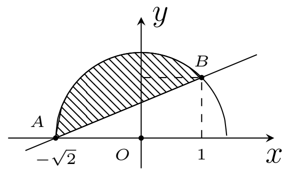
Vậy $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3 + 24 = 27$.

Chọn đáp án C □

Câu 220.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn $y = \sqrt{2-x^2}$, đường thẳng AB biết $A(-\sqrt{2};0)$, $B(1;1)$ (phần tô đậm như hình vẽ).

A. $\dfrac{\pi+\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{3\pi+2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi-2\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{3\pi-2\sqrt{2}}{4}$.



Lời giải.

Phương trình đường thẳng d: $\dfrac{x+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{y}{1} \Rightarrow d\colon y = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{-\sqrt{2}}^{1} \left[\sqrt{2-x^2} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})\right] \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-\sqrt{2}}^{1} \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{1+\sqrt{2}}\left(\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}x\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{1} \\ &= I - \frac{1+\sqrt{2}}{2}.\text{ Trong đó } I = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{1} \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tính $I = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{1} \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = \sqrt{2}\sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \mathrm{d}x = \sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = -\sqrt{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$, $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Do đó $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} 2|\cos t| \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

Do đó, $S = \frac{3\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 221. Cho $I = \int\limits_{1}^{2} \frac{x+\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b}\ln 2 - \frac{1}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{a+b}{c}$.

A. $S = \frac{2}{3}$. **B.** $S = \frac{5}{6}$. **C.** $S = \frac{1}{2}$. **D.** $S = \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{1}^{2} \frac{x+\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2} \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2$.

Trong đó $I_1 = \int\limits_{1}^{2} \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$, $I_2 = \int\limits_{1}^{2} \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

— Tính

$$\begin{aligned} I_1 = \int\limits_{1}^{2} \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{1}^{2} \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right] \mathrm{d}x = \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right]\Big|_{1}^{2} \\ &= \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

— Tính $I_2 = \int\limits_{1}^{2} \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = \frac{1}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = -\frac{1}{x+1}. \end{cases}$

Suy ra

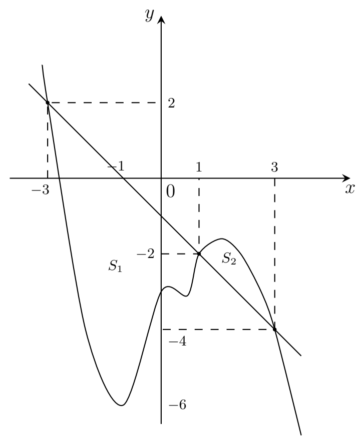
$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{\ln x}{x+1}\Big|_1^2 + \int\limits_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln 2}{3} + \ln\frac{x}{x+1}\Big|_1^2 \\ &= -\frac{\ln 2}{3} + \ln\frac{2}{3} + \ln 2 = \frac{2\ln 2}{3} - \ln 3 + \ln 2. \end{aligned}$$

Do đó $I = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{6}$. Suy ra $a = 2$, $b = 3$ và $c = 6$. Vậy $S = \frac{5}{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 222.
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = -x-1$ lần lượt là M, m. Tính tích phân $\int\limits_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $6 + m - M$. **B.** $6 - m - M$. **C.** $M - m + 6$. **D.** $m - M - 6$.



Lời giải.
Tính diện tích S_1. Ta có

$$S_1 = \int\limits_{-3}^{1} [-x-1-f(x)]\,\mathrm{d}x = M \Leftrightarrow \int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -M - \int\limits_{-3}^{1} (x+1)\,\mathrm{d}x.$$

Tính diện tích S_2. Ta có

$$S_2 = \int\limits_{1}^{3} [f(x)+x+1]\,\mathrm{d}x = m \Leftrightarrow \int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = m - \int\limits_{1}^{3} (x+1)\,\mathrm{d}x.$$

Do đó

$$\int\limits_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = m - M - \int\limits_{-3}^{3} (x+1)\,\mathrm{d}x = m - M - 6.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 223. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$.

A. $\frac{1}{3}\sin 3x + C$. **B.** $-\frac{1}{3}\sin 3x + C$. **C.** $-3\sin 3x + C$. **D.** $-\sin 3x + C$.

Lời giải.
Ta có $\int \cos 3x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin 3x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 224. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Diện tích hình phẳng D được xác định bởi công thức

A. $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích miền D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ là $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 225. Biết $\int\limits_2^3 \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = a\ln 7+b\ln 3+c\ln 2+d$ (với a,b,c,d là các số nguyên). Tính giá trị của biểu thức $T=a+2b^2+3c^3+4d^4$.

A. $T=6$. **B.** $T=7$. **C.** $T=9$. **D.** $T=5$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_2^3 \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\left(1-\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(x-\ln|x^2-x+1|\right)\Big|_2^3=1-\ln 7+\ln 3$

$\Rightarrow a=-1,\ b=1,\ c=0,\ d=1\Rightarrow T=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 226. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=2$ và $f(2)=2018$. Tính $I=\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-2016$. **B.** $I=2018$. **C.** $I=2016$. **D.** $I=1016$.

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x=f(2)-f(1)=2016$.

Chọn đáp án C □

Câu 227. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $3f'(x)+2f^2(x)=0$. Tính $f(1)$ biết rằng $f(0)=1$.

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{4}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{2}{5}$.

Lời giải.

Ta có $3f'(x)+2f^2(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-\dfrac{2}{3}$. Lấy tích phân hai vế ta được

$$\int\limits_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1\frac{2}{3}\mathrm{d}x\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}\Big|_0^1=-\frac{2}{3}x\Big|_0^1\Leftrightarrow\frac{1}{f(1)}-1=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{f(1)}=\frac{5}{3}\Leftrightarrow f(1)=\frac{3}{5}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 228. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{30}$, $\int\limits_0^1(2x-1)f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{30}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{30}$. **B.** $\dfrac{11}{30}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $\dfrac{11}{4}$.

Lời giải.

Ta có $-\dfrac{1}{30}=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x^2-x)=(x^2-x)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x^2-x)f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1(x^2-x)f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{30}$.

Ta tìm m thỏa mãn

$0=\displaystyle\int_0^1\left(f'(x)+m(x^2-x)\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x+2m\int_0^1 f'(x)(x^2-x)\mathrm{d}x+m^2\int_0^1(x^2-x)^2\mathrm{d}x \Rightarrow$ $m=-1$.

Do vậy, $f'(x)-(x^2-x)=0\Rightarrow f'(x)=x^2-x\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+C$.

Mà $f(0)=1\Rightarrow C=1\Rightarrow \displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{11}{12}$.

Chọn đáp án C □

Câu 229. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^{2019\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=4038\sqrt{2}$. **B.** $I=2019\sqrt{2}$. **C.** $I=0$. **D.** $I=2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^{2019\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2019\pi}\sqrt{2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int\limits_0^{2019\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x\\
&= \sqrt{2}\left(\int\limits_0^{\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\pi}^{2\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{2\pi}^{3\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x+\cdots+\int\limits_{2018\pi}^{2019\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x\right)\\
&= 2019\sqrt{2}\left|\int\limits_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x\right|.
\end{aligned}$$

Mà $\displaystyle\int\limits_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=2$. Suy ra $I=4038\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 230. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x$, $\forall x\in[0;1]$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^1 f\left(1-x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{4}{15}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=-\dfrac{2}{15}$. **D.** $I=\dfrac{2}{15}$.

Lời giải.

Đặt $t=1-x$, thì $x\in[0;1]\Leftrightarrow t\in[0;1]$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x\Leftrightarrow f(x)+2f(1-x)=3(x-1)^2-3\\
\Leftrightarrow\ & f(1-t)+2f(t)=3t^2-3\Leftrightarrow 2f(x)+f(1-x)=3x^2-3.
\end{aligned}$$

Xét hệ phương trình

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x\\ 2f(x)+f(1-x)=3x^2-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x\\ 4f(x)+2f(1-x)=6x^2-6\end{cases}\\
\Rightarrow\ & 3f(x)=3x^2+6x-6\Leftrightarrow f(x)=(x+1)^2-3,\forall x\in[0;1].
\end{aligned}$$

Khi đó $f(1-x^2) = (2-x^2)^2 - 3 = x^4 - 4x^2 + 1$.

Suy ra $I = \int\limits_0^1 f\left(1-x^2\right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(x^4 - 4x^2 + 1\right) \mathrm{d}x = -\dfrac{2}{15}$.

Chọn đáp án C □

Câu 231. Tại một thời điểm t trước lúc đỗ xe ở điểm dừng xe, một chiếc xe đang chuyển động đều với vận tốc là 60 km/h. Chiếc xe di chuyển trong trạng thái đó 5 phút rồi bắt đầu đạp phanh và chuyển động chậm dần đều thêm 8 phút nữa rồi mới dừng hẳn ở điểm đỗ xe. Tính quãng đường mà xe đi được từ thời điểm t nói trên đến khi dừng hẳn.

A. 4 km. **B.** 5 km. **C.** 9 km. **D.** 6 km.

Lời giải.

Vận tốc xe khi bắt đầu phanh là $v = 60 + at$ (km/h), mà xe dừng khi chạy được 8 phút $= \dfrac{2}{15}$ giờ thì dừng hẳn nên $0 = 60 + \dfrac{2a}{15} \Leftrightarrow a = -450$ (m/h^2). Khi đó quãng đường xe đi được kể từ lúc đạp phanh là

$$\int\limits_0^{\frac{2}{15}} (60 - 450t)\,\mathrm{d}t = 4.$$

Vậy tổng quãng đường cần tính là $60 \cdot \dfrac{5}{60} + 4 = 9$ km.

Chọn đáp án C □

Câu 232. Cho $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a;b]$ với $f(a) = 0$. Đặt $M = \max\limits_{[a;b]} |f(x)|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int\limits_a^b \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x$.

A. $M(b-a)$. **B.** $M^2(b-a)$. **C.** $\dfrac{M^2}{b-a}$. **D.** $\dfrac{M}{b-a}$.

Lời giải.

Gọi $x_0 \in [a;b]$, sao cho $|f(x_0)| = M$. Ta có

$$\left(\int\limits_a^{x_0} f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \int\limits_a^{x_0} \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^{x_0} \mathrm{d}x \Leftrightarrow \left[f(x_0) - f(a)\right]^2 \le (x_0 - a)\int\limits_a^{x_0} \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \quad f^2(x_0) \le (x_0 - a) \cdot \int\limits_a^{x_0} \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x \Leftrightarrow M^2 \le (x_0 - a) \cdot \int\limits_a^{x_0} \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x.$$

Mà $(x_0 - a) \cdot \int\limits_a^{x_0} \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x \le (b-a) \cdot \int\limits_a^{x_0} \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x$.

Suy ra $M^2 \le (b-a) \cdot \int\limits_a^{x_0} \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_a^{x_0} \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x \ge \dfrac{M^2}{b-a}$.

Dấu bằng xảy ra khi $f'(x) = 1$ tức là khi chẳng hạn $f(x) = x$.

Chọn đáp án C □

Câu 233. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

A. $S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=-\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính theo công thức $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 234. Cho $F(x)=\cos 2x-\sin x+C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tính $f(\pi)$.

A. $f(\pi)=-3$. **B.** $f(\pi)=1$. **C.** $f(\pi)=-1$. **D.** $f(\pi)=0$.

Lời giải.

$f(x)=F'(x)=-2\sin 2x-\cos x$, suy ra $f(\pi)=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 235. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ và $F(0)=2018$. Tính $F(-2)$.

A. $F(-2)$ không xác định. **B.** $F(-2)=2$.

C. $F(-2)=2018$. **D.** $F(-2)=2020$.

Lời giải.

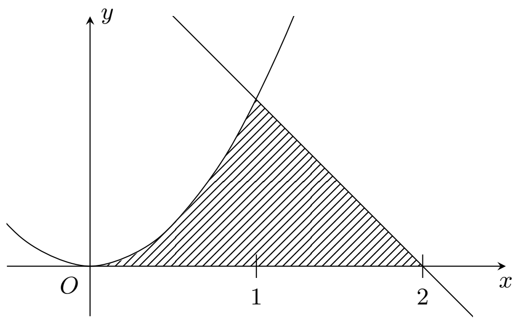
$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(x+\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+\ln|x+1|+C$.

Ta có $F(0)=2018$ nên $C=2018$.

Suy ra $F(-2)=2020$.

Chọn đáp án D □

Câu 236. Tính diện tích hình phẳng tạo thành bởi parabol $y=x^2$, đường thẳng $y=-x+2$ và trục hoành trên đoạn $[0;2]$ (phần gạch sọc trong hình vẽ).



A. $\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$.

C. $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có:

Parabol $y=x^2$ cắt trục Ox tại điểm có hoành độ 0.

Parabol $y=x^2$ cắt đường thẳng $y=-x+2$ tại điểm có hoành độ 1.

Đường thẳng $y=-x+2$cắt trục Ox tại điểm có hoành độ 2.

Diện tích hình phẳng đã cho là $S=\int\limits_0^1 x^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2(-x+2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 237. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x\sin x+\cos x+2x}{\sin x+2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi^2}{a}+\ln\dfrac{b}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P=a\cdot b\cdot c$.

A. $P=24$. **B.** $P=13$. **C.** $P=48$. **D.** $P=96$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x+\cos x+2x}{\sin x+2}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x(\sin x+2)+\cos x}{\sin x+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x+\frac{\cos x}{\sin x+2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^2}{2}+\ln|\sin x+2|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi^2}{8}+\ln\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

$P=a\cdot b\cdot c=48$.

Chọn đáp án C □

Câu 238. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x$ và $y=\sqrt{x}$ quay quanh trục hoành. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $V=\frac{\pi}{6}$. **B.** $V=\frac{\pi}{2}$. **C.** $V=\pi$. **D.** $V=0$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x=\sqrt{x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1.\end{array}\right.$

Thể tích khối tròn xoay là

$V=\pi\int\limits_0^1|x^2-x|\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1(x-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 239. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa $f(4-x)=f(x)\ \forall x\in[1;3]$ và $\int\limits_1^3 x.f(x)\,\mathrm{d}x=-2$. Giá trị $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải.

Đặt $t=4-x\Rightarrow\ \mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t$.

Với $x=1\Rightarrow t=3$, $x=3\Rightarrow t=1$.

$\int\limits_1^3 x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_3^1(4-t)\cdot f(4-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^3(4-x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x.$

Suy ra $2\int\limits_1^3 x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=4\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ hay $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 240. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int 0\,\mathrm{d}x=C$. **B.** $\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

C. $\int x^a\,\mathrm{d}x=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C$. **D.** $\int\mathrm{d}x=x+C$.

Lời giải.

Đáp án $\int x^a\,\mathrm{d}x=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C$ không đúng với trường hợp $a=-1$.

Chọn đáp án C □

Câu 241. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos(2x+3)$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\sin(2x+3)+C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\sin(2x+3)+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\sin(2x+3)+C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin(2x+3)+C$.

Lời giải.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin(2x+3)+C$

Chọn đáp án D □

Câu 242. Giá trị nào của b để $\int\limits_1^b(2x-6)\,\mathrm{d}x=0$?

A. $b=0$ hoặc $b=3$. **B.** $b=0$ hoặc $b=1$. **C.** $b=5$ hoặc $b=0$. **D.** $b=1$ hoặc $b=5$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^b(2x-6)\,\mathrm{d}x=\left.(x^2-6x)\right|_1^b=b^2-6b+5$.

Do đó $\int\limits_1^b(2x-6)\,\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow b^2-6b+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\\b=5\end{array}\right.$.

Chọn đáp án D □

Câu 243. Biết rằng $I=\int\limits_3^4\frac{x^2-x+2}{x+\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x=\frac{a-4\sqrt{b}}{c}$. Với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $a+b+c$.

A. 39. **B.** 27. **C.** 33. **D.** 41.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_3^4\frac{x^2-x+2}{x+\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_3^4(x-\sqrt{x-2})\,\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3\right)\right|_3^4=\frac{25-8\sqrt{2}}{6}=\frac{25-4\sqrt{8}}{6}$.

Suy ra $a=25$; $b=8$; $c=6$. Vậy $a+b+c=39$.

Chọn đáp án A □

Câu 244. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f(\tan x)\,\mathrm{d}x=2$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=3$. **D.** $I=6$.

Lời giải.

Từ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f(\tan x)\,\mathrm{d}x=4$. Ta đặt $t=\tan x$, ta được $\int\limits_0^1\frac{f(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=4$.

Từ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=2\Leftrightarrow\int\limits_0^1\frac{(x^2+1-1)f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=2\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\frac{f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=2$.

$\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2+\int\limits_0^1\frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=2+4=6$.

Chọn đáp án D □

Câu 245. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) > 0$, $\forall x \in [1;2]$ và $\int\limits_1^2 \dfrac{[f'(x)]^3}{x^4}\,\mathrm{d}x = \dfrac{7}{375}$. Biết $f(1) = 1$, $f(2) = \dfrac{22}{15}$, tính $I = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $P = \dfrac{71}{60}$. **B.** $P = \dfrac{6}{5}$. **C.** $P = \dfrac{73}{60}$. **D.** $P = \dfrac{37}{30}$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\dfrac{[f'(x)]^3}{x^4} + \dfrac{x^2}{125} + \dfrac{x^2}{125} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{[f'(x)]^3}{x^4} \cdot \dfrac{x^2}{25} \cdot \dfrac{x^2}{25}} = \dfrac{3f'(x)}{25}$.

Lấy tích phân hai vế BĐT trên, ta có:

$$\int\limits_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4}\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_1^2 \frac{x^2}{125}\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_1^2 \frac{3f'(x)}{25} \Leftrightarrow \int\limits_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4}\,\mathrm{d}x + 2\cdot\frac{7}{375} \geq \frac{3}{25}[f(2)-f(1)] \Leftrightarrow \int\limits_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4}\,\mathrm{d}x \geq \frac{7}{375}$$

Kết hợp với giả thiết ta có dấu "=" của BĐT trên xảy ra khi

$\dfrac{[f'(x)]^3}{x^4} = \dfrac{x^2}{125} \Leftrightarrow [f'(x)]^3 = \dfrac{x^6}{125} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{x^2}{5} \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{15} + C$.

Mà $f(1) = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{1}{15} + C \Rightarrow C = \dfrac{14}{15} \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3+14}{15}$.

Ta có $I = \int\limits_1^2 \dfrac{x^3+14}{15}\,\mathrm{d}x = \dfrac{71}{60}$.

Chọn đáp án A □

Câu 246. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$ là:

A. $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + C$. **B.** $F(x) = 2e^{2x}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + C$.

C. $F(x) = 2e^{2x}(x-2) + C$. **D.** $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x}(x-2) + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int x.e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = e^{2x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases} \Rightarrow F(x) = \dfrac{xe^{2x}}{2} - \dfrac{1}{2}\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}e^{2x}(x - \dfrac{1}{2}) + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 247. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Với $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}\tan x = \mathrm{d}t \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$.

Ta có $J = \int\limits_0^1 \dfrac{f(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 4$.

Vậy $I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{(x^2+1)f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2+4 = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 248. Biết $\int\limits_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{b}{c} + a\ln 2$ (với a là số thực, b, c là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của $2a+3b+c$.

A. 4. **B.** -6. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải.

Với $I = \int\limits_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ v = \dfrac{-1}{x} \end{cases} \Rightarrow I = \dfrac{-1}{2}\ln 2 + \dfrac{1}{2}$.

Vậy $a = \dfrac{-1}{2}, b = 1, c = 2 \Rightarrow 2a+3b+c = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 249. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \dfrac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $S = \ln 2 - 1$(đvdt). **B.** $S = 2\ln 2 - 1$(đvdt).

C. $S = 2\ln 2 - 1$(đvdt). **D.** $S = \ln 2 + 1$(đvdt).

Lời giải.

Ta có hoành độ giao điểm của (H) với Ox là $x = 1$.

Trục Oy có phương trình $x = 0$.

Vậy $S = \int\limits_0^1 \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{d}x = \left|\int\limits_0^1 \dfrac{x-1}{x+1}\,\mathrm{d}x\right| = |x - 2\ln(x+1)|\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 250. Giá trị thực dương của tham số m sao cho $\int\limits_0^m x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = 2^{500}\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}}$ là

A. $m = 2^{250}\sqrt{2^{500}-2}$. **B.** $m = \sqrt{2^{1000}-1}$. **C.** $m = \sqrt{2^{1000}+1}$. **D.** $m = 2^{250}\sqrt{2^{500}+2}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = m \Rightarrow t = \sqrt{m^2+1}$.

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^m x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\sqrt{m^2+1}} t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = \mathrm{e}^t. \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= t\mathrm{e}^t\Big|_1^{\sqrt{m^2+1}} - \int\limits_1^{\sqrt{m^2+1}} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{m^2+1}\cdot \mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}} - \mathrm{e} - \mathrm{e}^t\Big|_1^{\sqrt{m^2+1}} \\ &= \sqrt{m^2+1}\cdot \mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}} - \mathrm{e} - \mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}} + \mathrm{e} \\ &= \left(\sqrt{m^2+1} - 1\right)\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}}. \end{aligned}$$

Theo giả thuyết

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{m^2+1} - 1\right)\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}} = 2^{500}\mathrm{e}^{\sqrt{m^2+1}} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{m^2+1} - 1 = 2^{500} \\ \Leftrightarrow\ & m^2 + 1 = \left(2^{500}+1\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & m = \sqrt{\left(2^{500}+1\right)^2 - 1} \\ \Leftrightarrow\ & m = \sqrt{\left(2^{500}+1+1\right)\left(2^{500}+1-1\right)} \\ \Leftrightarrow\ & m = 2^{250}\sqrt{2^{500}+2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 251. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x$ và $y = x^2$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là

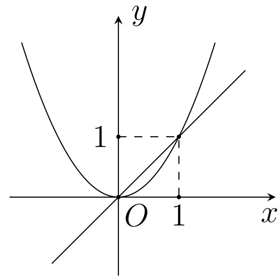
A. $\dfrac{2\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{3\pi}{25}$. **C.** $\dfrac{\pi}{30}$. **D.** $\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là

$V = \pi \int\limits_0^1 \left(x^2 - x^4\right)\mathrm{d}x = \pi\left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \dfrac{2\pi}{15}.$



Chọn đáp án A □

Câu 252. Tích phân $I = \int\limits_1^{2^{1000}} \dfrac{x^2+4x+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 2^{1000} + \ln\left[2^{996}\left(1+2^{1000}\right)^2\right]$. **B.** $I = 2^{1000} - 1 + \ln\left[2^{996}\left(1+2^{1000}\right)^2\right]$.

C. $I = 2^{1000} - 1 + \ln\left[2^{998}\left(1+2^{1000}\right)^2\right]$. **D.** $I = 2^{1000} - 1 + \ln\left[2^{1998}\left(1+2^{1000}\right)^2\right]$.

Lời giải.

$$
\begin{aligned}
I &= \int\limits_1^{2^{1000}} \frac{x^2+4x+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_1^{2^{1000}} \frac{(x^2+x)+(2x+1)+x}{x^2+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_1^{2^{1000}} \left(1+\frac{2x+1}{x^2+x}+\frac{x}{x^2+x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_1^{2^{1000}} \mathrm{d}x + \int\limits_1^{2^{1000}} \frac{2x+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^{2^{1000}} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= x\Big|_1^{2^{1000}} + \int\limits_1^{2^{1000}} \frac{\mathrm{d}\left(x^2+x\right)}{x^2+x} + \ln|x+1|\Big|_1^{2^{1000}} \\
&= 2^{1000}-1+\ln\left|x^2+x\right|\Big|_1^{2^{1000}} + \ln\left(2^{1000}+1\right)-\ln 2 \\
&= 2^{1000}-1+\left(\ln|x|+\ln|x+1|\right)\Big|_1^{2^{1000}} + \ln\left(2^{1000}+1\right)-\ln 2 \\
&= 2^{1000}-1+\ln 2^{1000}+\ln\left(2^{1000}+1\right)-\ln 2+\ln\left(2^{1000}+1\right)-\ln 2 \\
&= 2^{1000}-1+\ln 2^{1000}-2\ln 2+2\ln\left(2^{1000}+1\right) \\
&= 2^{1000}-1+\left(\ln 2^{1000}-\ln 2^2\right)+\ln\left(2^{1000}+1\right)^2 \\
&= 2^{1000}-1+\ln 2^{998}+\ln\left(2^{1000}+1\right)^2 \\
&= 2^{1000}-1+\ln\left[2^{998}\left(2^{1000}+1\right)^2\right].
\end{aligned}
$$

Chọn đáp án C □

Câu 253. Cho tích phân $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{f\left(\ln x^3\right)}{2x}\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 9. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** 6.

Lời giải.

Đặt $t=\ln x^3 \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{x^3}\cdot 3x^2\,\mathrm{d}x = \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{2x} = \frac{1}{6}\,\mathrm{d}t$.

$\Rightarrow I = \frac{1}{6}\int\limits_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 254. Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của 2 hàm số $y=\left|x^2-4\right|$ và $y=\frac{x^2}{2}+4$ là

A. $S=\frac{32}{3}$. **B.** $S=16$. **C.** $S=\frac{64}{3}$. **D.** $S=8$.

Lời giải.

$$|x^2-4|=\frac{x^2}{2}+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4\geq 0\\ x^2-4=\dfrac{x^2}{2}+4\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-4<0\\ -\left(x^2-4\right)=\dfrac{x^2}{2}+4\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4\geq 0\\ x^2=16\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-4<0\\ 3x^2=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=-4\\ x=0.\end{array}\right.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{-4}^{0}\left||x^2-4|-\left(\frac{x^2}{2}+4\right)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4}\left||x^2-4|-\left(\frac{x^2}{2}+4\right)\right|\mathrm{d}x\\ &= \left|\int\limits_{-4}^{-2}\left(\frac{x^2}{2}-8\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{-2}^{0}\frac{-3x^2}{2}\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{0}^{2}\frac{-3x^2}{2}\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{2}^{4}\left(\frac{x^2}{2}-8\right)\mathrm{d}x\right|\\ &= \left|\left(\frac{x^3}{6}-8x\right)\Big|_{-4}^{-2}\right|+\left|\frac{-x^3}{2}\Big|_{-2}^{0}\right|+\left|\frac{-x^3}{2}\Big|_{0}^{2}\right|+\left|\left(\frac{x^3}{6}-8x\right)\Big|_{2}^{4}\right|\\ &= \frac{20}{3}+4+4+\frac{20}{3}\\ &= \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 255. Cho một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=a\cos^4 x-b\cos x$ với a, $b\in\mathbb{R}$ biết rằng $F(0)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\frac{a}{b}=\frac{3\pi}{16}$. **B.** $\cos\left(\frac{b}{a}\right)\approx 0{,}83$. **C.** $ab<0$. **D.** $\cos\left(\frac{a}{b}\right)=0{,}45$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= a\cos^4 x-b\cos x\\ &= a\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2-b\cos x\\ &= \frac{a}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)-b\cos x\\ &= \frac{a}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)-b\cos x. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} F(x) &= \int\left(\frac{a}{4}+\frac{a}{2}\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{8}-b\cos x\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{3a}{8}x+\frac{a}{4}\sin 2x+\frac{a}{32}\sin 4x-b\sin x+C. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ \dfrac{3a\pi}{16} - b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3a\pi}{16} - b = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{3\pi}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{16}{3\pi} \Rightarrow \cos\left(\frac{b}{a}\right) \approx 0{,}83.$$

Chọn đáp án B □

Câu 256. Cho hàm số f xác định, liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đạo hàm của f cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{735}{1024}$, $f(1) = 2$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{17}{64}$. Tính $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 4x + 2\sin 2x) f'(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1245}{1024}$. **B.** $\dfrac{1245}{128}$. **C.** $\dfrac{1245}{256}$. **D.** $\dfrac{1245}{512}$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin 2x(\cos 2x + 1) f'(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin 2x \cos^2 x f'(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t = \dfrac{1}{4}$; $x = 0 \Rightarrow t = 1$.

$$I = \int_{\frac{1}{4}}^{1} t f'(t)\,\mathrm{d}t = t f(t)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1} - \int_{\frac{1}{4}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{17}{64} - \frac{735}{1024} = \frac{1245}{1024}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 257. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x - \cos x$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x + \cos x + C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x + \cos x + C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x - \cos x + C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x - \cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x = -\cos x - \sin x + C = -\sin x - \cos x + C$

Chọn đáp án C □

Câu 258. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x + \dfrac{1}{x^2}$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3^x + \frac{1}{x} + C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{x} + C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3^x - \frac{1}{x} + C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x} + C$.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{3^x}{\ln 3} - \dfrac{1}{x} + C\right)' = \dfrac{3^x \ln 3}{\ln 3} - \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 3^x + \dfrac{1}{x^2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 259. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 x^{2018}(1 + x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{1}{2018} + \dfrac{1}{2019}$. **B.** $I = \dfrac{1}{2020} + \dfrac{1}{2021}$. **C.** $I = \dfrac{1}{2019} + \dfrac{1}{2020}$. **D.** $I = \dfrac{1}{2017} + \dfrac{1}{2018}$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int\limits_0^1 \left(x^{2018} + x^{2019}\right) \mathrm{d}x = \left(\dfrac{x^{2019}}{20019} + \dfrac{x^{2020}}{2020}\right)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2019} + \dfrac{1}{2020}$.

Chọn đáp án C □

Câu 260. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2x}$; $y = 2x - 2$ và trục hoành. Tính diện tích của (H).

A. $\dfrac{5}{3}$. **B.** $\dfrac{16}{3}$. **C.** $\dfrac{10}{3}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

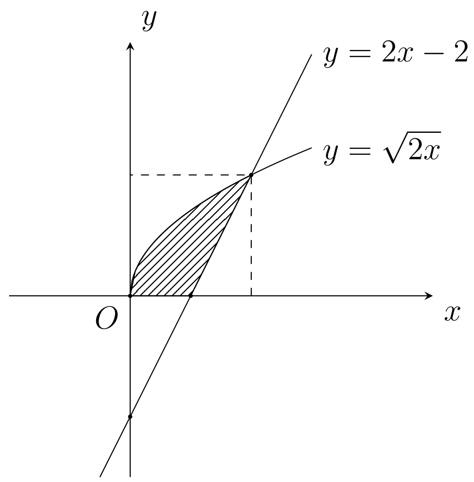
Hoành độ giao điểm của đường cong $y = \sqrt{2x}$ và đường thẳng $y = 2x - 2$ là

$$\sqrt{2x} = 2x - 2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Đồ thị hàm số $y = 2x - 2$ cắt Ox tại điểm $(1; 0)$.

Diện tích hình phẳng là

$$S = \int\limits_0^1 \sqrt{2x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left(\sqrt{2x} - 2x + 2\right)\mathrm{d}x = \dfrac{5}{3}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 261. Cho tích phân $I = \displaystyle\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \dfrac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a}{b} \cdot \mathrm{e}^{\frac{c}{d}}$ trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $bc - ad$.

A. 24. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** 12. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \dfrac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \left(x - \dfrac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$.

Xét $I_1 = \displaystyle\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \\ v = x. \end{cases}$

Do đó

$$I_1 = x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{12}}^{12} - \int\limits_{\frac{1}{12}}^{12} \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra

$$I = xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{12}}^{12} = \frac{143}{12}e^{\frac{145}{12}}.$$

Vậy $a = 143$, $b = 12$, $c = 145$, $d = 12$ và $bc - ad = 24$.

Chọn đáp án A □

Câu 262. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính giới hạn của dãy số

$$u_n = \frac{1}{n}\left[f(1) + \sqrt{\frac{n}{3+n}}\cdot f\left(\sqrt{\frac{n+3}{n}}\right) + \sqrt{\frac{n}{6+n}}\cdot f\left(\sqrt{\frac{n+6}{n}}\right) + \cdots + \sqrt{\frac{n}{4n-3}}\cdot f\left(\sqrt{\frac{4n-3}{n}}\right)\right].$$

A. $\lim u_n = 2$. **B.** $\lim u_n = \frac{2}{3}$. **C.** $\lim u_n = 1$. **D.** $\lim u_n = \frac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có:

$$u_n = \frac{f(1)}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}f\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\cdot 3}{n}}}f\left(\sqrt{1+\frac{2\cdot 3}{n}}\right) + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3(n-1)}{n}}}f\left(\sqrt{1+\frac{3(n-}{n}}\right.\right.$$

$$\Rightarrow \lim u_n = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+3x}}f\left(\sqrt{1+3x}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $t = \sqrt{1+3x} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{3}{2\sqrt{1+3x}}\mathrm{d}x \Rightarrow \lim u_n = \frac{2}{3}\int\limits_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 263. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 12 & \text{khi } x \le 3 \\ \frac{x^2-3x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x > 3 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{2441}{15}$. **B.** $I = \frac{1906}{15}$. **C.** $I = \frac{1606}{15}$. **D.** $I = \frac{2541}{15}$.

Lời giải.

Dễ dàng chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

$$I = \int\limits_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_3^8 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 12\,\mathrm{d}x + \int\limits_3^8 \frac{x^2-3x}{\sqrt{x+1}-2}\,\mathrm{d}x.$$

$$= 12x\big|_0^3 + \int\limits_3^8 x\left(\sqrt{x+1}+2\right)\,\mathrm{d}x = 91 + \int\limits_3^8 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Xét $J = \int\limits_3^8 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 3 \Rightarrow t = 2; x = 8 \Rightarrow t = 3$.

Vậy $J = 2\int\limits_2^3 t^2\left(t^2-1\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1076}{15} \Rightarrow I = \frac{2441}{15}$.

Chọn đáp án A □

Câu 264. Cho $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$, tính $I = \int\limits_0^1 f\left(3x+1\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 9$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 1$. **D.** $I = 27$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^1 f\left(3x+1\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 f\left(3x+1\right)\,\mathrm{d}(3x+1) = \dfrac{1}{3}\int\limits_1^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 265. Một vật chuyển động thẳng có vận tốc và gia tốc tại thời điểm t lần lượt là $v(t)$ m/s và $a(t)$ m/s^2. Biết rằng 1 giây sau khi chuyển động, vận tốc của vật là 1 m/s đồng thời $a(t)+v^2(t)\cdot(2t-1)=0$. Tính vận tốc của vật sau 3 giây.

A. $v(3) = \dfrac{1}{13}$ m/s. **B.** $v(3) = \dfrac{1}{7}$ m/s. **C.** $v(3) = \dfrac{1}{12}$ m/s. **D.** $v(3) = \dfrac{1}{6}$ m/s.

Lời giải.

Ta có $a(t)+v^2(t)(2t-1)=0 \Leftrightarrow \dfrac{a(t)}{v^2(t)} = 1-2t \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{v(t)}\right)' = 2t-1$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{v(t)} = t^2 - t + C$.

Mà $v(1) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow v(t) = \dfrac{1}{t^2-t+1} \Rightarrow v(3) = \dfrac{1}{7}$ (m/s).

Chọn đáp án B □

Câu 266. Biết $\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \sin^2 x + \ln x + C$, tìm nguyên hàm $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin^2\dfrac{x}{2} + \ln x + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sin^2\dfrac{x}{2} + 2\ln x + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sin^2 x + 2\ln x - \ln 2 + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sin^2 2x + 2\ln x - \ln 2 + C$.

Lời giải.

Gọi $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$.

Khi đó $\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{F(2x)}{2} + C = \sin^2 x + \ln x + C$.

$\Rightarrow F(2x) = 2\sin^2 x + 2\ln x + C = 2\sin^2\left(2\cdot\dfrac{x}{2}\right) + 2\ln\left(2\cdot\dfrac{x}{2}\right) + C$.

$\Rightarrow F(x) = 2\sin^2\dfrac{x}{2} + 2\ln\dfrac{x}{2} + C = 2\sin^2\dfrac{x}{2} + 2\ln x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 267. Biết $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, tính $\int\limits_1^4 \dfrac{1}{\sqrt{x}} f\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 4$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 1$. **D.** $I = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow, \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1, x = 4 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó $I = 2\int\limits_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 268. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K, a, b, c là các số thực thuộc K. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
B. $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
C. $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.
D. $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo tính chất của tích phân.

Chọn đáp án (A) □

Câu 269. Cho $\int\limits_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3, (a, b \in \mathbb{Z})$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a + b + 1 = 0$. **B.** $a + 3b + 1 = 0$. **C.** $a - 2b = 0$. **D.** $a + b = -2$.

Lời giải.

$\int\limits_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)\,\mathrm{d}x = (\ln(x-2) - \ln(x-1))|_3^4$.
$= \ln 2 - \ln 3 - (\ln 1 - \ln 2) = 2\ln 2 - \ln 3 \Rightarrow a = 2; b = -1$.

Vậy $a + 3b + 1 = 0$ là khẳng định đúng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 270. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3^x}{\mathrm{e}^3}$

A. $\frac{3^x}{\mathrm{e}^3 \ln \frac{3}{\mathrm{e}}} + C$. **B.** $\frac{3^x}{-2\ln 3 \cdot \mathrm{e}^2} + C$. **C.** $\frac{3^x \ln 3}{\mathrm{e}^3} + C$. **D.** $\frac{3^x}{\mathrm{e}^3 \ln 3} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \frac{3^x}{\mathrm{e}^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\mathrm{e}^3 \ln 3} + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 271. Tìm hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\sin x(4\cos x + 1)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

A. $F(x) = \cos 2x + \cos x - 1$. **B.** $F(x) = -2\cos 2x + \cos x - 3$.
C. $F(x) = \cos 2x + \cos x$. **D.** $F(x) = -\cos 2x - \cos x - 2$.

Lời giải.

Ta có $\int [-\sin x(4\cos x + 1)]\,\mathrm{d}x = -\int (2\sin 2x + \sin x)\,\mathrm{d}x = \cos 2x + \cos x + C$.

Ta có $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi + \cos \frac{\pi}{2} + C = -1 \Leftrightarrow C = 0$.

Vậy $F(x) = \cos 2x + \cos x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 272. Tính diện tích S của phần hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ và $y = x^2 + x - 4$.

A. $S = \frac{253}{12}$. **B.** $S = \frac{125}{12}$. **C.** $S = \frac{16}{3}$. **D.** $S = \frac{63}{4}$.

Lời giải.

Ta thấy $x^3 - 3x^2 = x^2 + x - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4. \end{array}\right.$

Khi đó $S = \left|\int\limits_{-1}^{1}\left(x^3-4x^2-x+4\right)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int\limits_{1}^{4}\left(x^3-4x^2-x+4\right)\,\mathrm{d}x\right| = \dfrac{16}{3}+\dfrac{63}{4}=\dfrac{253}{12}$.

Chọn đáp án A □

Câu 273. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox của hình giới hạn bởi đường thẳng $y = 1 - x^2$ và Ox.

A. $\dfrac{16}{15}$. **B.** $\dfrac{16\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{4\pi}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay $V = \pi\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{16\pi}{15}$.

Chọn đáp án B □

Câu 274. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = x^2y$ và $f(-1) = 1$. Tính $f(2)$.

A. $\mathrm{e}+1$. **B.** e^3. **C.** $2\mathrm{e}$. **D.** e^2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& f'(x) = x^2\cdot f(x)\\
\Leftrightarrow\ & f'(x)\cdot \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}} + x^2\cdot \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}\cdot f(x) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}\cdot f(x)\right]' = 0\\
\Rightarrow\ & f(2)\cdot \mathrm{e}^{\frac{2^3}{3}} - f(-1)\cdot \mathrm{e}^{\frac{(-1)^3}{3}} = 0\\
\Leftrightarrow\ & f(2) = \mathrm{e}^3.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 275. Tính tích phân $I = \int\limits_{0}^{2}\max\left\{x^2, 3x-2\right\}\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{17}{6}$. **B.** $\dfrac{17}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{0}^{1}x^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2}(3x-2)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{17}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 276. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $\left|f(0)\right| = \left|f(3)\right| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $I = \int\limits_{0}^{3}f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. -1. **B.** -3. **C.** -2. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{0}^{3}f'(x)\,\mathrm{d}x = f(3) - f(0)$.

Ta có

$$|f(3) - f(0)| \le |f(3)| + |f(0)|$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow |f(3)-f(0)|\leq 2\\&\Leftrightarrow -2\leq f(3)-f(0)\leq 2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 277. Mệnh đề nào trong bốn mệnh đề sau **sai**?

A. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln x+C$. **B.** $\displaystyle\int 0\,\mathrm{d}x=C$.

C. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$. **D.** $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

Lời giải.

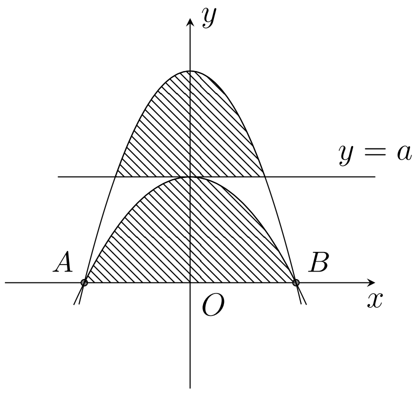
Mệnh đề $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln x+C$ sai.

Chọn đáp án (A) □

Câu 278.

Cho parabol $(P_1): y=-x^2+4$ cắt trục hoành tại hai điểm A,B và đường thẳng $d: y=a$ $(0<a<4)$. Xét parabol (P_2) đi qua A,B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y=a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1=S_2$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính $T=a^3-8a^2+48a$.

A. $T=32$. **B.** $T=64$. **C.** $T=72$. **D.** $T=99$.



Lời giải.

Đường thẳng $y=a$ cắt (P_1) tại hai điểm có hoành độ $-\sqrt{4-a}$ và $\sqrt{4-a}$. Vậy

$$S_1=\int\limits_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}}(-x^2+4-a)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\cdot\sqrt{4-a}\cdot(4-a).$$

Parabol (P_2) có dạng $y=m(x^2-4)$. Chú ý vì nó còn đi qua điểm $(0;a)$ nên $m=-\frac{a}{4}$. Vậy $(P_2): y=-\frac{a}{4}x^2+a$. Từ đó suy ra

$$S_2=\int\limits_{-2}^{2}\left(-\frac{a}{4}x^2+a\right)\,\mathrm{d}x=\frac{8a}{3}.$$

Từ đó ta có

$$\frac{16(4-a)^3}{9}=\frac{64a^2}{9}\Leftrightarrow a^3-8a^2+48a=64.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 279. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\displaystyle\int\limits_0^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x^2}+x^4-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(4)$ là

A. $f(4)=\mathrm{e}^4+4$. **B.** $f(4)=4\mathrm{e}^4$. **C.** $f(4)=1$. **D.** e^4+8.

Lời giải.

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Từ giả thiết ta có $F(x^2) - F(0) = \mathrm{e}^{x^2} + x^4 - 1$. Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$2x \cdot f(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2} + 4x^3 \Leftrightarrow f(x) = \mathrm{e}^{x^2} + 2x.$$

Vậy $f(4) = \mathrm{e}^4 + 8$.

Chọn đáp án D □

Câu 280. Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 + 5x + 5)\mathrm{e}^x$. Giá trị của $2a + 3b + c$ là

A. 10. **B**. 6. **C**. 8. **D**. 13.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^x + (2ax + b)\mathrm{e}^x = (ax^2 + (2a + b)x + b + c)\mathrm{e}^x$.

Từ giả thiết ta có hệ

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 5 \\ b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 2. \end{cases}$$

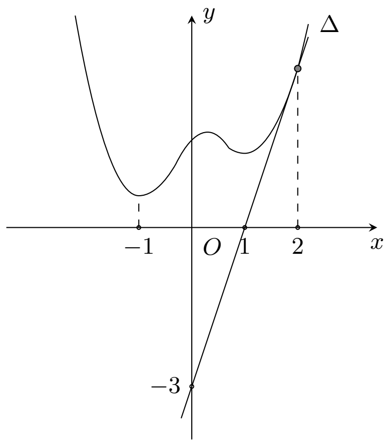
Vậy $2a + 3b + c = 13$.

Chọn đáp án D □

Câu 281.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = -1$, có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 2. Tính $\displaystyle\int_1^4 f''(x-2)\,\mathrm{d}x$.

A. 3. **B**. 4. **C**. 1. **D**. 2.



Lời giải.

Đường thẳng $\Delta\colon y = 3x - 3$. Vậy $f'(2) = 3$.

Từ giả thiết ta có

$$\int_1^4 f''(x-2)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 f''(x)\,\mathrm{d}x = f'(2) - f'(1) = 3 - 0 = 3.$$

Chọn đáp án A □

Câu 282. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường cong $y = x^2 - 2x$ và $y = 2x^2 - x - 2$ là

A. $\dfrac{9}{2}$. **B**. 9. **C**. 5. **D**. 4.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2x = 2x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$.

Vậy $S = \displaystyle\int_{-2}^{1} \left|(x^2 - 2x) - (2x^2 - x - 2)\right|\,\mathrm{d}x = \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 283. Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn $\int\limits_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10$, $\int\limits_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $\int\limits_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. 9. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \int\limits_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10 \\ \int\limits_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \\ \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 \end{cases} \Rightarrow \int\limits_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = 4+2 = 6.$

Chọn đáp án C $\square$

Câu 284. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f(0)=0$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{\pi}{4} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}\cos x = \cos x f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

Mặt khác $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$

Như vậy ta có $0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)-\cos x]^2\,\mathrm{d}x \geq 0.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x + C$. Mà $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Vậy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

Chọn đáp án B $\square$

Câu 285. Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{2-3x}$ là

A. $\frac{1}{3}\ln|2-3x|+C$. **B.** $-3\ln|2-3x|+C$. **C.** $-\frac{1}{3}\ln|2-3x|+C$. **D.** $\ln|2-3x|+C$.

Lời giải.

$$\int \frac{1}{2-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{2-3x}\,\mathrm{d}(2-3x) = -\frac{1}{3}\ln|2-3x|+C.$$

Chọn đáp án C $\square$

Câu 286. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục có $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$, $g(x)$. Xét các mệnh đề sau:
(I). $F(x)+G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)+g(x)$.
(II). $kF(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $kf(x)$, $(k \in \mathbb{R})$.
(III). $F(x)\cdot G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)\cdot g(x)$.
Mệnh đề nào là mệnh đề **đúng**?

A. (I) và (III). **B**. (I) và (II). **C**. (II) và (III). **D**. (III).

Lời giải.

Chỉ có mệnh đề (I) và (II) là hai mệnh đề đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 287. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2-2x-2m-\frac{1}{3}$ có đồ thị (C). Biết $m=\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$, $(a;b)=1$ và $m\in\left(0;\frac{5}{6}\right)$ sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và các đường thẳng $x=0$, $x=2$, $y=0$ có diện tích bằng 4. Tính $P=2a^2+b^2$.

A. 18. **B**. 8. **C**. 6. **D**. 12.

Lời giải.

Xét phương trình $\frac{1}{3}x^3+mx^2-2x-2m-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{3}}{2-x^2}$ (do $x=\pm\sqrt{2}$ không phải là nghiệm của phương trình).
Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{3}$.
$f'(x)=x^2-2 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$. Ta có bảng biến thiên sau

x	0		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\frac{4\sqrt{2}+1}{3}$	$\nearrow$	$-\frac{5}{3}$

Dễ thấy với $x>\sqrt{2}$ thì $2-x^2<0$ mà $\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{3}<0$ nên $\dfrac{\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{3}}{2-x^2}<0$ nên phương trình vô nghiệm.
Với $x>\sqrt{2}$ thì $m=\dfrac{\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{3}}{2-x^2}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{3}\right)\geq\frac{5}{6}$.
Như vậy phương trình $m=\dfrac{\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{3}}{2-x^2}$ vô nghiệm với $m\in\left(0;\frac{5}{6}\right)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và các đường thẳng $x=0$, $x=2$, $y=0$ là

$$\begin{aligned} V &= \int\limits_0^2 \left(-\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 2x + 2m + \frac{1}{3}\right) \mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{12}x^4 - \frac{mx^3}{3} + x^2 + 2mx + \frac{1}{3}x\right)\Big|_0^2 \\ &= \frac{10}{3} + \frac{4m}{3} = 4 \\ \Rightarrow & \ m = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nên $a=1$, $b=2$ và $P = 2a^2 + b^2 = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 288. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-1)\mathrm{e}^{2x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=2$.

A. $\frac{\mathrm{e}^4}{4} - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{3}{4}$. **B.** $\frac{\mathrm{e}^4}{4} - \frac{\mathrm{e}^2}{2} + \frac{3}{4}$. **C.** $\frac{\mathrm{e}^4}{4} + \frac{\mathrm{e}^2}{2} + \frac{3}{4}$. **D.** $\frac{\mathrm{e}^4}{4} + \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{3}{4}$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x-1)e^{2x}$ và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$(x-1)\mathrm{e}^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^2 \left|(x-1)\mathrm{e}^{2x}\right| \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 (1-x)\mathrm{e}^{2x}\, \mathrm{d}x + \int\limits_1^2 (x-1)\mathrm{e}^{2x}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)\, \mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}) + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (x-1)\, \mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}) \\ &= \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}(x-1)\mathrm{e}^{2x}\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{2x}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{e}^4}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big|_1^2 \\ &= \frac{\mathrm{e}^4}{4} + \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

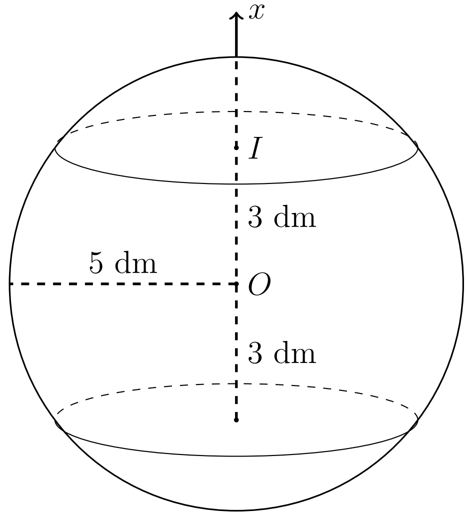
Câu 289. Một khối cầu có bán kính 5 dm, người ta cắt bỏ 2 phần bằng 2 mặt phẳng song song và vuông góc với bán kính, hai mặt phẳng đó đều cách tâm của khối cầu 3 dm để làm một chiếc lu đựng nước. Tính thể tích nước mà chiếc lu chứa được (coi độ dày của bề mặt không đáng kể).

A. 132π dm^3. **B.** 41π dm^3. **C.** $\frac{100}{3}\pi$ dm^3. **D.** 43π dm^3.

Lời giải.

Đặt trục tọa độ như hình vẽ. Thể tích cái được tính bằng cách cho đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 25 - x^2$ quay quanh trục Ox.
Thể tích cái lu bằng

$$V = \pi \int\limits_{-3}^{3} (25 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi(25x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-3}^{3} = 132\pi \text{ dm}^3.$$



Chọn đáp án (A)

Câu 290. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi $\mathscr{D}$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Diện tích hình phẳng $\mathscr{D}$ được tính theo công thức là

A. $S = \int\limits_{a}^{b} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

B. $S = \int\limits_{b}^{a} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \pi \int\limits_{a}^{b} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

D. $S = \left|\int\limits_{a}^{b} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Theo lý thuyết $S = \int\limits_{a}^{b} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A)

Câu 291. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 + \sin x - 2$ là

A. $x^4 + \cos x - 2x + C$.

B. $\dfrac{x^4}{4} + \cos x + C$.

C. $12x + \cos x + C$.

D. $x^4 - \cos x - 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(4x^3 + \sin x - 2\right)\mathrm{d}x = x^4 - \cos x - 2x + C$.

Chọn đáp án (D)

Câu 292. Tích phân $\int\limits_{0}^{2} \dfrac{a}{ax + 3a}\,\mathrm{d}x, (a > 0)$ bằng

A. $\dfrac{16a}{225}$.

B. $a \log \dfrac{5}{3}$.

C. $\ln \dfrac{5}{3}$.

D. $\dfrac{2a}{15}$.

Lời giải.

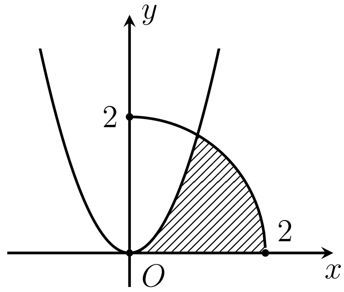
Ta có $\int\limits_{0}^{2} \dfrac{a}{ax + 3a}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2} \dfrac{1}{x + 3}\,\mathrm{d}x = \ln(x + 3)|_0^2 = \ln 5 - \ln 3 = \ln \dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 293.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\leq x\leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng $S=\dfrac{a\pi-\sqrt{b}}{c}$, $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính $T=a+b+c$.

A. 7. **B**. 13. **C**. 11. **D**. 12.



Lời giải.

— Ta có $\sqrt{3}x^2=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow 3x^4=4-x^2\Leftrightarrow 3x^4+x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x^2=1\\&x^2=-4\end{aligned}\right.\Rightarrow x=1\in[0;2]$.

— Diện tích của (H) được tính theo công thức

$$S=\int\limits_0^2\left|\sqrt{3}x^2\right|\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\left|\sqrt{4-x^2}\right|\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sqrt{3}x\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Tính $I_1=\displaystyle\int\limits_0^1\sqrt{3}x^2\,\mathrm{d}x=\left.\frac{\sqrt{3}x^3}{3}\right|_0^1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Tính

$$\begin{aligned}I_2&=\int\limits_1^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^0\sqrt{4-(2\cos t)^2}\,\mathrm{d}(2\cos t)=-4\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^0|\sin t|\sin t\,\mathrm{d}t\\&=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t\\&=2\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $S=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{4\pi-\sqrt{3}}{6}\Rightarrow a=4,b=3,c=6\Rightarrow a+b+c=13$.

Chọn đáp án B □

Câu 294. Biết $I=\displaystyle\int\limits_1^2\frac{dx}{(2x+2)\sqrt{x}+2x\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-c}{2}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a-b+c$.

A. $P=24$. **B**. $P=12$. **C**. $P=18$. **D**. $P=22$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int\limits_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2}\int\limits_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\\&=\frac{1}{2}\int\limits_1^2\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x\\&=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2=2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1=\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2}{2}=\frac{\sqrt{32}-\sqrt{12}-2}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $a = 32, b = 12, c = 2 \Rightarrow P = a - b + c = 32 - 12 + 2 = 22$.

Chọn đáp án D □

Câu 295. Cho $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = a\sqrt{\mathrm{e}} + b$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính $P = a \cdot b$.

A. $P = -8$. **B.** $P = 8$. **C.** $P = -4$. **D.** $P = 4$.

Lời giải.

— Ta có

$$\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4\int\limits_1^{\mathrm{e}} \ln\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x}\right) = 4\int\limits_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \ln x\,\mathrm{d}x = 4\left(x\ln x - x\right)\Big|_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} = -2\sqrt{\mathrm{e}} + 4.$$

— Vậy $a = -2$ và $b = 4 \Rightarrow P = a \cdot b = 8$.

Chọn đáp án A □

Câu 296. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = 7$ và $\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^1 \left[f(x) + 2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{17}{5}$. **B.** 3. **C.** $\frac{15}{4}$. **D.** 6.

Lời giải.

— Ta có

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \quad &\Leftrightarrow \quad f(x)\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^3}{3}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\int\limits_0^1 \frac{x^3}{3}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\\
&\Leftrightarrow \quad \int\limits_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = -1.\\
&\Rightarrow \quad \int\limits_0^1 14x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = -14.
\end{aligned}$$

— Ta lại có $\int\limits_0^1 49x^6\,\mathrm{d}x = 7$.

— Suy ra

$$\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 14x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 49x^6\,\mathrm{d}x = 7 - 14 + 7 = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \left[f'(x) + 7x^3\right]^2\mathrm{d}x = 0.$$

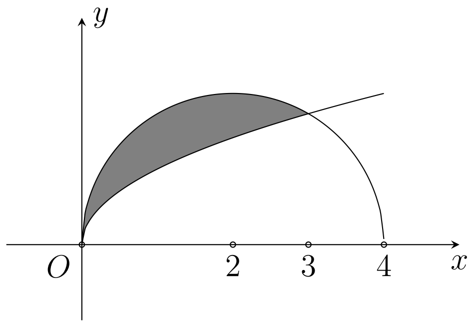
$$\Rightarrow f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = \frac{-7}{4}x^4 + \mathrm{C} \Rightarrow f(1) = -\frac{7}{4} + \mathrm{C} = 0 \Rightarrow \mathrm{C} = \frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{-7}{4}x^4 + \frac{7}{4}.$$

— Vậy $\int\limits_0^1 \left[f(x) + 2\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(-\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4} + 2\right)\mathrm{d}x = \frac{17}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 297.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{x}$ và nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{4x-x^2}$ (với $0\le x\le 4$) (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\dfrac{4\pi+15\sqrt{3}}{24}$. **B.** $\dfrac{8\pi-9\sqrt{3}}{6}$.

C. $\dfrac{10\pi-9\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{10\pi-15\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Với $0\le x\le 4$ thì $\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{x}\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy diện tích cần tính là

$$S=\int\limits_0^3\left(\sqrt{4x-x^2}-\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x-2\sqrt{3}.$$

Đặt $x-2=2\sin t\Rightarrow\ \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$, suy ra

$$\int\limits_0^3\sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}2(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=(2t+\sin 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{8\pi+3\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy $S=\dfrac{8\pi+3\sqrt{3}}{6}-2\sqrt{3}=\dfrac{8\pi-9\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 298. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b\,(a<b)$ được tính theo công thức

A. $S=\displaystyle\int\limits_a^b(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int\limits_a^b|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\displaystyle\int\limits_a^b(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S=\pi\displaystyle\int\limits_a^b(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức đúng là $S=\displaystyle\int\limits_a^b|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 299. Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3}x-2}{x+3}=a$ là một số thực. Khi đó giá trị của a^2 bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3}x-2}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3}-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}=\sqrt{3}\Rightarrow a=\sqrt{3}\Rightarrow a^2=3$.

Chọn đáp án B □

Câu 300. Biết $\displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c+\frac{1}{2}\ln(3\sqrt{2}-3)$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $P = a+b+c$.

A. $P = \frac{1}{2}$. **B**. $P = -1$. **C**. $P = -\frac{1}{2}$. **D**. $P = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{(1+x-\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x}{2x} = \left(\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}x\right)\Big|_1^{\sqrt{3}} - \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2x^2}\,\mathrm{d}x.$

$= \frac{1}{2}\ln\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} - I.$

Xét $I = \displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2x^2}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = \sqrt{1+x^2}$, khi đó $t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$.

Ta có

$$I = \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{t^2}{2(t^2-1)}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\left[t\Big|_{\sqrt{2}}^{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right]\Big|_{\sqrt{2}}^{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[2-\sqrt{2}\ln\sqrt{3} - \ln(\sqrt{2}-1)\right].$$

Vậy $I = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(3\sqrt{2}-3)$.

Do đó $P = a+b+c = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 301. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = 1$ và $\displaystyle\int\limits_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x = 4$. Giá trị của tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 [f(x)]^3\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B**. 8. **C**. 10. **D**. 80.

Lời giải.

Xét $\displaystyle\int\limits_0^1 [f(x)+(ax+b)]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^1 [f(x)\cdot(ax+b)]\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 (ax+b)^2\,\mathrm{d}x$

$= 4 + 2a\displaystyle\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x + 2b\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3a}(ax+b)\Big|_0^1 = 4 + 2(a+b) + \frac{a^2}{3} + ab + b^2.$

Cần xác định a, b sao cho $\frac{a^2}{3} + (2+b)a + b^2 + 2b + 4 = 0. \quad (1)$

Có $\Delta_{(a)} = b^3 + 4b + 4 - \dfrac{4}{3}(b^2 + 2b + 4) = -\dfrac{(b-2)^2}{3} \leq 0$ nên (1) $\Leftrightarrow b = 2$ và $a = -6$.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^1 [f(x) - 6x + 2]\,\mathrm{d}x = 0$ nên $f(x) = 6x - 2$.

Vậy $\displaystyle\int\limits_0^1 [f(x)]^3\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (6x-2)^3\,\mathrm{d}x = 10$.

Chọn đáp án C □

Câu 302. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ là

A. $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$.
B. $F(x) = \cos 2x + C$.
C. $F(x) = \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$.
D. $F(x) = -\cos 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\cos 2x}{2} + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 303. Nếu $\displaystyle\int\limits_a^d f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ và $\displaystyle\int\limits_b^d f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ (với $a < d < b$) thì $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3.
B. 7.
C. $\dfrac{5}{2}$.
D. 10.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_d^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^d f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^d f(x)\,\mathrm{d}x = 5 - 2 = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 304. Cho $\displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x = a \cdot \ln 2 + b$ (với a, b là các số nguyên). Khi đó giá trị của a là

A. -7.
B. 7.
C. 5.
D. -5.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_0^1 \frac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 \frac{2(x-2)+7}{x-2}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 \left(2 + \frac{7}{x-2}\right)\mathrm{d}x = -\left(2x + 7\ln|x-2|\right)\Big|_0^1 = 7\ln 2 - 2.$$

Do đó $a = 7$.

Chọn đáp án B □

Câu 305. Một ô tô đang chạy với vận tốc v_0 m/s thì gặp chướng ngại vật nên người lái xe đã đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a(t) = -8t$ m/s^2 trong đó t là thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được 12 m. Tính v_0.

A. $\sqrt[3]{1269}$ m/s.
B. $\sqrt[3]{36}$ m/s.
C. 12 m/s.
D. 16 m/s.

Lời giải.

Ta có $v(t) = \displaystyle\int a(t)\,\mathrm{d}t = -4t^2 + C$.

— Tại thời điểm $t = 0$, ta có $v_0 = C$.

— Tại thời điểm ô tô dừng hẳn $t = t_1$ ta có $v(t_1) = 0 \Leftrightarrow -4t_1^2 + C = 0 \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{\sqrt{C}}{2}$.
Kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được 12 m, do đó

$$\int\limits_0^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t = 12 \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{3}t^3 + Ct\right)\Big|_0^{t_1} = 12$$
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{4}{3}t_1^3 + Ct_1 = 12 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}\cdot\frac{C\sqrt{C}}{8} + \frac{C\sqrt{C}}{2} = 12$$
$$\Leftrightarrow \quad C\sqrt{C} = 36 \Leftrightarrow C = \sqrt[3]{1296}.$$

Vậy $v_0 = \sqrt[3]{1296}$.
Chọn đáp án A □

Câu 306. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;4]$ và $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int\limits_{-1}^{1} f\left(|3x-1|\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 4$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = \dfrac{4}{3}$. **D.** $I = 1$.

Lời giải.
Đặt $3x - 1 = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{3}$.
Khi $x = -1$ thì $t = -4$; khi $x = 1$ thì $t = 2$.
Ta có $I = \dfrac{1}{3}\int\limits_{-4}^{2} f\left(|t|\right)\,\mathrm{d}t \Rightarrow 3I = \int\limits_{-4}^{0} f\left(|t|\right)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{2} f\left(|t|\right)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-4}^{0} f\left(-t\right)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{2} f\left(t\right)\,\mathrm{d}t = J + 1$.
Tính $J = \int\limits_{-4}^{0} f\left(-t\right)\,\mathrm{d}t$. Đặt $-t = x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$.
Khi $t = -4$ thì $x = 4$; khi $t = 0$ thì $x = 0$.
Suy ra $J = -\int\limits_{4}^{0} f\left(x\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{4} f\left(x\right)\,\mathrm{d}x = 3$.
Vậy $3I = 4 \Leftrightarrow I = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 307. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^{1} \dfrac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 1$. Tính $\int\limits_0^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải.
Xét $A = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x$.
Đặt $t = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}t = \left(1 + \tan^2 x\right)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Khi $x=0$ thì $t=0$; khi $x=\dfrac{\pi}{4}$ thì $t=1$.

Ta có $A=\displaystyle\int_0^1 \dfrac{f(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 \dfrac{f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 \dfrac{f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=3 \quad (1).$

Mà theo giả thiết, ta có $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^2f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=1 \quad (2).$

Lấy (1) cộng (2) vế với vế, ta được $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^2f(x)+f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=4 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=4.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 308. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$, biết $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0$, $f(x)>0\ \forall x>0$ và $f(2)=\dfrac{1}{15}$. Tính $S=f(1)+f(2)+f(3)$.

A. $S=\dfrac{7}{15}$. **B.** $S=\dfrac{11}{15}$. **C.** $S=\dfrac{11}{30}$. **D.** $S=\dfrac{7}{30}$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có

$$\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-(2x+4)\Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x=-\int(2x+4)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{f^2(x)}=-\int(2x+4)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\dfrac{1}{f(x)}=x^2+4x+C$. Vì $f(2)=\dfrac{1}{15}\Rightarrow C=3$ nên $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$.

Do đó $S=f(1)+f(2)+f(3)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{7}{30}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 309. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=1+2x+3x^2$ thỏa mãn $F(1)=2$. Tính $F(0)+F(-1)$.

A. -3. **B.** -4. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(1+2x+3x^2)dx=x+x^2+x^3+c$.

Mà $F(1)=2\Rightarrow c=-1$ hay $F(x)=x+x^2+x^3-1$.

Do đó $F(0)+F(-1)=-3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 310. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x & \text{khi } x\geq 1\\ 1 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=4$. **B.** $I=2$. **C.** $I=\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 1\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 311. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+x\cdot f'(x)=3x^2+2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $f(1)$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

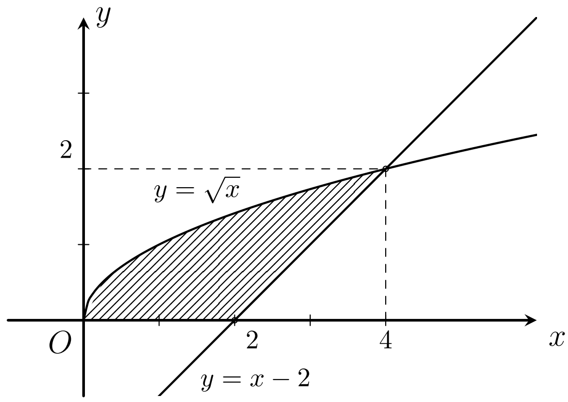
Lời giải.
Theo giả thiết $f(x)+x\cdot f'(x)=3x^2+2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $(xf(x))'=3x^2+2x\Rightarrow\displaystyle\int_0^1(xf(x))'\,\mathrm{d}x=\int_0^1(3x^2+2x)\,\mathrm{d}x=2\Rightarrow(xf(x))\Big|_0^1=2\Rightarrow f(1)=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 312.
Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$ và trục hoành (hình vẽ). Quay (H) xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành.

A. $\dfrac{10\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{16\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{7\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{8\pi}{3}$.



Lời giải.
Dựa vào đồ thị, ta có

$$V_{(H)}=\pi\int_0^4(\sqrt{x})^2\ \mathrm{d}x-\pi\int_2^4(x-2)^2\ \mathrm{d}x=\frac{16\pi}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 313. Biết $\displaystyle\int_1^2\frac{4\mathrm{d}x}{(x+4)\sqrt{x}+x\sqrt{x+4}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-d$ với a,b,c,d là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c+d$.

A. 48. **B.** 46. **C.** 54. **D.** 52.

Lời giải.
Ta có

$$I=\int_1^2\frac{4\,\mathrm{d}x}{(x+4)\sqrt{x}+x\sqrt{x+4}}=\int_1^2\frac{4}{\sqrt{x(x+4)}\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x}\right)}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+4)}}\,\mathrm{d}x.$$

Khi đó,

$$I=\int_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+4}}\right)\mathrm{d}x=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+4}\right)\Big|_1^2=2\sqrt{2}-2\sqrt{6}-2+2\sqrt{5}=\sqrt{8}+\sqrt{20}-\sqrt{24}-2.$$

Suy ra $a=8$, $b=20$, $c=24$, $d=2$. Do đó, $P=54$.

Chọn đáp án C □

Câu 314. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và $f(0)=0$, $f'(1)=\dfrac{9}{2}$, $\displaystyle\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\frac{39}{4}$, $\displaystyle\int_0^1(x^2+x)f''(x)\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{14}{3}$. **B.** $I=14$. **C.** $I=\dfrac{7}{3}$. **D.** $I=7$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{5}{2}=\displaystyle\int_0^1 (x^2+x)f''(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (x^2+x)\,\mathrm{d}f'(x)=(x^2+x)f'(x)\big|_0^1-\int_0^1 (2x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 (2x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{13}{2}\quad (1).$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \left[4[f'(x)]^2-12(2x+1)f'(x)+9(2x+1)^2\right]\,\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \left[2f'(x)-3(2x+1)\right]^2\,\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow 2f'(x)-3(2x+1)=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{3(x^2+x)}{2}+C$

Từ $f(0)=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{3(x^2+x)}{2}$. Vậy $I=\displaystyle\int_0^2 \frac{3(x^2+x)}{2}\,\mathrm{d}x=7$.

Chọn đáp án D □

Câu 315. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}\ln x$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$.

B. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-1)+C$.

D. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\end{cases}$.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x-\int\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x-\frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 316. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P)\colon y=x^2$ và đường thẳng $d\colon y=2x$ quay xung quanh trục Ox.

A. $\pi\displaystyle\int_0^2 \left(x^2-2x\right)^2\,\mathrm{d}x$.

B. $\pi\displaystyle\int_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$.

C. $\pi\displaystyle\int_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x+\pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$.

D. $\pi\displaystyle\int_0^2 \left(2x-x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

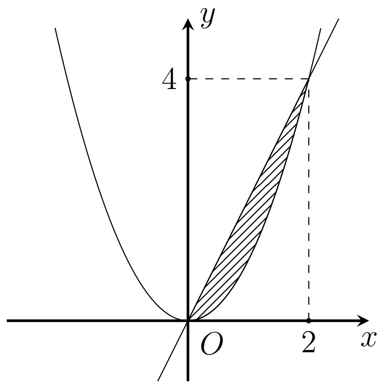
Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ là

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay xung quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_0^2 4x^2 \, \mathrm{d}x - \pi \int_0^2 x^4 \, \mathrm{d}x.$$



Chọn đáp án B □

Câu 317. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{2+\pi}{8}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{2+\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Đặt $x = \tan t$ với $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, suy ra $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\cos^2 t} \cdot \mathrm{d}t$.

— Khi $x = 0$ thì $t = 0$.

— Khi $x = 1$ thì $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan t) \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t = t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 318. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f'(x) \geq x + \dfrac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$ và $f(1) = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(2)$.

A. 3. **B.** 2. **C.** $\dfrac{5}{2} + \ln 2$. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $f(2) - f(1) = \displaystyle\int_1^2 f'(x) \, \mathrm{d}x \geq \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) \, \mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{3}{2} + \ln 2.$

Do đó $\min f(2) = \dfrac{3}{2} + \ln 2 + f(1) = \dfrac{5}{2} + \ln 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 319. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \mathrm{e}^{x-1}$, các trục tọa độ và phần đường thẳng $y = 2 - x$ với $x \geq 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

A. $V = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2\mathrm{e}^2}$. **B.** $V = \dfrac{\pi\left(5\mathrm{e}^2 - 3\right)}{6\mathrm{e}^2}$. **C.** $V = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}}\pi$. **D.** $V = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2\mathrm{e}^2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\mathrm{e}^{x-1} = 2 - x \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x-1} + x - 2 = 0 \;\; (1)$

Hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{x-1} + x - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và (1) có nghiệm $x = 1$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Đường thẳng $y = 2 - x$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 2$.
Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left(e^{x-1}\right)^2 \mathrm{d}x + \pi \int_1^2 (2-x)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^1 e^{2x-2} \mathrm{d}x + \pi \int_1^2 (2-x)^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\pi \, \mathrm{e}^{2x-2}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\pi \, (2-x)^3\Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + \frac{1}{3}\pi = \frac{\pi\left(5\mathrm{e}^2 - 3\right)}{6\mathrm{e}^2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 320. Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên miền $D = [a; b]$ có đồ thị là một đường cong (C). Gọi S là phần giới hạn bởi (C) và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Người ta chứng minh được rằng độ dài đường cong S bằng $\int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x$. Theo kết quả trên, độ dài đường cong S là phần đồ thị của hàm số $f(x) = \ln x$ bị giới hạn bởi các đường $x = 1$, $x = \sqrt{3}$ là $m - \sqrt{m} + \ln \dfrac{1 + \sqrt{m}}{\sqrt{n}}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$ thì giá trị $m^2 - mn + n^2$ là bao nhiêu?

A. 6. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $S = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}\, \mathrm{d}x = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \dfrac{x\sqrt{1 + x^2}}{x^2}\, \mathrm{d}x.$

Đặt $u = \sqrt{1 + x^2} \Rightarrow u^2 = 1 + x^2 \Rightarrow u\,\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}x$.

Khi $x = 1$ thì $u = \sqrt{2}$.

Khi $x = \sqrt{3}$ thì $u = 2$.

Nên

$$\begin{aligned} S = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{u^2}{u^2 - 1}\, \mathrm{d}u &= \int_{\sqrt{2}}^2 \mathrm{d}u + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{(u-1)(u+1)}\, \mathrm{d}u \\ &= \int_{\sqrt{2}}^2 \mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) \mathrm{d}u \\ &= u\Big|_{\sqrt{2}}^2 + \frac{1}{2}\ln\left.\frac{u-1}{u+1}\right|_{\sqrt{2}}^2 = 2 - \sqrt{2} + \ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Do đó $m = 2$, $n = 3$. Bởi vậy $m^2 - mn + n^2 = 7$.

Chọn đáp án B □

Câu 321. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x$ là

A. $\dfrac{5^x}{\ln 5} + C$. **B.** $5^x \cdot \ln 5 + C$. **C.** $\dfrac{5^{x+1}}{x+1} + C$. **D.** $5^{x+1} + C$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int a^x\, \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, ta được

$$\int 5^x \,\mathrm{d}x = \frac{5^x}{\ln 5} + C.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 322. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành bằng

A. $\frac{16}{15}$. **B.** $\frac{4\pi}{3}$. **C.** $\frac{16\pi}{15}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay bằng

$$V = \pi \int\limits_1^3 (x^2 - 4x + 3)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_1^3 (x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9) \,\mathrm{d}x = \frac{16\pi}{15}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 323. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và $\int\limits_1^2 (x-1)f'(x) \,\mathrm{d}x = a$. Tính $\int\limits_1^2 f(x) \,\mathrm{d}x$ theo a và $b = f(2)$.

A. $a - b$. **B.** $a + b$. **C.** $b - a$. **D.** $-b - a$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int\limits_\alpha^\beta u \,\mathrm{d}v = uv\Big|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta v \,\mathrm{d}u$, ta có

$$\begin{aligned} a &= \int\limits_1^2 (x-1)f'(x) \,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 (x-1) \,\mathrm{d}\left(f(x)\right) = (x-1)f(x)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 f(x) \,\mathrm{d}x \\ &= f(2) - \int\limits_1^2 f(x) \,\mathrm{d}x = b - \int\limits_1^2 f(x) \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\int\limits_1^2 f(x) \,\mathrm{d}x = b - a$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 324. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $2 \cdot f(3x) + 3 \cdot f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{15x}{2}$, $\int\limits_3^9 f(x) \,\mathrm{d}x = k$. Tính $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right) \,\mathrm{d}x$.

A. $I = -\frac{45+k}{9}$. **B.** $I = \frac{45-k}{9}$. **C.** $I = \frac{45+k}{9}$. **D.** $I = \frac{45-2k}{9}$.

Lời giải.

Từ giả thiết $2 \cdot f(3x) + 3 \cdot f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{15x}{2}$, suy ra

$$2\int\limits_1^3 f(3x) \,\mathrm{d}x + 3\int\limits_1^3 f\left(\frac{2}{x}\right) \,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \left(-\frac{15x}{2}\right) \,\mathrm{d}x = -30.$$

Xét tích phân $K = \int\limits_1^3 f(3x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 3x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}t$. Với $x = 1 \Rightarrow t = 3$; $x = 3 \Rightarrow t = 9$. Suy ra

$$K = \int\limits_3^9 f(t)\frac{1}{3}\,\mathrm{d}t = \frac{k}{3}.$$

Xét tích phân $L = \int\limits_1^3 f\left(\dfrac{2}{x}\right)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\dfrac{1}{t} = \dfrac{2}{x} \Leftrightarrow x = 2t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$. Với $x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$; $x = 3 \Rightarrow t = \dfrac{3}{2}$. Suy ra

$$L = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{t}\right) 2\,\mathrm{d}t = 2I.$$

Vậy ta có

$$2 \cdot \frac{k}{3} + 3 \cdot 2I = -30 \Leftrightarrow I = -\frac{45+k}{9}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 325. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+x^4}$, $f(1) = a$ và $f(-2) = b$. Giá trị của biểu thức $f(-1) - f(2)$ bằng

A. $a+b$. **B.** $b-a$. **C.** $a-b$. **D.** $-a-b$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{x^2+x^4}\,\mathrm{d}x = \int \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} - \arctan x + C$.

Do hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ nên liên tục trên từng khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$. Do đó, hàm số $f(x)$ có dạng $\begin{cases} -\dfrac{1}{x} - \arctan x + C_1, & \text{nếu } x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} - \arctan x + C_2, & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$

Thay $x = 1$, ta được $a = -\dfrac{1}{1} - \arctan 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = a + 1 + \dfrac{\pi}{4}$.

Thay $x = -2$, ta được $b = -\dfrac{1}{-2} - \arctan(-2) + C_1 \Rightarrow C_1 = b - \dfrac{1}{2} - \arctan 2$.

Do đó

$$\begin{aligned} f(-1) - f(2) &= \left[-\frac{1}{-1} - \arctan(-1) + b - \frac{1}{2} - \arctan 2\right] - \left[-\frac{1}{2} - \arctan 2 + a + 1 + \frac{\pi}{4}\right] \\ &= b - a. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 326. Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos 2x + 3\sin 2x)\ln(\cos x + 2\sin x)\,\mathrm{d}x = c\ln 2 - \dfrac{a}{b}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = -11$. **B.** $T = 5$. **C.** $T = 7$. **D.** $T = 9$.

Lời giải.

Gọi I là tích phân đã cho. Ta có

$$\begin{aligned}[\ln(\cos x+2\sin x)]' &= \frac{-\sin x+2\cos x}{\cos x+2\sin x} = \frac{(-\sin x+2\cos x)(\cos x+2\sin x)}{(\cos x+2\sin x)^2}\\ &= \frac{2\cos 2x+3\sin x\cos x}{\cos^2 x+4\sin^2 x+4\sin x\cos x}\\ &= \frac{4\cos 2x+3\sin 2x}{4\sin 2x-3\cos 2x+5}.\end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} u=\ln(\cos x+2\sin x)\\ \mathrm{d}v=(4\cos 2x+3\sin 2x)\,\mathrm{d}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{4\cos 2x+3\sin 2x}{4\sin 2x-3\cos 2x+5}\,\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}\cdot(4\sin 2x-3\cos 2x+5)\end{cases}.$

Suy ra

$$I=\frac{1}{2}(4\sin 2x-3\cos 2x+5)\cdot\ln(\cos x+2\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos 2x+3\sin 2x)\,\mathrm{d}x$$

$$=4\ln 2-\frac{1}{2}\left(2\sin 2x-\frac{3}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=4\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)=4\ln 2-\frac{3}{2}.$$

Vậy $c=4,\ a=3,\ b=2$. Suy ra $T=a+b+c=9$.

Chọn đáp án D □

Câu 327. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$.

A. $F(x)=\mathrm{e}^x+C$. **B.** $F(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}+C$. **C.** $F(x)=\mathrm{e}^{2x}+C$. **D.** $F(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+C$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 328. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và thỏa mãn $f(-1)=4$; $f(3)=7$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{3}5f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=20$. **B.** $I=3$. **C.** $I=10$. **D.** $I=15$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{3}5f'(x)\,\mathrm{d}x=5\left.f(x)\right|_{-1}^{3}=5\left(f(3)-f(-1)\right)=15$.

Chọn đáp án D □

Câu 329. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall c\in\mathbb{R}$.

C. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

D. $\int\limits_{a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Lời giải.

Ta không biết được hàm số $y = f(x)$ có liên tục tại c hay không, nên biểu thức $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\forall c \in \mathbb{R}$ sai.

Chọn đáp án B ☐

Câu 330. Cho $\int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 12$, tính giá trị của tích phân $I = \int\limits_{2}^{6} f\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 24$. **B**. $I = 10$. **C**. $I = 6$. **D**. $I = 14$.

Lời giải.

Đặt $u = \frac{x}{2} \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{2} \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}u$.

Đổi cận

— Với $x = 2$ suy ra $u = 1$.

— Với $x = 6$ suy ra $u = 3$.

Suy ra $I = 2\int\limits_{1}^{3} f(u)\,\mathrm{d}u = 24$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 331. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ thỏa mãn $(f(0) - f(2))(f(3) - f(2)) > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ có hai cực trị.

B. Phương trình $f(x) = 0$ luôn có 3 nghiệm phân biệt.

C. Hàm số $f(x)$ không có cực trị.

D. Phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Do $(f(0) - f(2))(f(3) - f(2)) > 0$ nên ta có hai trường hợp:

— $\begin{cases} f(0) - f(2) > 0 \\ f(3) - f(2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2) - f(0) = \int\limits_{0}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x < 0 \\ f(3) - f(2) = \int\limits_{2}^{3} f'(x)\,\mathrm{d}x > 0. \end{cases}$

Từ đó suy ra $\exists x_1 \in (0;2)$, $f'(x_1) < 0$ và $\exists x_2 \in (2;3)$, $f'(x_2) > 0$, suy ra $f'(x_1)f'(x_2) < 0$, suy ra $f'(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(x_1; x_2)$, kết hợp $f'(x) = 0$ là phương trình bậc hai suy ra $f'(x) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số có hai cực trị.

— $\begin{cases} f(0) - f(2) < 0 \\ f(3) - f(2) < 0 \end{cases}$. Tương tự, hàm số cũng có hai cực trị.

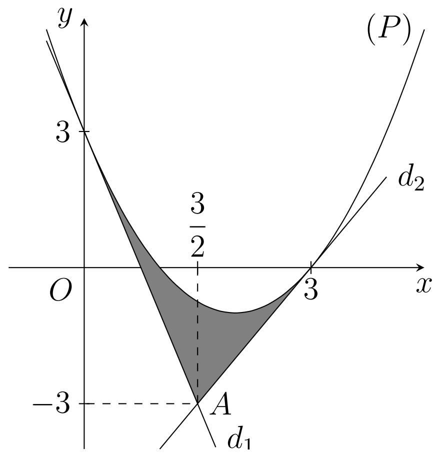
Còn việc kết luận số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, ta chưa đủ điều kiện kết luận.

Chọn đáp án (A) □

Câu 332. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4x + 3\,(P)$ và các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A\left(\frac{3}{2}; -3\right)$ đến đồ thị (P). Tính giá trị của S.

A. $S = 9$. **B.** $S = \frac{9}{8}$. **C.** $S = \frac{9}{4}$. **D.** $S = \frac{9}{2}$.

Lời giải.



Ta có $y' = f'(x) = 2x - 4$.

Giả sử đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị (P) tại điểm $M(x_0; y_0)$, suy ra đường thẳng d có dạng

$$d\colon y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Đường thẳng d đi qua điểm A, nên ta có

$$(2x_0 - 4)\left(\frac{3}{2} - x_0\right) + x_0^2 - 4x_0 + 3 = -3$$

$$\Leftrightarrow 3x_0 - 6 - 2x_0^2 + 4x_0 + x_0^2 - 4x_0 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x_0^2 + 3x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 3. \end{array}\right.$$

— Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 3$, suy ra phương trình tiếp tuyến d_1 tại điểm $M_1(0;3)$ là $y = -4x + 3$.

— Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 0$, suy ra phương trình tiếp tuyến d_2 tại điểm $M_2(3;0)$ là $y = 2x - 6$.

Từ đó suy ra diện tích hình giới hạn

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \left|(x^2 - 4x + 3) - (-4x + 3)\right|\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left|(x^2 - 4x + 3) - (2x - 6)\right|\,\mathrm{d}x = \frac{9}{4}.$$

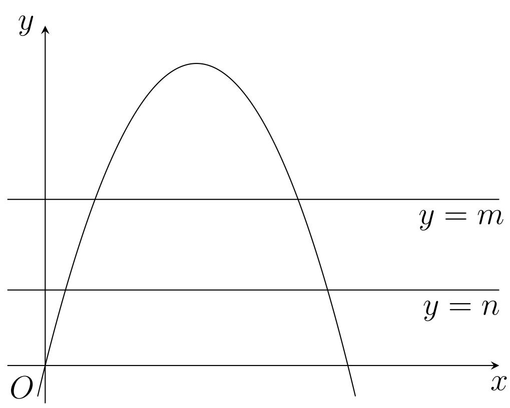
Chọn đáp án (C) □

Câu 333.

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y = m$, $y = n$ chia hình (H) thành 3 phần có diện tích bằng nhau (*ta có thể tham khảo hình vẽ*). Tính giá trị biểu thức $T = (4 - m)^3 + (4 - n)^3$.

A. $T = \frac{320}{9}$. **B.** $T = \frac{75}{2}$.

C. $T = \frac{512}{15}$. **D.** $T = 405$.



Lời giải.

Hoành độ giao điểm giữa parabol và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$-x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng (H) là $S = \displaystyle\int_0^4 \left|-x^2 + 4x\right|\,\mathrm{d}x = \frac{32}{3}$.

Ta có
$$-x^2+4x=y \Leftrightarrow x^2-4x+y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-\sqrt{4-y} \\ x=2+\sqrt{4-y} \end{array}\right. \ (y<4).$$
Suy ra diện tích hình giới hạn bởi $y=n$, $y=-x^2+4x$ và trục hoành là
$$S_1=\int\limits_0^n \left|\left(2+\sqrt{4-y}\right)-\left(2-\sqrt{4-y}\right)\right| \mathrm{d}y=\int\limits_0^n 2\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y=-\frac{4\sqrt{(4-y)^3}}{3}\Bigg|_0^n=\frac{32}{3}-\frac{4\sqrt{(4-n)^3}}{3}.$$
Tương tự ta có diện tích hình giới hạn bởi $y=m$, $y=-x^2+4x$ và trục hoành là
$$S_2=\frac{32}{3}-\frac{4\sqrt{(4-m)^3}}{3}.$$
Để hai đường thẳng $y=n$, $y=m$ chia (H) thành ba phần có diện tích bằng nhau khi và chỉ khi
$$\begin{cases} S_1=\dfrac{32}{9} \\ S_2=\dfrac{64}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{32}{3}-\dfrac{4\sqrt{(4-n)^3}}{3}=\dfrac{32}{9} \\ \dfrac{32}{3}-\dfrac{4\sqrt{(4-m)^3}}{3}=\dfrac{64}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4\sqrt{(4-n)^3}}{3}=\dfrac{64}{9} \\ \dfrac{4\sqrt{(4-m)^3}}{3}=\dfrac{32}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-n)^3=\dfrac{256}{9} \\ (4-m)^3=\dfrac{64}{9} \end{cases}.$$
Từ đó suy ra $T=(4-m)^3+(4-n)^3=\dfrac{320}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 334. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$.
Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$.

A. $\dfrac{x+3}{2\left(x^2+4\right)}+C$. **B.** $\dfrac{x+3}{x^2+4}+C$. **C.** $\dfrac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)}+C$. **D.** $\dfrac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)}+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int 2f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}\right)=\frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{\sqrt{x+1}^2+4}+C$,

suy ra $\displaystyle\int f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}\right)=\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}^2+4}+C$

Từ đó suy ra $\displaystyle\int f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(2x)\,\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+3}{(2x)^2+4}+C=\frac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)}+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 335. Biết rằng $\displaystyle\int\limits_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}$, ở đó a, $b\in\mathbb{Z}^+$ và $4<a+\sqrt{b}<5$. Tính tổng $S=a+b$.

A. $S=5$. **B.** $S=7$. **C.** $S=4$. **D.** $S=6$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\frac{\pi}{6}=\int\limits_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\mathrm{d}x=\int\limits_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\mathrm{d}x.$ (∗)

Đặt $x-3=2\sin t$, suy ra $\mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=4\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$ và $x=a+\sqrt{b}\Rightarrow t=\arcsin\left(\dfrac{a+\sqrt{b}-3}{2}\right)$.

Thay vào (∗) ta có $\displaystyle\frac{\pi}{6}=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin\left(\frac{a+\sqrt{b}-3}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t=\arcsin\left(\frac{a+\sqrt{b}-3}{2}\right)-\frac{\pi}{6}.$

Từ đó suy ra $\arcsin\left(\dfrac{a+\sqrt{b}-3}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow\dfrac{a+\sqrt{b}-3}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a=3,\ b=3$.

Vậy $S=a+b=6$.

Chọn đáp án D □

Câu 336. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+x$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $F(x)=2\ln|x|+\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{2}+C$. **B.** $F(x)=\ln x-\ln x^2+\dfrac{x^2}{2}+C$.

C. $F(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{2}+C$. **D.** $F(x)=\ln|x|+\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{2}+C$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=2\ln|x|+\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{2}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 337. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=20$, $\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=2$. Tính $\int\limits_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 22. **B.** 18. **C.** -18. **D.** -22.

Lời giải.

$$\int\limits_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=-18.$$

Chọn đáp án C □

Câu 338. Một ô tô chuyển động thẳng với vận tốc ban đầu bằng 10 m/s và gia tốc $a(t)=-2t+8$ m/s^2, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây. Hỏi từ lúc chuyển động đến lúc có vận tốc lớn nhất thì xe đi được quãng đường bao nhiêu?

A. $\dfrac{128}{3}$ m. **B.** $\dfrac{248}{3}$ m. **C.** 70 m. **D.** 80 m.

Lời giải.

Ta có vận tốc ô tô là $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int(-2t+8)\mathrm{d}t=-t^2+8t+C$. Vì vận tốc ban đầu là 10 m/s nên ta có $v(t)=-t^2+8t+10=-(t-4)^2+26\geq 26$. Vậy vận tốc lớn nhất của ô tô bằng 26 m/s, đạt được khi $t=4$. Do đó quãng đường xe đi được kể từ lúc chuyển động đến lúc có vận tốc lớn nhất là:

$$S=\int\limits_0^4 v(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^4(-t^2+8t+10)\mathrm{d}t=\frac{248}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 339. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{\ln x}, y=0$ và $x=2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) quanh trục Ox.

A. $V=2\pi\ln 2$. **B.** $V=2\pi(\ln 2-1)$. **C.** $V=\pi(2\ln 2-1)$. **D.** $V=\pi(\ln 2+1)$.

Lời giải.

Ta có $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, suy ra thể thích $V = \pi \int\limits_1^2 \ln x \mathrm{d}x = \pi(2\ln 2 - 1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 340. Có bao nhiêu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn

$$\int\limits_0^1 (f(x))^{2018}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (f(x))^{2019}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (f(x))^{2020}\,\mathrm{d}x.$$

A. 3 . **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$\int\limits_0^1 (f(x))^{2018}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 (f(x))^{2020}\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 (f(x))^{2019}\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 (f(x))^{2018}(f(x)-1)^2\,\mathrm{d}x = 0.$

Do đó hoặc $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = 1$. Vì $f(x)$ liên tục nên $f(x) = 0, \forall x \in [0;1]$ hoặc $f(x) = 1, \forall x \in [0;1]$.

Chọn đáp án B □

Câu 341. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(0) = f(2) = 0$, $\max\limits_{[0;2]} |f''(x)| = 1$ và $\left|\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \dfrac{2}{3}$. Tính $\left|\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

A. $\dfrac{11}{12}$. **B.** $\dfrac{11}{24}$. **C.** $\dfrac{37}{12}$. **D.** $\dfrac{37}{24}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x \geq & \left|\int\limits_0^2 f''(x)(2x-x^2)\,\mathrm{d}x\right| \\
= & \left| f'(x)(2x-x^2)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 f'(x)(2-2x)\,\mathrm{d}x \right| \\
= & \left|\int\limits_0^2 f'(x)(2-2x)\,\mathrm{d}x\right| \\
= & \left| f(x)(2-2x)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 f(x)(-2)\,\mathrm{d}x \right| \\
= & 2\left|\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
= & \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Mà $\int\limits_0^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3}$. Từ đó suy ra

$$\int\limits_0^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left|\int\limits_0^2 f''(x)(2x - x^2)\,\mathrm{d}x\right| \Leftrightarrow |f''(x)| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x) = -1 \\ f''(x) = 1 \end{array}\right..$$

Mặt khác $f''(x)$ liên tục trên $[0;2]$ nên $\left[\begin{array}{l} f''(x) = -1, \forall x \in [0;2] \\ f''(x) = 1, \ \forall x \in [0;2] \end{array}\right.$.

① $f''(x) = -1$ khi đó $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + C_1x + C_2$. Vì $f(0) = f(2) = 0$ nên $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + x$.

Khi đó $\left|\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \dfrac{11}{24}$.

② $f''(x) = 1$ khi đó $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + C_1x + C_2$. Vì $f(0) = f(2) = 0$ nên $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x$.

Khi đó $\left|\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \dfrac{11}{24}$.

Chọn đáp án B □

Câu 342. Tìm nguyên hàm $I = \displaystyle\int \left(\mathrm{e}^{-x} + 2x\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -\mathrm{e}^{-x} + x^2 + C$. **B.** $I = \mathrm{e}^{-x} + x^2 + C$.

C. $I = -\mathrm{e}^{-x} - x^2 + C$. **D.** $I = \mathrm{e}^{-x} - x^2 + C$.

Lời giải.

$I = \displaystyle\int \left(\mathrm{e}^{-x} + 2x\right)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x} + x^2 + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 343. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x$, biết $F(0) = 4$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = \mathrm{e}^x + 2$. **B.** $F(x) = \mathrm{e}^x + 3$. **C.** $F(x) = \mathrm{e}^x + 4$. **D.** $F(x) = \mathrm{e}^x + 1$.

Lời giải.

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \mathrm{e}^x$ nên $F(x) = \mathrm{e}^x + C$. Lại có $F(0) = 4$ nên $C = 3$ hay $F(x) = \mathrm{e}^x + 3$.

Chọn đáp án B □

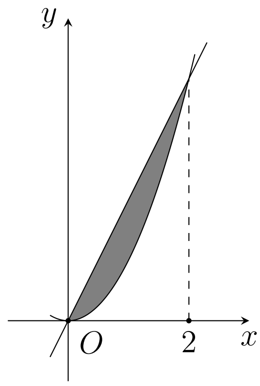
Câu 344. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = 2x$.

A. $S = \dfrac{5}{3}$ (đvdt). **B.** $S = \dfrac{14}{3}$ (đvdt). **C.** $S = \dfrac{20}{3}$ (đvdt). **D.** $S = \dfrac{4}{3}$ (đvdt).

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$



Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int\limits_0^2 \left(2x - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 345. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1;3]$, đồng thời thỏa mãn $\int\limits_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10$ và $\int\limits_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $\int\limits_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải.

Đặt $a = \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, $b = \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} a+3b=10 \\ 2a-b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2. \end{cases}$$

Vậy $\int\limits_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = a+b = 6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 346. Tìm số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int\limits_1^m (\ln x + 1)\,\mathrm{d}x = m$.

A. $m = \mathrm{e}+1$. **B.** $m = 2\mathrm{e}$. **C.** $m = \mathrm{e}^2$. **D.** $m = \mathrm{e}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} m &= \int\limits_1^m (\ln x+1)\,\mathrm{d}x = x(\ln x+1)\Big|_1^m - \int\limits_1^m \mathrm{d}x \\ &= m(\ln m+1) - 1 - \left(x\Big|_1^m\right) = m\ln m. \end{aligned}$$

Do $m > 1$ nên $m = \mathrm{e}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 347. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[a;b]$ và $f(a) = f(b)$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$.

B. $\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = 1$.

C. $\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(b-a)$.

D. $\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = 0$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \mathrm{e}^f\,\mathrm{d}f = e^f\Big|_a^b = \mathrm{e}^{f(b)} - \mathrm{e}^{f(a)} = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 348. Cho $f(x) = a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+bx^{2017}+2018$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết rằng $f(\log(\log \mathrm{e})) = 2019$. Tính giá trị của $f(\log(\ln 10))$.

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2017.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+bx^{2017}+2018 \\ &= a\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}+bx^{2017}+2018 \\ &= -a\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+bx^{2017}+2018 \\ &= -a\ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)\right)-b(-x)^{2017}+2018 \\ &= 4036-f(-x), \end{aligned}$$

mà $\log(\ln 10) = \log\dfrac{1}{\log \mathrm{e}} = -\log(\log \mathrm{e})$ nên

$$f(\log(\ln 10)) = 4036 - f(\log(\log \mathrm{e})) = 4036 - 2019 = 2017.$$

Chọn đáp án D □

Câu 349. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = -2$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^4 f'\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -10$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = -5$. **D.** $I = -18$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x}$, suy ra $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Khi $x = 0$ thì $t = 0$, khi $x = 4$ thì $t = 2$. Do đó

$$I = \int_0^2 2tf'(t)\,\mathrm{d}t = 2tf(t)\Big|_0^2 - 2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\cdot 2f(2) - 2\cdot 1 = -10.$$

Chọn đáp án A □

Câu 350. Nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \dfrac{1}{x}$ là

A. $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} - \ln|x| + C$. **B.** $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{1}{x^2} + C$.

C. $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + \ln x + C$. **D.** $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\left(x^2-3x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 351. Trong các hàm số sau: (I) $f(x) = \tan^2 x + 2$, (II) $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x}$, (III) $f(x) = \tan^2 x + 1$. Hàm số nào có nguyên hàm là hàm số $g(x) = \tan x$?

A. Chỉ (II). **B.** Chỉ (III). **C.** Chỉ (II), (III). **D.** (I), (II), (III).

Lời giải.

Cách 1:

Ta có $\int\left(\tan^2 x+2\right)\mathrm{d}x=\int\left(1+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=x+\tan x+C.$

Và $\int\dfrac{2}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=2\tan x+C.$

Và $\int\left(\tan^2 x+1\right)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x+C.$

Cách 2:

Ta có $g'(x)=(\tan x)'=1+\tan^2 x.$

Chọn đáp án B □

Câu 352. Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y=-x^2+2x$, trục hoành. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là

A. $\dfrac{496\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{32\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{16\pi}{15}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) và Ox: $-x^2+2x=0\Leftrightarrow x=0$ và $x=2$.

Khi đó $V=\pi\int\limits_0^2\left(-x^2+2x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15}.$

Chọn đáp án D □

Câu 353. Cho $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3$. Khi đó $J=\int\limits_0^2\left[4f(x)-3\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $J=\int\limits_0^2\left[4f(x)-3\right]\mathrm{d}x=4\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x-3\int\limits_0^2\mathrm{d}x=4\cdot 3-3\cdot x\big|_0^2=6.$

Chọn đáp án B □

Câu 354. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2, y=2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{32\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{64\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{21\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{16\pi}{15}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-2x=0\Leftrightarrow x=0$ và $x=2$.

Thể tích khối tròn xoay là $V=\pi\int\limits_0^2\left|\left(x^2\right)^2-(2x)^2\right|\mathrm{d}x=\dfrac{64\pi}{15}.$

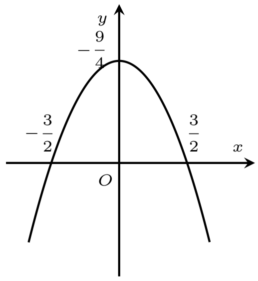
Chọn đáp án B □

Câu 355. Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là

A. 33750000 đồng. **B.** 3750000 đồng. **C.** 12750000 đồng. **D.** 6750000 đồng.

Lời giải.

Gọi phương trình parabol $(P): y=ax^2+bx+c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I\in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{9}{4} = c \\ \dfrac{9}{4}a - \dfrac{3}{2}b + c = 0 \\ \dfrac{9}{4}a + \dfrac{3}{2}b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = \dfrac{9}{4} \end{cases}$. Vậy $(P): y = -x^2 + \dfrac{9}{4}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích của cửa parabol là:$S = \displaystyle\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4}\right) \mathrm{d}x = \frac{9}{2}$ (m).

Số tiền phải trả là $\dfrac{9}{2} \times 1500000 = 6750000$ (đồng).

Chọn đáp án D □

Câu 356. Cho $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^5 + x^3} = a\ln 5 + b\ln 2 + c$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + 2b + 4c$ bằng

A. 0. **B.** -1. **C.** $-\dfrac{5}{8}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^5 + x^3} = \int\limits_1^2 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4(x^2+1)} = I$. Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = t - 1$, $x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$. Với $x = 1 \Rightarrow t = 2$; $x = 2 \Rightarrow t = 5$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int\limits_2^5 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2 t} = \frac{1}{2}\int\limits_2^5 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2} - \frac{1}{2}\int\limits_2^5 \frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \frac{1}{2}\int\limits_2^5 \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= -\frac{1}{2(t-1)}\Big|_2^5 - \frac{1}{2}\ln|t-1|\Big|_2^5 + \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_2^5 = \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{3}{2}$, $c = \dfrac{3}{8} \Rightarrow a + 2b + 4c = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 357. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y = x^2$ và $y = |x - 2|$ bằng

A. $\dfrac{13}{2}$. **B.** $\dfrac{21}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = |x - 2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = x - 2 \\ x^2 = -x + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$ Suy ra diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và $|x - 2|$ là

$$S = \int\limits_{-2}^{1} \left|x^2 - |x-2|\right| \mathrm{d}x = \left|\int\limits_{-2}^{1} (x^2 - |x-2|)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_{-2}^{1} [x^2 - (-x+2)]\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-2}^{1}\right| = \frac{9}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 358. Tìm họ nguyên hàm $\int (2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x$

A. $F(x)=(x^2-x)\ln x-\dfrac{x^2}{2}+x+C$.
B. $F(x)=(x^2-x)\ln x+\dfrac{x^2}{2}-x+C$.
C. $F(x)=(x^2+x)\ln x-\dfrac{x^2}{2}+x+C$.
D. $F(x)=(x^2-x)\ln x-\dfrac{x^2}{2}-x+C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=(2x-1)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v=x^2-x \end{cases}$

$F(x)=\int (2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x=(x^2-x)\ln x-\int (x-1)\,\mathrm{d}x=(x^2-x)\ln x-\dfrac{x^2}{2}+x+C.$

Chọn đáp án A □

Câu 359. Tìm họ nguyên hàm $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

A. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}+C$.
B. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{2}+C$.
C. $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}+C$.
D. $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{2}+C$.

Lời giải.

$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x=\int \dfrac{1-2\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{2}+C.$

Chọn đáp án D □

Câu 360. Với cách đổi biến $u=\sqrt{4x+5}$ thì tích phân $\int\limits_{-1}^{1} x\sqrt{4x+5}\,\mathrm{d}x$ trở thành

A. $\int\limits_{1}^{3} \dfrac{u^2(u^2-5)}{8}\,\mathrm{d}u$.
B. $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{u^2(u^2-5)}{8}\,\mathrm{d}u$.
C. $\int\limits_{1}^{3} \dfrac{u^2(u^2-5)}{4}\,\mathrm{d}u$.
D. $\int\limits_{1}^{3} \dfrac{u(u^2-5)}{8}\,\mathrm{d}u$.

Lời giải.

Đặt $u=\sqrt{4x+5}\Rightarrow x=\dfrac{u^2-5}{4}$ và $\mathrm{d}x=\dfrac{u}{2}\,\mathrm{d}u$.

Đổi cận:

x	-1	1
u	1	3

Suy ra, $\int\limits_{-1}^{1} x\sqrt{4x+5}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{3}\dfrac{u^2(u^2-5)}{8}\,\mathrm{d}u$

Chọn đáp án A □

Câu 361. Tìm họ nguyên hàm $\int \dfrac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$

A. $I=\dfrac{\ln|2x-1|}{2}+C$.
B. $I=\ln(2x-1)+C$.
C. $I=\ln|2x-1|+C$.
D. $I=\dfrac{\ln(2x-1)}{2}+C$.

Lời giải.

$\int \dfrac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\ln|2x-1|}{2}+C.$

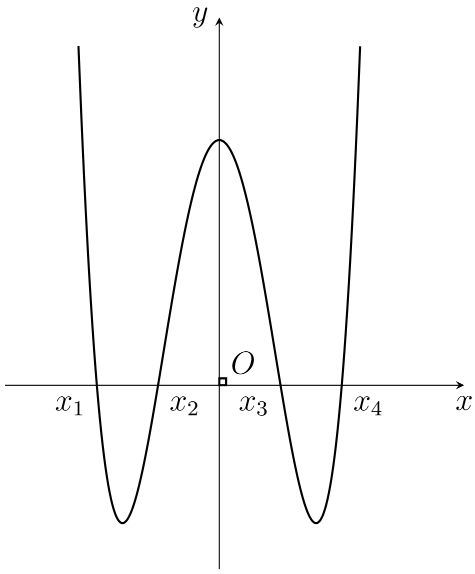
Chọn đáp án A □

Câu 362. Cho hàm số $y=x^4-3x^2+m$ có đồ thị là (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục hoành. Biết rằng $S_1=S_2$. Giá trị của m bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^4 - 3x^2 + m = 0$ (1). Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, ta được phương trình $t^2 - 3t + m = 0$ (2). Ta có (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm cùng dương $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ 3 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{9}{4}$.



Gọi các nghiệm của phương trình (1) là $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, $x_1, x_2, x_3, x_4 \neq 0$. Do đồ thị (C) nhận trục tung là trục đối xứng nên ta có

$$S_1 = 2\int\limits_{x_2}^{0} (x^4 - 3x^2 + m)\,\mathrm{d}x \quad \text{và} \quad S_2 = 2\int\limits_{x_1}^{x_2} (-x^4 + 3x^2 - m)\,\mathrm{d}x.$$

Vì $S_1 = S_2$ nên

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} (-x^4 + 3x^2 - m)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{x_2}^{0} (x^4 - 3x^2 + m)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \left(-\frac{x_2^5}{5} + x_2^3 - mx_2\right) - \left(-\frac{x_1^5}{5} + x_1^3 - mx_1\right)$$
$$= -\left(\frac{x_2^5}{5} - x_2^3 + mx_2\right) \Leftrightarrow \frac{x_1^5}{5} - x_1^3 + mx_1 = 0.$$

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{x_1^5}{5} - x_1^3 + mx_1 = 0 \\ x_1^4 - 3x_1^2 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1^5}{5} - x_1^3 + (3x_1^2 - x_1^4)x_1 = 0 \\ m = 3x_1^2 - x_1^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{5}{2} \\ m = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 363. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$, $\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{15}$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{49}{45}$. Tích phân $\int\limits_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2}{9}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{4}{63}$. **D.** 1.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = xf(x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = [f(x) + xf'(x)]\,\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$. Khi đó

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = x^2 f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x[f(x) + xf'(x)]\,\mathrm{d}x$$
$$= f(1) - \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_0^1 x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = 1 - 2\cdot\dfrac{4}{15} = \dfrac{7}{15}$. Khi đó dự đoán dạng $f'(x) = mx^2$, với $m \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\int_0^1 [mx^2 - f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 m^2x^4\,\mathrm{d}x - \int_0^1 2mx^2 f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{m^2}{5} - \frac{14m}{15} + \frac{49}{45} = \frac{(3m-7)^2}{45}.$$

Ta cần $\int_0^1 [mx^2 - f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(3m-7)^2}{45} = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{7}{3}$. Như vậy ta có

$$\int_0^1 \left[\frac{7}{3}x^2 - f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Suy ra $f'(x) = \dfrac{7}{3}x^2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{7x^3}{9} + C$. Từ $f(1) = 1 \Rightarrow C = \dfrac{2}{9}$. Khi đó $f(x) = \dfrac{7x^3}{9} + \dfrac{2}{9}$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{15}$. Vậy

$$\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{7x^3}{9} + \frac{2}{9}\right)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 364. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (với $a < b$) cho bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \pi\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo định nghĩa diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (với $a < b$) được cho bởi công thức $S = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 365. Tính tích phân $I = \int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{e^2-2}{2}$. **C.** $I=\dfrac{e^4+1}{4}$. **D.** $I=\dfrac{e^2-1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

Khi đó

$$I=\left.\frac{x^2\ln x}{2}\right|_1^e-\frac{1}{2}\int\limits_1^e x\,\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2\ln x}{2}\right|_1^e-\left.\frac{x^2}{4}\right|_1^e=\frac{e^2}{2}-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^4+1}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 366. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+\cos x+2018$ là

A. $F(x)=e^x+\sin x+2018x+C$. **B.** $F(x)=e^x-\sin x+2018x+C$.

C. $F(x)=e^x+\sin x+2018x$. **D.** $F(x)=e^x+\sin x+2018+C$.

Lời giải.

Ta có

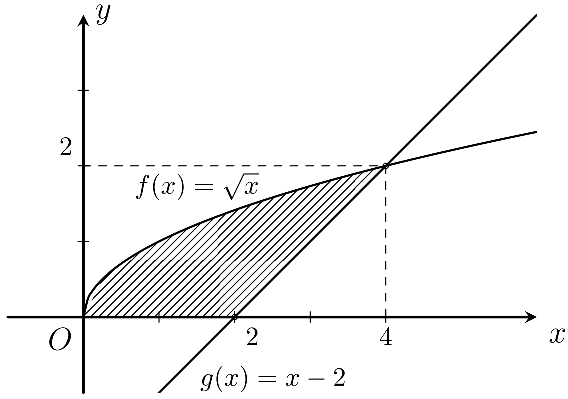
$$F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(e^x+\cos x+2018\right)\,\mathrm{d}x=e^x+\sin x+2018x+C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 367.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$ và trục hoành (hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

A. $\dfrac{10}{3}$. **B.** $\dfrac{16}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta có

$$S_{(H)}=\int\limits_0^2\sqrt{x}\ \mathrm{d}x+\int\limits_2^4\left|\sqrt{x}-(x-2)\right|\,\mathrm{d}x=\left.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_0^2+\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x\right)\right|_2^4=\frac{10}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 368. Biết $\displaystyle\int\limits_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=44$. **B.** $P=42$. **C.** $P=46$. **D.** $P=48$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Suy ra

$$\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int\limits_1^2 \frac{2}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 \frac{2}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}(x+1) = \left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2$$
$$= \left(2\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right) - \left(2-2\sqrt{2}\right) = \sqrt{32}-\sqrt{12}-2 = \sqrt{32}-\sqrt{12}-\sqrt{4}.$$

Do đó $a=32$, $b=12$, $c=4$. Vậy $P=a+b+c=48$.

Chọn đáp án D □

Câu 369. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Biết rằng $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính $T=f(-2)+f(0)+f(4)$.

A. $T=1+\ln\frac{9}{5}$. **B.** $T=1+\ln\frac{6}{5}$. **C.** $T=1+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$. **D.** $T=1+\frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\int\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

— Với $x\in(-\infty;-1)$ ta có $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_1$.

— Với $x\in(1;+\infty)$ ta có $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_3$.

Mà $f(-3)+f(3)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{-3-1}{-3+1}\right|+C_1+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3-1}{3+1}\right|+C_3=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 2 + C_1 + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+C_3=0 \Leftrightarrow C_1+C_3=0.$$

Do đó $f(-2)=\frac{1}{2}\ln 3+C_1$; $f(4)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}+C_3$.

— Với $x\in(-1;1)$ ta có $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_2$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1}\right|+C_2+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}\right|+C_2=2.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 3 + C_2 + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}+C_2=2 \Leftrightarrow C_2=1.$$

Do đó với $x\in(-1;1)$: $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+1 \Rightarrow f(0)=1$.

Vậy $T=f(-2)+f(0)+f(4)=1+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 370. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$. **B.** $\frac{\mathrm{e}^2}{4}$. **C.** $\mathrm{e}-2$. **D.** $\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{e^2-1}{4}=\int\limits_0^1(x+1)e^x f(x)\,dx=\left[xe^x f(x)\right]\Big|_0^1-\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\,dx=-\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\,dx.$$

$$\Rightarrow 2\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\,dx=-\frac{e^2-1}{2}.$$

Ta lại có $\int\limits_0^1 x^2e^{2x}\,dx=\dfrac{e^2-1}{4}$ và $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\,dx=\dfrac{e^2-1}{4}$.

Khi đó

$$\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\,dx+2\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\,dx+\int\limits_0^1 x^2e^{2x}\,dx=0$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'(x)+xe^x\right]^2\,dx=0.$$

Vì $\left[f'(x)+xe^x\right]^2\geq 0,\ \forall x\in[0;1]$ và $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên $\int\limits_0^1\left[f'(x)+xe^x\right]^2\,dx\geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi

$$f'(x)+xe^x=0\Leftrightarrow f'(x)=-xe^x\Leftrightarrow f(x)=(1-x)e^x+C.$$

Lại có $f(1)=0$ nên $C=0$.

Vậy $f(x)=(1-x)e^x$.

Do đó

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\int\limits_0^1(1-x)e^x\,dx=(2-x)e^x\Big|_0^1=e-2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 371. Tính nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(2017-\dfrac{2018e^{-x}}{x^5}\right)$.

A. $\int f(x)\,dx=2017e^x+\dfrac{2018}{x^4}+C$.

B. $\int f(x)\,dx=2017e^x+\dfrac{504,5}{x^4}+C$.

C. $\int f(x)\,dx=2017e^x-\dfrac{504,5}{x^4}+C$.

D. $\int f(x)\,dx=2017e^x-\dfrac{2018}{x^4}+C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,dx=\int e^x\left(2017-\dfrac{2018e^{-x}}{x^5}\right)\,dx=\int\left(2017e^x-\dfrac{2018}{x^5}\right)\,dx=2017e^x+\dfrac{504,5}{x^4}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 372. Biết $\int\limits_0^1\dfrac{x^3+2x^2+3}{x+2}\,dx=\dfrac{1}{a}+b\ln\dfrac{3}{2}$, $(a,b>0)$. Tìm các giá trị k để

$$\int\limits_8^{ab}\,dx<\lim_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}.$$

A. $k < 0$. **B.** $k \neq 0$. **C.** $k > 0$. **D.** $k \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{3}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + 3\ln(x+2)\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 3\ln\frac{3}{2}\cdot$

$\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_8^{ab} \mathrm{d}x = \int_8^9 \mathrm{d}x = 1$. Mặt khác $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} = k^2+1$.

$\Rightarrow \displaystyle\int_8^{ab} \mathrm{d}x < \lim_{x\to+\infty} \frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} \Leftrightarrow 1 < k^2+1 \Leftrightarrow k \neq 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 373. Giả sử a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\displaystyle\int_0^4 \frac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^3 (au^4+bu^2+c)\,\mathrm{d}u$, trong đó $u = \sqrt{2x+1}$. Tính giá trị $S = a+b+c$.

A. $S = 3$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 2$.

Lời giải.

Đặt $u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow u^2 = 2x+1 \Rightarrow x = \dfrac{u^2-1}{2}\cdot$

Đổi cận

x	0	4
u	1	3

Khi đó $\displaystyle\int_0^4 \frac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{2\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{u^2-1}{2}\right) + 1}{u}\cdot u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_1^3 (u^4+2u^2-1)\,\mathrm{d}u$.

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow S = a+b+c = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 374. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, trục hoành và đường thẳng $x = \mathrm{e}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $S = \dfrac{\pi}{2}$. **B.** $S = \dfrac{\pi}{3}$. **C.** $S = \dfrac{\pi}{6}$. **D.** $S = \pi$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của (H) với trục Ox là nghiệm phương trình $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi đó thể tích $V = \pi\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^{\mathrm{e}} \ln^2 x\,\mathrm{d}(\ln x) = \pi\cdot\frac{\ln^3 x}{3}\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{\pi}{3}\cdot$

Chọn đáp án B □

Câu 375. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$. Tính $S = f(3) - f(-1)$.

A. $S = 1$. **B.** $S = \ln 2$. **C.** $S = \ln 4035$. **D.** $S = 4$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1| + C$.

$\Rightarrow f(0) = C = 2017$ và $f(2) = C = 2018 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln|x-1| + 2017 & \text{nếu } x < 1 \\ \ln|x-1| + 2018 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f(3) = \ln 2 + 2018 \\ f(-1) = \ln 2 + 2017 \end{cases} \Rightarrow S = f(3) - f(-1) = 1.$

Chọn đáp án A □

Câu 376. Biết luôn có hai số a và b để $F(x) = \frac{ax+b}{x+4}$ $(4a - b \neq 0)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $2f^2(x) = (F(x) - 1)\,f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a = 1, b = 4$. **B.** $a = 1, b = -1$. **C.** $a = 1, b \in \mathbb{R}\backslash\{4\}$. **D.** $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = F'(x) = \frac{4a-b}{(x+4)^2}$; $f'(x) = \frac{-2(4a-b)}{(x+4)^3}$.

Thay vào biểu thức, ta có

$$\begin{aligned} 2f^2(x) = (F(x) - 1)\,f'(x) &\Leftrightarrow 4a - b = -(a-1)x - b + 4 \\ &\Leftrightarrow (a-1)x + 4(a-1) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

(1) đúng với mọi $x \neq -4$ khi $a = 1$, $4a - b \neq 0 \Rightarrow b \neq 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 377. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a;b]$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng $x = a, x = b$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

A. $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \int\limits_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \left|\int\limits_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Vì $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a;b]$ nên $f(x) - g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b]$.

Vậy $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int\limits_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 378. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x\left(1 + 3x^3\right)$ là

A. $x^2\left(1 + 3x^2\right) + C$. **B.** $2x\left(x + x^3\right) + C$. **C.** $x^2\left(x + x^3\right) + C$. **D.** $x^2\left(1 + \frac{6x^3}{5}\right) + C$.

Lời giải.

Ta có $\int 2x\left(1 + 3x^3\right)\mathrm{d}x = \int \left(2x + 6x^4\right)\mathrm{d}x = x^2 + \frac{6x^5}{5} + C = x^2\left(1 + \frac{6x^3}{5}\right) + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 379. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$ $(x \neq 0)$. Biết $F(-1) = 1$, $F(1) = 4$, $f(1) = 0$. Giá trị của $M = 2a - b$ là

A. $M = \frac{9}{2}$. **B.** $M = 3$. **C.** $M = \frac{3}{2}$. **D.** $M = 0$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(ax + \dfrac{b}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{ax^2}{2} - \dfrac{b}{x} + C$.

Theo giả thiết, ta có hệ phương trình $\begin{cases} F(-1) = 1 \\ F(1) = 4 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + C = 1 \\ a - b + C = 4 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Vậy $M = 2a - b = 3 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 380. Biết rằng $\int\limits_1^k \ln x\,\mathrm{d}x = 1 + 2k$ $(k > 1)$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $k \in (1; 4)$. **B.** $k \in (6; 9)$. **C.** $k \in (18; 21)$. **D.** $k \in (11; 14)$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = x. \end{cases}$

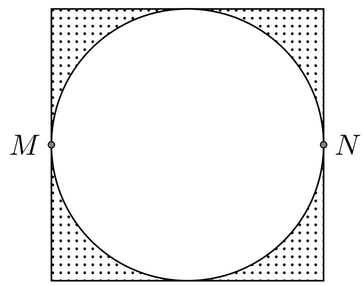
Suy ra $\int\limits_1^k \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_1^k - \int\limits_1^k \mathrm{d}x = k\ln k - x\Big|_1^k = k\ln k - k + 1$.

Theo giả thiết, ta có $k\ln k - k + 1 = 1 + 2k \Leftrightarrow \ln k = 3 \Leftrightarrow k = \mathrm{e}^3 \in (18; 21)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 381.

Cho đường tròn nội tiếp hình vuông cạnh $3a$ (như hình vẽ bên). Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đường tròn và hình vuông (phần nằm bên ngoài đường tròn và bên trong hình vuông). Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay S quanh trục MN.



A. $V = \dfrac{9\pi a^3}{2}$. **B.** $V = \dfrac{9\pi a^3}{4}$. **C.** $V = 9\pi a^3$. **D.** $V = 27\pi a^3$.

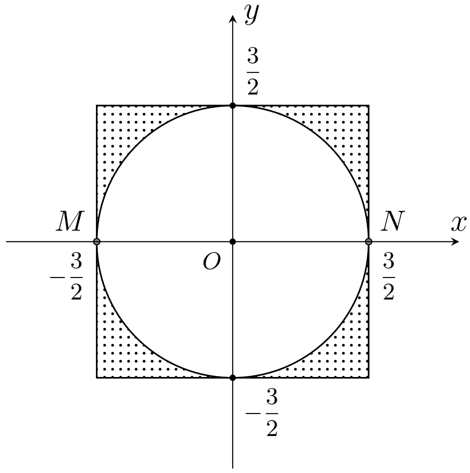
Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó, đường tròn tâm O, bán kính $R = \dfrac{3}{2}$ có phương trình là

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{4}.$$

Từ đồ thị suy ra thể tích khối tròn xoay cần tính là

$$V = 2\pi a^3 \int\limits_0^{\frac{3}{2}} \left[\frac{9}{4} - \left(\frac{9}{4} - x^2\right)\right]\,\mathrm{d}x = \frac{9\pi a^3}{4}.$$

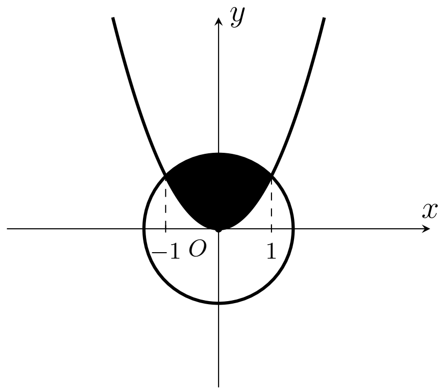


Chọn đáp án (B) □

Câu 382. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ, bán kính $R = \sqrt{2}$. Diện tích của (H) bằng

A. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{2}+1$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.



Phương trình đường tròn (C) là $x^2+y^2=2$.

Tọa độ giao điểm của (P) và (C) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1.$$

Từ đồ thị, diện tích hình phẳng (H) là

$$S=2\int\limits_0^1\left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 383. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\displaystyle\int[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x+\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int[f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x-\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int(2\cdot x)\,\mathrm{d}x=x^2+C$, còn $\displaystyle\int 2\,\mathrm{d}x\cdot\int x\,\mathrm{d}x=2x\cdot\frac{x^2}{2}+C$ nên $\displaystyle\int(2\cdot x)\,\mathrm{d}x\neq\int 2\,\mathrm{d}x\cdot\int x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 384. Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ và $F(1)=1$.

A. $F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$. **B.** $F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}$. **C.** $F(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2}$. **D.** $F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Xét $\displaystyle\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x$ và $\mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t$. Khi đó $\displaystyle\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ trở thành $\displaystyle\int t\cdot 2t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^3+C$.

Như vậy $\displaystyle\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C\Rightarrow F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

Vì $F(1)=1$ nên $C=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 385. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int\limits_0^2 xf(x^2)\,\mathrm{d}x=2$. Hãy tính $I=\displaystyle\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=4$.

Lời giải.

Xét tích phân $\int\limits_0^2 xf(x^2)\,\mathrm{d}x = 2$. Đặt $x^2 = t \Rightarrow x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = 0$ thì $t = 0$; $x = 2$ thì $t = 4$.

Do đó $\int\limits_0^2 xf(x^2)\,\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \Leftrightarrow \int\limits_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 4 \Rightarrow \int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ hay $I = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 386. Cho $F(x) = \frac{a}{x}(\ln x + b)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$, trong đó a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b$.

A. $S = -2$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 0$.

Lời giải.

Xét $I = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = 1 + \ln x \\ \mathrm{d}v = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$. Khi đó

$I = -\frac{1}{x}(1+\ln x) + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}(1+\ln x) - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x}(\ln x + 2) + C \Rightarrow a = -1; b = 2$.

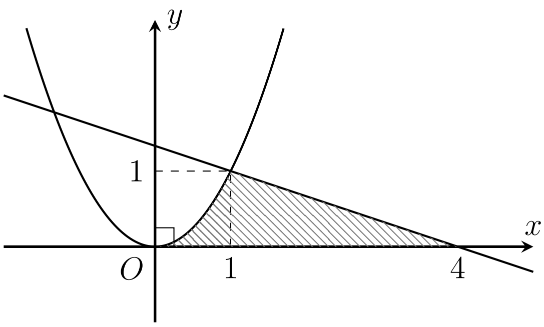
Vậy $S = a + b = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 387. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ và trục hoành.

A. $\frac{11}{6}$. **B.** $\frac{61}{3}$. **C.** $\frac{343}{162}$. **D.** $\frac{39}{2}$.

Lời giải.



Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ là

$x^2 = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{4}{3} \end{array}\right.$.

Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ với trục hoành là $x = 4$.

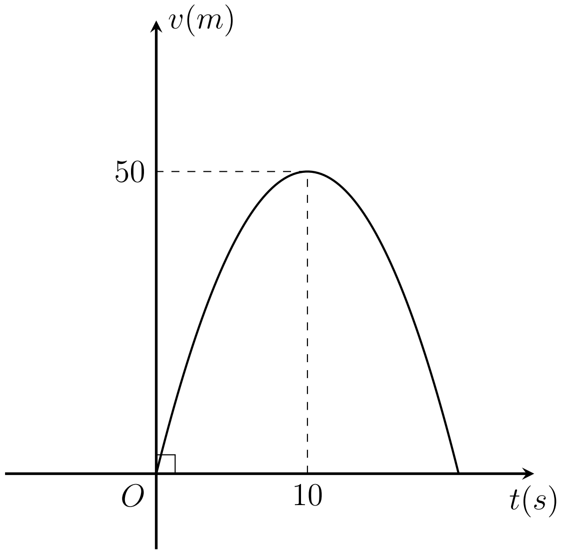
Hoành độ giao điểm của parabol $y = x^2$ với trục hoành là $x = 0$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$S = \int\limits_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right)\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x\right)\right|_1^4 = \frac{11}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 388. Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol có hình bên dưới.



Biết rằng sau 10 s thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 50 m/s và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?

A. $\dfrac{1000}{3}$ m. **B**. $\dfrac{1100}{3}$ m. **C**. $\dfrac{1400}{3}$ m. **D**. 300 m.

Lời giải.

Quãng đường xe đi được chính bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và trục Ox.

Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do (P) qua gốc tọa độ nên $c = 0$.

Đỉnh (P) là $I(10;50)$ nên $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 10 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -20a \\ b^2 = -200a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

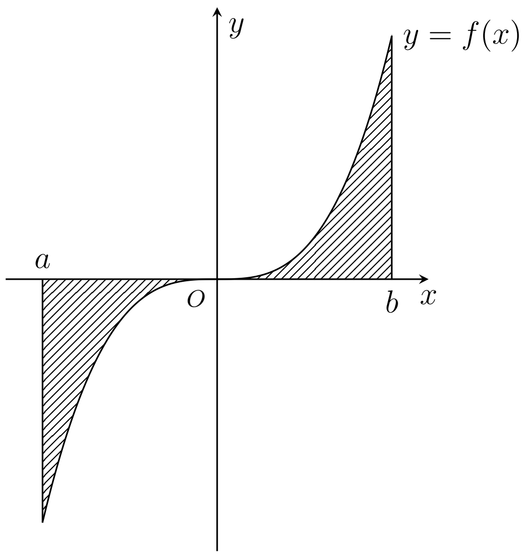
Ta có $\displaystyle\int_0^{10} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 10x\right) \mathrm{d}x = \frac{1000}{3}$.

Vậy quãng đường xe đi được bằng $\dfrac{1000}{3}$ m.

Chọn đáp án A □

Câu 389.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a, x = b$ (như hình vẽ bên). Giả sử S_D là diện tích của hình phẳng D. Chọn công thức đúng trong các phương án A, B, C, D dưới đây?



A. $S_D = -\displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S_D = \displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S_D = -\displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S_D = -\displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa trên đồ thị ta thấy:

- Đồ thị cắt trục hoành tại $O(0;0)$.
- Trên đoạn $[a;0]$, đồ thị ở phía dưới trục hoành nên $|f(x)| = -f(x)$.
- Trên đoạn $[0;b]$, đồ thị ở phía trên trục hoành nên $|f(x)| = f(x)$.

Do đó $S_D = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 390. Tính nguyên hàm $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x$.

A. $-\dfrac{1}{3}\sin 3x + C$. **B.** $\dfrac{1}{3}\sin 3x + C$. **C.** $-3\sin 3x + C$. **D.** $3\sin 3x + C$.

Lời giải.

$\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int \cos 3x\,\mathrm{d}(3x) = \dfrac{1}{3}\sin 3x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 391.

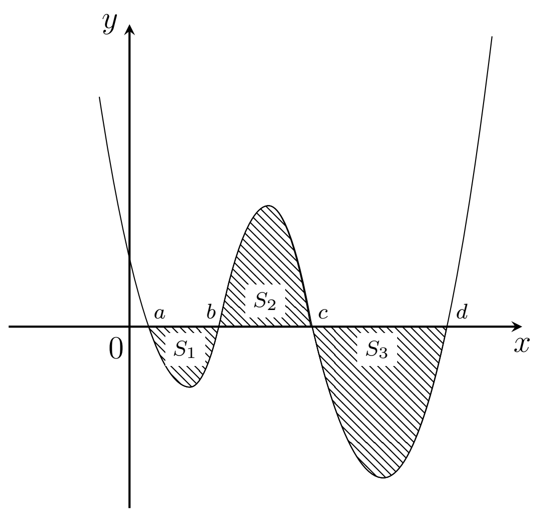
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm a, b, c, d (hình bên). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$.

B. $f(a) > f(c) > f(d) > f(b)$.

C. $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$.

D. $f(c) > f(a) > f(d) > f(b)$.



Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có dấu của $f'(x)$ và bảng biến thiên như hình bên.

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $f(a)$ và $f(c)$ cùng lớn hơn $f(b)$ và $f(d)$.

x	$-\infty$		a		b		c		d		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	$f(d)$	$\nearrow$	

— $S_1 < S_2 \Rightarrow \int\limits_b^a f'(x)\,\mathrm{d}x < \int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow f(a) - f(b) < f(c) - f(b) \Rightarrow f(a) < f(c)$.

— $S_2 < S_3 \Rightarrow \int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x < \int\limits_d^c f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow f(c) - f(b) < f(c) - f(d) \Rightarrow f(b) > f(d)$.

Vậy ta có $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$.

Chọn đáp án A □

Câu 392. Giả sử tích phân $I = \int\limits_1^5 \dfrac{1}{1+\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = a + b\ln 3 + c\ln 5$ $(a,b,c \in \mathbb{Z})$. Tính $S =$

$a+b+c$.

A. $S=\dfrac{5}{3}$. **B**. $S=\dfrac{8}{3}$. **C**. $S=\dfrac{7}{3}$. **D**. $S=\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t=1+\sqrt{3x+1} \Rightarrow 3x+1=(t-1)^2 \Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}(t-1)\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=3; x=5\Rightarrow t=5$. Khi đó

$$I=\frac{2}{3}\int\limits_3^5 \frac{t-1}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int\limits_3^5\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\left(t-\ln|t|\right)\Big|_3^5=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\ln 3-\frac{2}{3}\ln 5.$$

Suy ra $a=\dfrac{4}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$, $c=-\dfrac{2}{3}$.

Vậy $S=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 393. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^1 (x+3)f'(x)\,\mathrm{d}x=15$ và $f(1)=2$, $f(0)=1$. Tính $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$. **B**. $I=-10$. **C**. $I=12$. **D**. $I=10$.

Lời giải.

Đặt $u=x+3$ và $dv=f'(x)\,\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ và $v=f(x)$. Do đó

$$\int\limits_0^1 (x+3)f'(x)\,\mathrm{d}x=(x+3)f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=4f(1)-3f(0)-\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $4\cdot 2-3\cdot 1-\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=15$

Vậy $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-10$.

Chọn đáp án B □

Câu 394. Biết $\displaystyle\int\limits_2^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x}=a\ln 4+b\ln 2+c\ln 5$, với a, b, c là 3 số nguyên khác 0. Tính $P=a^2+2ab+3b^2-2c$.

A. 7. **B**. 5. **C**. 4. **D**. 8.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_2^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x}=\int\limits_2^5\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(\ln|x-1|-\ln|x|\right)\Big|_2^5=\ln 4-\ln 5+\ln 2.$

Suy ra $a=1$, $b=1$, $c=-1$. Vậy $P=8$.

Chọn đáp án D □

Câu 395. Diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=-x+3$ và $y=1$ là

A. $S = \dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{2}$. **B**. $S = \dfrac{1}{\ln 2} + 3$. **C**. $S = \dfrac{1}{\ln 2} + 1$. **D**. $S = \dfrac{47}{50}$.

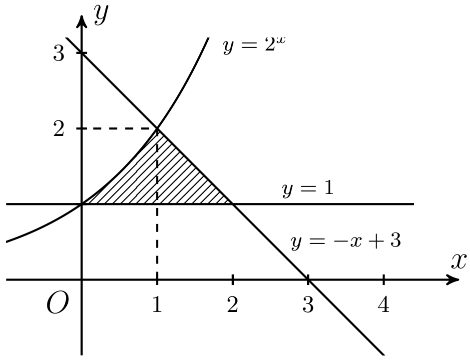
Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của các đường ta có:

$2^x = -x + 3 \Leftrightarrow x = 1$; $2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $-x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Diện tích cần tìm là

$$S = \int\limits_0^1 (2^x - 1)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 (-x + 3 - 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2}.$$



Chọn đáp án A ☐

Câu 396. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$; $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int\limits_{-1}^1 f\left(|2x - 1|\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 6$. **B**. $I = 4$. **C**. $I = \dfrac{2}{3}$. **D**. $I = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$$I = \int\limits_{-1}^1 f\left(|2x - 1|\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1 - 2x\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f\left(2x - 1\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1 - 2x\right) d\left(1 - 2x\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f\left(2x - 1\right) d\left(2x - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_3^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int\limits_3^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot 2 = 4.$$

Chọn đáp án B ☐

Câu 397. Cho tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2a + b = 0$. **B**. $a - 2b = 0$. **C**. $2a - b = 0$. **D**. $a + 2b = 0$.

Lời giải.

Đặt $t = \cos x + 2 \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{5}{2},$$
$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2.$$

$$I = \int\limits_2^{\frac{5}{2}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln t\Big|_2^{\frac{5}{2}} = \ln 5 - 2\ln 2.$$

Suy ra $a = 1$, $b = -2$.

Vậy $2a + b = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 398. Nguyên hàm $I=\int \dfrac{2x^2-7x+5}{x-3}\,\mathrm{d}x$ là

A. $I=x^2-x+2\ln|x-3|+C$.
B. $I=x^2-x-2\ln|x-3|+C$.
C. $I=2x^2-x+2\ln|x-3|+C$.
D. $I=2x^2-x-2\ln|x-3|+C$.

Lời giải.

$I=\int \dfrac{2x^2-7x+5}{x-3}\,\mathrm{d}x=\int\left(2x-1+\dfrac{2}{x-3}\right)\mathrm{d}x=x^2-x+2\ln|x-3|+C.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 399. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x-\sin 6x$ là

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\cos 6x}{6}+C$.
B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\sin 6x}{6}+C$.
C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{\cos 6x}{6}+C$.
D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{\sin 6x}{6}+C$.

Lời giải.

$$\int (x-\sin 6x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\frac{\cos 6x}{6}+C.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 400. Cho hai tích phân $\int\limits_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x=8$ và $\int\limits_{5}^{-2} g(x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính $\int\limits_{-2}^{5}[f(x)-4g(x)-1]\,\mathrm{d}x$

A. $I=-11$.
B. $I=13$.
C. $I=27$.
D. $I=3$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int\limits_{-2}^{5}[f(x)-4g(x)-1]\,\mathrm{d}x&=\int\limits_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x+4\int\limits_{5}^{-2} g(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-2}^{5}\mathrm{d}x\\&=8+4\cdot 3-[5-(-2)]\\&=13.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 401. Tính tích phân $\int\limits_{0}^{\pi} x^2\cos 2x\,\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $\begin{cases}u=x^2\\ dv=\cos 2x\,\mathrm{d}x\end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\dfrac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi} x\sin 2x\,\mathrm{d}x$.
B. $I=\dfrac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-2\int\limits_0^{\pi} x\sin 2x\,\mathrm{d}x$.
C. $I=\dfrac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}+2\int\limits_0^{\pi} x\sin 2x\,\mathrm{d}x$.
D. $I=\dfrac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi} x\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}u=x^2\\ dv=\cos 2x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\\ v=\dfrac{1}{2}\sin 2x\end{cases}$

Áp dụng công thức ta có $I=\dfrac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi} x\sin 2x\,\mathrm{d}x$

Chọn đáp án (A) □

Câu 402. Cho tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x^2 + (2x + \cos x)\cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x}\,\mathrm{d}x = a\pi^2 + b - \ln \dfrac{c}{\pi}$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị biểu thức $P = ac^3 + b$ là

A. 3. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 2.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x)\cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x + \cos x)^2 + 1 - \sin x}{x + \cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x + \cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(x + \cos x)}{x + \cos x} \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + \sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \ln|x + \cos x|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^2}{8} + 1 + \ln\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{8}\pi^2 + 1 - \ln\frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Suy ra $a = \dfrac{1}{8}$; $b = 1$; $c = 2$

Vậy $P = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 403. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f'(x) - 2018f(x) = 2018 \cdot x^{2017} \cdot \mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Giá trị $f(1)$ là

A. $2019e^{2018}$. **B.** $2018\mathrm{e}^{-2018}$. **C.** $2018\mathrm{e}^{2018}$. **D.** $2017\mathrm{e}^{2018}$.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có

$$\begin{aligned}
& f'(x) - 2018 \cdot f(x) = 2018 \cdot x^{2017} \cdot \mathrm{e}^{2018x} \\
\Leftrightarrow\, & \mathrm{e}^{-2018x} \cdot f'(x) - 2018 \cdot \mathrm{e}^{-2018x} \cdot f(x) = 2018 \cdot x^{2017} \\
\Leftrightarrow\, & \left[\mathrm{e}^{-2018x} \cdot f'(x)\right] = 2018 \cdot x^{2017} \\
\Leftrightarrow\, & \mathrm{e}^{-2018x} \cdot f(x) + C = \int 2018x^{2017}\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\, & \mathrm{e}^{-2018x} \cdot f(x) + C = x^{2018}
\end{aligned}$$

Thay $x = 0$ ta được $f(0) + C = 0 \Leftrightarrow 2018 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2018$

Từ đó ta được $\mathrm{e}^{-2018x} \cdot f(x) - 2018 = x^{2018}$

Thay $x = 1$ ta được

$$\mathrm{e}^{-2018} \cdot f(1) - 2018 = 1 \Leftrightarrow \frac{f(1)}{\mathrm{e}^{2018}} = 2019 \Leftrightarrow f(1) = 2019\mathrm{e}^{2018}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 404. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ là

A. $S = \int\limits_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 405. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 2x$.

A. $\dfrac{x^4}{4} - x^2 + C$. **B.** $\dfrac{x^4}{4} + x^2 + C$. **C.** $\dfrac{x^4}{4} + C$. **D.** $x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(x^3 + 2x\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^4}{4} + x^2 + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 406. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+1}$.

A. $\ln 2$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\ln \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

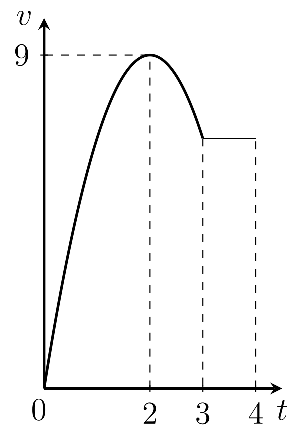
$$I = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x+1|\Big|_0^1 = \ln 2.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 407.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị như hình vẽ. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của parabol có đỉnh $I(2; 9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật đó đi được trong 4 giờ.

A. $28,5$ (km). **B.** 27 (km). **C.** 24 (km). **D.** $26,5$ (km).



Lời giải.

Giả sử phương trình parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Vì parabol đi qua $O(0; 0)$ nên $c = 0$.

Do tọa độ đỉnh là $I(2; 9)$ nên $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{9}{4} \\ b = 9 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -\dfrac{9}{4}t^2 + 9t.$

Quãng đường vật chuyển động được trong 3 giờ đầu là $\int\limits_0^3 \left(-\frac{9}{4}t^2 + 9t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{81}{4}$ (km).

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ là $v(3) = \frac{27}{4} \Rightarrow$ quãng đường vật đi được trong 1 giờ cuối là $\frac{27}{4}$ (km).

Vậy quãng đường vật đi được trong 4 giờ là $\frac{81}{4} + \frac{27}{4} = 27$ (km).

Chọn đáp án B □

Câu 408. Cho $\int\limits_1^2 \ln(9 - x^2)\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2 + c$ (với a, b, $c \in \mathbb{Z}$). Tính $S = |a| + |b| + |c|$.

A. $S = 34$. **B.** $S = 13$. **C.** $S = 18$. **D.** $S = 26$.

Lời giải.

Có $\int\limits_1^2 \ln(9-x^2)\,\mathrm{d}x = x\ln(9-x^2)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{2x^2}{x^2-9}\,\mathrm{d}x = 2\ln 5 - 3\ln 2 - 2\int\limits_1^2 \mathrm{d}x - 3\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x$

$= 2\ln 5 - 3\ln 2 - 2 - 3\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Big|_1^2 = 5\ln 5 - 6\ln 2 - 2 \Rightarrow S = 13$.

Chọn đáp án B □

Câu 409. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ và $f(0) = 2018$. Giá trị của biểu thức $f(3) - f(1)$ bằng

A. $\ln 2$. **B.** $\ln 4$. **C.** $\ln 3$. **D.** $\ln 5$.

Lời giải.

$f(x) = \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}\,x = \ln|x+1| + C$. Vì $f(0) = 2018$ nên $C = 2018 \Rightarrow f(x) = \ln|x+1| + 2018 \Rightarrow f(3) - f(1) = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 410. Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + bx\mathrm{e}^x$. Tìm a và b biết rằng $f'(0) = -22$ và $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$.

A. $a = -2, b = -8$. **B.** $a = 2, b = 8$. **C.** $a = 8, b = 2$. **D.** $a = -8, b = -2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -\frac{3a}{(x+1)^4} + b(x+1)\mathrm{e}^x$, suy ra $-3a + b = f'(0) = -22$. Lại có

$$5 = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[\frac{a}{(x+1)^3} + bx\mathrm{e}^x\right]\mathrm{d}x = \left[-\frac{a}{2(x+1)^2} + b(x-1)\mathrm{e}^x\right]\Bigg|_0^1 = \frac{3a}{8} + b$$

nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -3a + b = -22 \\ \frac{3a}{8} + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 411. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\sqrt{x} + x$.

A. $\int \left(3\sqrt{x} + x\right)\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C$. **B.** $\int \left(3\sqrt{x} + x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C$.

C. $\int \left(3\sqrt{x}+x\right)\,\mathrm{d}x = 2x\sqrt{x}+\dfrac{x^2}{2}+C$. **D.** $\int \left(3\sqrt{x}+x\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{x^2}{2}+C$.

Lời giải.

$\int \left(3\sqrt{x}+x\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(3x^{\frac{1}{2}}+x\right)\,\mathrm{d}x = 2x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{x^2}{2}+C = 2x\sqrt{x}+\dfrac{x^2}{2}+C.$

Chọn đáp án C □

Câu 412. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và là hàm số chẵn. Biết $\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I=\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=16$. **B.** $I=4$. **C.** $I=8$. **D.** $I=2$.

Lời giải.

Đặt $t=2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$, với $x=0 \Rightarrow t=0$ và $x=1 \Rightarrow t=2$.

Ta có $\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\times 4 = 8$.

Vì $f(x)$ là hàm chẵn trên $[-2;2]$ nên $I=\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\times 8 = 16$.

Chọn đáp án A □

Câu 413. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x+1}$, $y=1-x$ và trục Ox. Diện tích S của hình (H) bằng bao nhiêu?

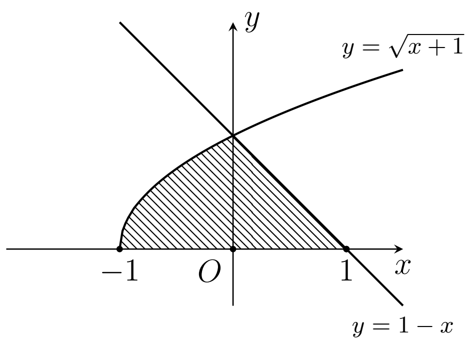
A. $S=\dfrac{4}{3}$. **B.** $S=\dfrac{7}{6}$. **C.** $S=\dfrac{3}{2}$. **D.** $S=\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned} &\sqrt{x+1} = 1-x \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x+1 = 1-2x+x^2 \\ x\le 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x^2-3x=0 \\ x\le 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\; x=0. \end{aligned}$$

Đồ thị $y=\sqrt{x+1}$ cắt Ox tại điểm $x=-1$ và đồ thị $y=1-x$ cắt Ox tại $x=1$.



Vậy $S=\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{7}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 414. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b (a < b)$. Diện tích hình D được tính theo công thức

A. $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$. **B**. $S = \int\limits_a^b f|x|\,dx$. **C**. $S = \left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|$. **D**. $S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Lời giải.

Ta có $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Chọn đáp án A □

Câu 415. Tích phân $\int\limits_0^2 \dfrac{2x+1}{x+3}\,dx$ bằng

A. $4 - 5\ln\dfrac{3}{5}$. **B**. $4 - 5\log\dfrac{5}{3}$. **C**. $4 + 5\ln\dfrac{5}{3}$. **D**. $4 - 5\ln\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^2 \dfrac{2x+1}{x+3}\,dx = \int\limits_0^2 \left(2 - \dfrac{5}{x+3}\right)dx = (2x - 5\ln|x+3|)\Big|_0^2 = 4 - 5\ln\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án D □

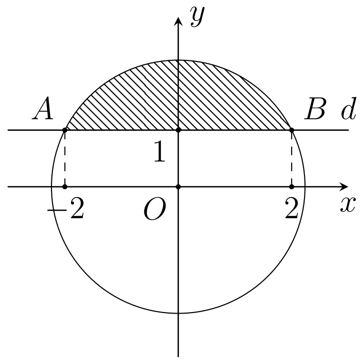
Câu 416. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 = 5$, và đường thẳng d có phương trình $y = 1$. Biết d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi d và cung nhỏ AB của (C). Quay hình (H) xung quanh đường thẳng d ta được một khối tròn xoay có thể tích V. Giá trị của V gần nhất với số nào sau đây?

A. 46,1. **B**. 12,4. **C**. 11,3. **D**. 33,5.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$



Vậy giao điểm là $A(-2; 1)$ và $B(2; 1)$.
Phương trình nửa đường tròn phía trên trục Ox là $y = \sqrt{5 - x^2}$.
Gọi I là giao điểm của d và Oy, suy ra $I(0; 1)$. Tịnh tiến hệ trục tọa độ theo $\overrightarrow{OI} = (0; 1)$ thành hệ trục XIY với $\begin{cases} x - 0 = X \\ y - 1 = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X \\ y = Y + 1 \end{cases}$, trục IX nằm trùng với đường thẳng d. Khi đó hình phẳng quay quanh trục IX.
Đối với hệ trục XIY phương trình nửa đường tròn là $Y = \sqrt{5 - X^2} - 1$. Do đó, thể tích khối tròn xoay là $V = \pi \int\limits_{-2}^{2} \left(\sqrt{5 - X^2} - 1\right)^2 dX = \dfrac{44\pi}{3} - 10\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}} \approx 11{,}295$.

Chọn đáp án C □

Câu 417. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên đoạn $[0; 1]$ thỏa $(f(x))^4 \cdot (f'(x))^2 \cdot (x^2 + 1) = 1 + (f(x))^3$ và $f(x) > 0$, $\forall x \in [0; 1]$. Biết $f(0) = 2$, hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây.

A. $2 < f(1) < \dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2} < f(1) < 3$. **C.** $\dfrac{3}{2} < f(1) < 2$. **D.** $3 < f(1) < \dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $(f(x))^4 \cdot (f'(x))^2 \cdot (x^2+1) = 1 + (f(x))^3$

$$\Leftrightarrow (f(x))^2 \cdot f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} = \sqrt{1+(f(x))^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(f(x))^2 \cdot f'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^3}}$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(1+(f(x))^3\right)}{2\sqrt{1+(f(x))^3}}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} \times \left(\sqrt{1+(f(x))^3}\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\sqrt{2}\right) = \frac{2}{3} \times \left(\sqrt{1+(f(1))^3} - 3\right)$$

$$\Leftrightarrow f(1) \approx 2{,}605.$$

Chọn đáp án B □

Câu 418. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, gọi S là diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$; $x = b$. Khi đó:

A. $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \int\limits_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo công thức tính diện tích hình phẳng bằng tích phân $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 419. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C$.

Lời giải.

Theo công thức nguyên hàm $\int \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 420. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -4$, $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$, $\int\limits_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 8$. Tích phân $\int\limits_2^5 [4f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. 12. **B.** 0. **C.** 48. **D.** 32.

Lời giải.

— Ta có $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

— Suy ra $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 6 - (-4) = 10$.

— Do đó $\int\limits_2^5 [4f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 4\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 4 \cdot 10 - 8 = 32.$

Chọn đáp án D □

Câu 421. Giả sử tích phân $I = \int\limits_1^5 \dfrac{1}{1+\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = a + b\ln 3 + c\ln 5$. Lúc đó

A. $a+b+c = \dfrac{4}{3}$. **B.** $a+b+c = \dfrac{5}{3}$. **C.** $a+b+c = \dfrac{7}{3}$. **D.** $a+b+c = \dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x + 1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{2t}{3}\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 5 \Rightarrow t = 4. \end{array}\right.$

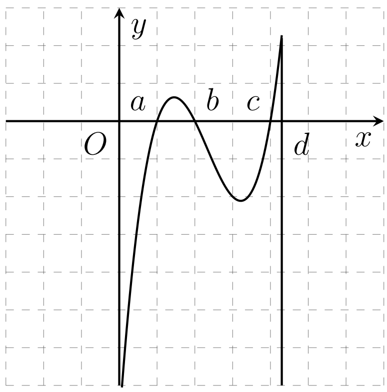
$I = \dfrac{2}{3}\int\limits_2^4 \dfrac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{3}\int\limits_2^4 \left(1 - \dfrac{1}{t+1}\right)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{3}\left(t - \ln|t+1|\right)\Big|_2^4 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}\ln 3 - \dfrac{2}{3}\ln 5.$

Vậy $a = \dfrac{4}{3}$; $b = \dfrac{2}{3}$; $c = -\dfrac{2}{3}$ suy ra $a + b + c = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 422.

Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0 < a < b < c < d$ và hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $M + m = f(0) + f(c)$. **B.** $M + m = f(d) + f(c)$.
C. $M + m = f(b) + f(a)$. **D.** $M + m = f(0) + f(a)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số của $f'(x)$ ta có bảng biến thiên cho hàm $f(x)$

x	0		a		b		c		d
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào BBT ta có $M \in \{f(0), f(b), f(d)\}$ và $m \in \{f(a), f(c)\}$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(H_1) : \begin{cases} x = 0, x = a \\ y = 0 \\ y = f'(x) \end{cases}$.

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(H_2) : \begin{cases} x = a, x = b \\ y = 0 \\ y = f'(x) \end{cases}$.

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(H_3): \begin{cases} x = b, x = c \\ y = 0 \\ y = f'(x) \end{cases}$.

Gọi S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(H_4): \begin{cases} x = c, x = d \\ y = 0 \\ y = f'(x) \end{cases}$.

Ta có

$$S_1 = \int_0^a |f'(x)|\,\mathrm{d}x = -f(x)\big|_0^a = f(0) - f(a),\ S_2 = \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x = f(x)\big|_a^b = f(b) - f(a).$$

Dễ dàng thấy $S_1 > S_2$ nên $f(0) - f(a) > f(b) - f(a) \Rightarrow f(0) > f(b)$.

Ta có

$$S_3 = \int_b^c |f'(x)|\,\mathrm{d}x = -f(x)\big|_b^c = f(b) - f(c) \text{ và } S_4 = \int_c^d |f'(x)|\,\mathrm{d}x = f(x)\big|_c^d = f(d) - f(c).$$

Do $S_3 > S_4$ nên $f(b) > f(d)$. Từ đó suy ra $f(0) > f(b) > f(d)$ và $M = f(0)$.

Mặt khác $S_3 > S_2$ nên $f(a) > f(c)$ hay $m = f(c)$.

Vậy $M + m = f(0) + f(c)$.

Chọn đáp án A □

Câu 423.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ.

Xét 4 mệnh đề sau:

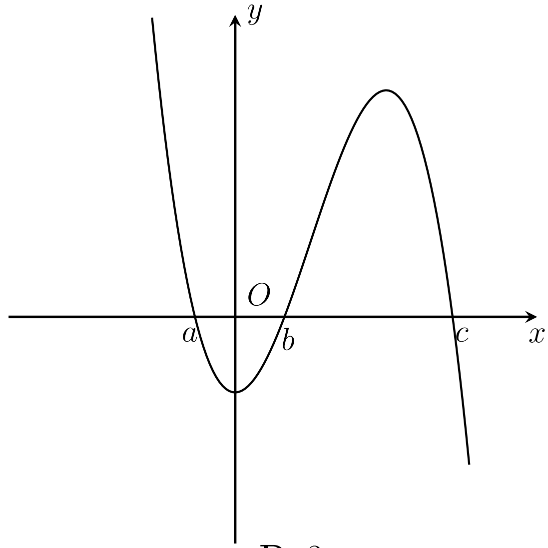
(1): $f(c) < f(a) < f(b)$.

(2): $f(c) > f(b) > f(a)$.

(3): $f(a) > f(b) > f(c)$.

(4): $f(a) > f(b)$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?



A. 4. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	

Từ đó ta thấy mệnh đề (4) đúng.

Từ đồ thị ta có diện tích hình phẳng giới hạn các đường $y = f'(x)$, trục Ox, $x = a, x = b$ nhỏ hơn diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, trục Ox, $x = b, x = c$.

Do đó $\int\limits_a^b (-f'(x))\,\mathrm{d}x < \int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow -f(x)\Big|_a^b < f(x)\Big|_b^c \Leftrightarrow -(f(b) - f(a)) < f(c) - f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$. Mà $f(a) > f(b) \Rightarrow f(a) > f(b) > f(c)$, hay mệnh đề (3) đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 424. Cho $\int\limits_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $\mathrm{I} = \int\limits_{-1}^{2} f(2x+1)\,\mathrm{d}x$.

A. $\mathrm{I} = 2$. **B**. $\mathrm{I} = \dfrac{5}{2}$. **C**. $\mathrm{I} = 4$. **D**. $\mathrm{I} = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Đặt $2x + 1 = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Với $x = -1 \Rightarrow t = -1$.

Với $x = 2 \Rightarrow t = 5$.

Suy ra $\mathrm{I} = \int\limits_{-1}^{2} f(2x+1)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{5} f(t)\cdot\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 425. Cho bốn mệnh đề sau

I) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\cos^3 x}{3} + C$.

II) $\int \dfrac{2x+1}{x^2+x+2018}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+x+2018) + C$.

III) $\int 3^x\left(2^x + 3^{-x}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{6^x}{\ln 6} + x + C$.

IV) $\int 3^x\,\mathrm{d}x = 3^x\cdot\ln 3 + C$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề **sai**?

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Ta lần lượt xét 4 mệnh đề đã cho

— Mệnh đề (I) sai vì $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\sin 2x}{2}\right) + C$.

— Mệnh đề (II) đúng vì $\int \dfrac{2x+1}{x^2+x+2018}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}(x^2+x+2018)}{x^2+x+2018} = \ln(x^2+x+2018) + C$.

— Mệnh đề (III) đúng vì $\int 3^x\left(2^x+3^{-x}\right)\mathrm{d}x = \int (6^x+1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{6^x}{\ln 6} + x + C$.

— Mệnh đề (IV) sai vì $\int 3^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{3^x}{\ln 3} + C$.

Vậy có 2 mệnh đề đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 426. Cho hình phẳng $\mathcal{D}$ giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay $\mathcal{D}$ quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \pi - 1$. **B**. $V = \pi + 1$. **C**. $V = \pi(\pi - 1)$. **D**. $V = \pi(\pi + 1)$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay $\mathcal{D}$ quanh trục hoành là

$V = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos x)\,\mathrm{d}x = (2x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi(\pi+1).$

Chọn đáp án D ☐

Câu 427. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$.

A. $\int \sin 3x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\cos 3x}{3} + C$. **B.** $\int \sin 3x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\cos 3x}{3} + C$.

C. $\int \sin 3x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\sin 3x}{3} + C$. **D.** $\int \sin 3x\,\mathrm{d}x = -\cos 3x + C$.

Lời giải.

Áp dụng công thức cơ bản $\int \sin kx\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\cos kx}{k} + C$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 428. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(x) > 0$, $\forall x \in [a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay D quanh Ox được tính theo công thức

A. $S = \int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \int_a^b f(x^2)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \pi\int_a^b f(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay D quanh Ox được tính theo công thức $S = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 429. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sqrt{x} + 3x$ là

A. $\dfrac{4}{3}x\sqrt{x} + \dfrac{3x^2}{2} + C$. **B.** $2x\sqrt{x} + \dfrac{3x^2}{2} + C$. **C.** $\dfrac{3}{2}x\sqrt{x} + \dfrac{3x^2}{2} + C$. **D.** $4x\sqrt{x} + \dfrac{3x^2}{2} + C$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. Ta được

$$\int \left(2t+3t^2\right)2t\,\mathrm{d}t = \int \left(4t^2+6t^3\right)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^4 + C = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{3x^2}{2} + C.$$

Chọn đáp án A ☐

Câu 430. Biết rằng $\int\limits_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}^2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = a + b$.

A. $T = \dfrac{1}{4}$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = \dfrac{1}{2}$. **D.** $T = 10$.

Lời giải.

$\int\limits_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x^2 = \dfrac{1}{2}\left(x^2\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int\limits_1^{\mathrm{e}} x\,\mathrm{d}x\right) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 - \dfrac{1}{2}x^2\Big|_1^{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \dfrac{1}{4}$. Vậy $T = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 431. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị của hai hàm số $y = x^2$ và $y = x + 2$. Tính diện tích S của hình (H).

A. $S = \dfrac{3}{2}$. **B.** $S = -\dfrac{9}{2}$. **C.** $S = \dfrac{9}{2}$. **D.** $S = \dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

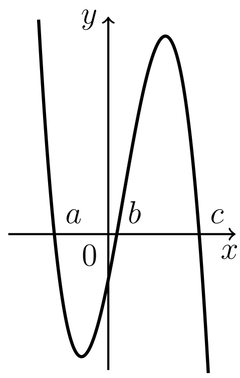
Xét phương trình $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vậy $S = \int\limits_{-1}^{2} |x^2 - x - 2| \,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-1}^{2} (x^2 - x - 2) \,\mathrm{d}x = -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 432.

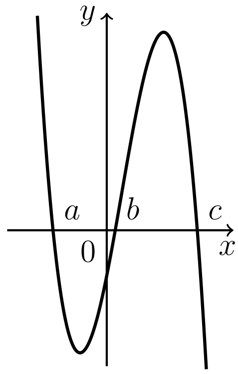
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $f(a) > f(b) > f(c)$.
B. $f(c) > f(a) > f(b)$.
C. $f(b) > f(a) > f(c)$.
D. $f(c) > f(b) > f(a)$.

Lời giải.

Gọi S_1 là diện tích của hàm số $y = f'(x)$ và trục Ox trên đoạn $[a; b]$ và S_2 là diện tích của hàm số $y = f'(x)$ và trục Ox trên đoạn $[b; c]$. Ta có



$S_1 = -\int\limits_{a}^{b} f'(x) \,\mathrm{d}x = f(a) - f(b)$ và $S_2 = \int\limits_{b}^{c} f'(x) \,\mathrm{d}x = f(c) - f(b)$.

Từ đồ thị ta có $S_2 > S_1 > 0 \Rightarrow f(c) > f(a) > f(b)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 433. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và là hàm số chẵn, biết $\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1 + \mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}x = 1$. Tính $\int\limits_{-1}^{1} f(x) \,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{2}$. **B**. 4. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1 + \mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \frac{f(x)}{1 + \mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \frac{f(x)}{1 + \mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}x$.

Đặt $I = \int\limits_{-1}^{0} \frac{f(x)}{1 + \mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Với $x = -1 \Rightarrow t = 1; x = 0 \Rightarrow t = 0$.

$I = -\int\limits_{1}^{0} \frac{f(-t)}{1 + \mathrm{e}^{-t}} \,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^t f(t)}{1 + \mathrm{e}^t} \,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} \frac{e^x f(x)}{1 + \mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}x$

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\frac{\mathrm{e}^t f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\frac{(\mathrm{e}^x+1)f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=1.$$

Vậy $\int\limits_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=2.$

Chọn đáp án D □

Câu 434. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên $[0;1]$ thỏa mãn $[f(x)]^4\cdot[f'(x)]^2\cdot(x^2+1)=1+[f(x)]^3$ và $f(x)>0$, $\forall x\in[0;1]$ biết $f(0)=2$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $3<f(1)<\frac{7}{2}$. **B**. $\frac{5}{2}<f(1)<3$. **C**. $\frac{3}{2}<f(1)<2$. **D**. $2<f(1)<\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có

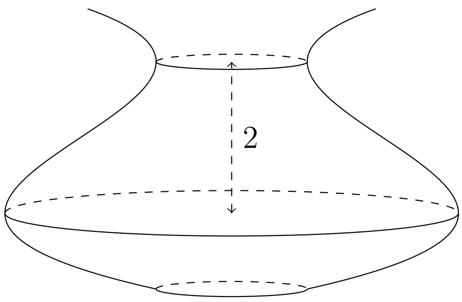
$$\begin{aligned}[f(x)]^4\cdot[f'(x)]^2\cdot\left(x^2+1\right)=1+[f(x)]^3 &\Rightarrow [f(x)]^2\cdot f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}=\sqrt{1+[f(x)]^3}\\ &\Rightarrow \frac{3\cdot[f(x)]^2\cdot f'(x)}{2\sqrt{1+[f(x)]^3}}=\frac{3}{2\sqrt{x^2+1}}\\ &\Rightarrow \left[\sqrt{1+[f(x)]^3}\right]'=\frac{3}{2\sqrt{x^2+1}}\\ &\Rightarrow \int_0^1\left[\sqrt{1+[f(x)]^3}\right]'\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Mà $f(0)=2$ nên ta được $\sqrt{1+[f(1)]^3}-3=\frac{3}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Rightarrow f(1)\approx 2{,}6$.

Chọn đáp án B □

Câu 435.

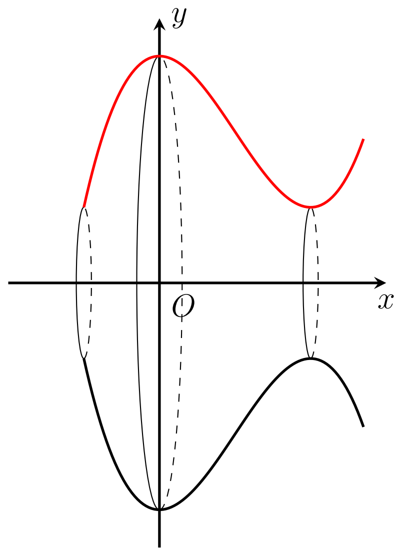
Một con quạ khát nước, nó tìm thấy một cái lọ có nước nhưng cổ lọ lại cao nó không thò mỏ uống được nên đã gắp từng viên bi (hình cầu) bỏ vào trong lọ để nước dâng lên. Hỏi con quạ cần bỏ vào lọ ít nhất bao nhiêu viên bi để có thể uống nước? Biết rằng viên bi có bán kính là $\frac{3}{4}$ (đvdd) và không thấm nước, cái lọ có hình dáng là một khối tròn xoay với đường sinh là



đồ thị của một hàm bậc 3, mực nước ban đầu trong lọ ở vị trí mà mặt thoáng tạo thành hình tròn có bán kính lớn nhất $R=3$, mực nước mà quạ có thể uống được là vị trí mà hình tròn có bán kính nhỏ nhất $r=1$ và khoảng cách giữa hai mặt này bằng 2, được minh họa ở hình vẽ trên.

A. 15. **B**. 16. **C**. 17. **D**. 18.

Lời giải.



Đặt cái bình vào hệ trục Oxy sao cho O trùng với tâm đường tròn lớn, Ox trùng với trục của cái bình, đi qua tâm hai đường tròn lớn và bé.

Khi đó một đường sinh của cái bình là đồ thị hàm bậc ba có hai điểm cực trị là $A(3;0)$ và $B(2;1)$.

Gọi hàm bậc ba đó là $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ta có hệ

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \\ y(0) = 3 \\ y(2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 3 \\ 3a + b = 0 \\ 4a + 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b;c;d) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 0; 3\right).$$

Từ đó thể tích phần bình từ đường tròn lớn lên đường tròn nhỏ là

$$V_1 = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{314\pi}{35}.$$

Thể tích một viên bi là $V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{9\pi}{16}$. Ta có $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5024}{315} \approx 15{,}95$.

Do đó số viên bi ít nhất cần phải thả vào lọ là 16 viên.

Chọn đáp án B □

Câu 436. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$.

A. $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$. **B.** $\int \cos x \,\mathrm{d}x = -\sin x + C$.

C. $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin 2x + C$. **D.** $\int \cos x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$

Chọn đáp án A □

Câu 437. Thể tích của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1; x = 4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

A. $V = \pi \int\limits_1^4 x \,\mathrm{d}x$. **B.** $V = \int\limits_1^4 \left|\sqrt{x}\right| \mathrm{d}x$. **C.** $V = \pi^2 \int\limits_1^4 x \,\mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi \int\limits_1^4 \sqrt{x} \,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích là $V = \pi \int\limits_1^4 x \,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 438. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x + 1$.

A. $\frac{5^x}{\ln 5} + x + C$. **B.** $5^x \ln 5 + x + C$. **C.** $5^x \ln x + x + C$. **D.** $5^x + x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (5^x + 1) \,\mathrm{d}x = \frac{5^x}{\ln x} + x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 439. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{2x - 1}$; biết $F(1) = 2$. Tính $F(2)$.

A. $F(2) = \dfrac{1}{2}\ln 3 + 2$. **B**. $F(2) = \dfrac{1}{2}\ln 3 - 2$. **C**. $F(2) = \ln 3 + 2$. **D**. $F(2) = 2\ln 3 - 2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$. Mà $F(1) = 2 \Leftrightarrow C = 2$. Vậy $F(2) = \dfrac{1}{2}\ln 3 + 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 440. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 - 4x + 6$ và $y = -x^2 - 2x + 6$.

A. 3π. **B**. $\pi - 1$. **C**. π. **D**. 2π.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 - 4x + 6 = -x^2 - 2x + 6 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 - 4x + 6, y = -x^2 - 2x + 6$ là:

$$V = \pi \int\limits_0^1 \left|\left(x^2 - 4x + 6\right)^2 - \left(-x^2 - 2x + 6\right)^2\right| \mathrm{d}x = \pi \left|\int\limits_0^1 \left(36x^2 - 12x^3 - 24x\right) \mathrm{d}x\right| = 3\pi.$$

Chọn đáp án A □

Câu 441. Cho $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2}\,\mathrm{d}x$ có kết quả dạng $I = \ln a + b$ (với $a > 0, b \in \mathbb{R}$). Khẳng định nào sau đây đúng:

A. $2ab = -1$. **B**. $2ab = 1$. **C**. $-b + \ln\dfrac{3}{2a} = -\dfrac{1}{3}$. **D**. $-b + \ln\dfrac{3}{2a} = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. Khi đó:

$$I = \int\limits_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t+2)^2} = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{t+2} - \frac{2}{(t+2)^2}\right) \mathrm{d}t = \left(\ln|t+2| + \frac{2}{t+2}\right)\Bigg|_0^1 = \ln\frac{3}{2} - \frac{1}{3}.$$

Vậy $\ln a + b = \ln\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -b + \ln\dfrac{3}{2a} = \dfrac{1}{3}$.

Lưu ý. Với bài toán này, nếu đọc đề không kĩ thì rất dễ rơi vào phương án nhiễu vì các bộ số a, b ở đây là không duy nhất. Nhiều em học sinh sau khi giải ra được $I = \ln\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3} = \ln a + b$ $(*)$ đã vội vàng kết luận $a = \dfrac{3}{2}, b = -\dfrac{1}{3}$, do đó $2ab = -1$ và rơi vào phương án nhiễu của đề bài. Dễ thấy $a = \dfrac{3}{2\mathrm{e}}, b = \dfrac{2}{3}$ cũng thỏa mãn $(*)$ nhưng $2ab \neq -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 442. Giả sử $\displaystyle\int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$ (C là hằng số). Tính tổng của các nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

A. -1. **B**. 1. **C**. 3. **D**. -3.

Lời giải.

Ta có

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = \left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right)+1 = \left(x^2+3x\right)^2+2\left(x^2+3x\right)+1 = \left(x^2+3x+1\right)^2.$$

Do đó
$$\int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = \int \frac{\left(x^2+3x+1\right)'\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+3x+1\right)^2} = -\frac{1}{x^2+3x+1} + C.$$
Vậy $\dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{x^2+3x+1}$.

Suy ra $g(x) = x^2+3x+1$. Do đó $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+3x+1 = 0$.

Vậy theo định lí Viet, tổng các nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ là -3.

Chọn đáp án D □

Câu 443. Giá trị $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}} x^2 \sin\left(\pi x^3\right) e^{\cos\left(\pi x^3\right)}\,\mathrm{d}x$ gần bằng số nào nhất trong các số sau đây:

A. 0,046. **B.** 0,036. **C.** 0,037. **D.** 0,038.

Lời giải.

Xét tích phân $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}} x^2 \sin\left(\pi x^3\right) e^{\cos\left(\pi x^3\right)}\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = \cos\left(\pi x^3\right) \Rightarrow dt = -3\pi x^2 \sin\left(\pi x^3\right)\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{6}} \Rightarrow t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \dfrac{9}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow t = \cos\dfrac{729\pi}{4} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 182\pi\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $I = -\dfrac{1}{3\pi}\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^t\,\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{3\pi}e^t\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{3\pi} \approx 0{,}037$.

Chọn đáp án C □

Câu 444. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là

A. $F(x) = x^3 + x^2 + 5$. **B.** $F(x) = x^3 + x + C$.

C. $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + C$. **D.** $F(x) = x^3 + x^2 + C$.

Lời giải.

Rõ ràng nguyên hàm của $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 445. Tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 (2x-1)\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

$I = \displaystyle\int_0^1 (2x-1)\mathrm{d}x = \left(x^2 - x\right)\Big|_0^1 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 446. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x) = f(x)\quad \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\displaystyle\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x = 5$, tính $I = \displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{5}{2}$. **B.** $I = \dfrac{7}{2}$. **C.** $I = \dfrac{9}{2}$. **D.** $I = \dfrac{11}{2}$.

Lời giải.

Trong tích phân $\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x$, đặt $x = 4-t$, ta được $5 = \int\limits_3^1 (4-t)f(4-t)\mathrm{d}(4-t) = \int\limits_1^3 (4-t)f(t)\mathrm{d}t = 4\int\limits_1^2 f(t)\mathrm{d}t - \int\limits_1^3 tf(t)\mathrm{d}t$. Suy ra $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 447. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V = \pi^2\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V = \pi^2\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V = 2\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 448. Cho parabol $(P): y = x^2+2$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm $M(-1; 3)$ và $N(2; 6)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai tiếp tuyến đó bằng

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** $\dfrac{13}{4}$. **C.** $\dfrac{7}{4}$. **D.** $\dfrac{21}{4}$.

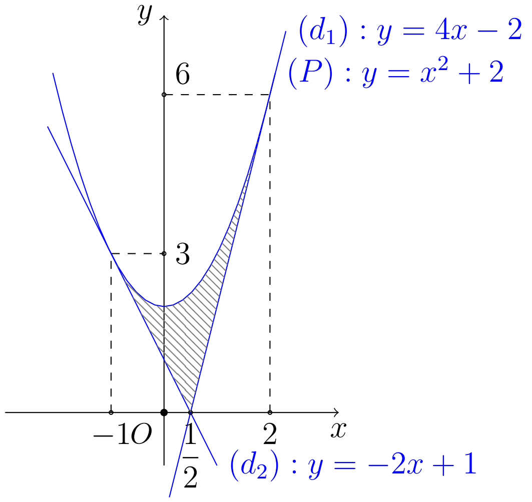
Lời giải.

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $N(2; 6)$ là $(d_1): y = 4x - 2$.

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $M(-1; 3)$ là $(d_2): y = -2x + 1$.

(d_1) cắt (d_2) tại điểm $\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$. Ta có diện tích

$$S = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} (x^2 + 2 + 2x - 1)\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} (x^2 + 2 - 4x + 2)\mathrm{d}x = \frac{7}{4}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 449. Biết rằng $\int\limits_1^2 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 0$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = -2$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases}$ ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ v = x+1 \end{cases}$

từ đây suy ra $\int\limits_1^2 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = (x+1)\ln(x+1)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \mathrm{d}x = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$. Vậy $a + b + c = 0$.

Chọn đáp án A □

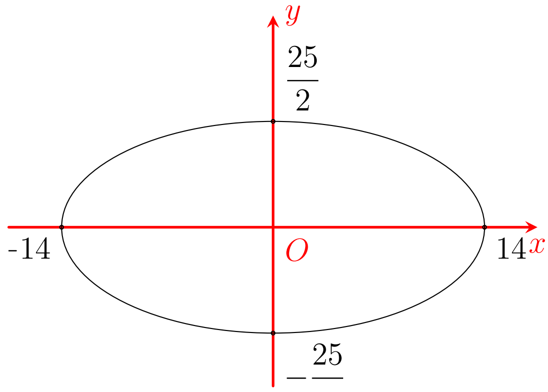
Câu 450. Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28cm, trục nhỏ 25cm. Biết cứ 1000cm^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20.000đ. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A. 183.000đ. **B.** 180.000đ. **C.** 185.000đ . **D.** 190.000đ.

Lời giải.

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình của Elip là $\dfrac{x^2}{14^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{25}{2}\right)^2}=1$. Suy ra phương trình nửa đường Elip nằm phía trên trục hoành là $y=\dfrac{25}{28}\sqrt{196-x^2}$.

Thể tích của quả dưa hấu là



$$V=\pi\int\limits_{-14}^{14}\left(\frac{25}{28}\sqrt{196-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=9162\text{cm}^3$$

. Vậy từ quả dưa hấu có thể thu được số tiền là $20.000\cdot 9.162=183.000$đ.

Chọn đáp án A □

Câu 451. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{3}{3x-1}$, $f(0)=1$, $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $5\ln 2+3$. **B.** $5\ln 2-2$. **C.** $5\ln 2+4$. **D.** $5\ln 2+2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\frac{3}{3x-1}\mathrm{d}x=\ln|3x-1|+C$ từ đây suy ra $f(x)=\begin{cases}\ln|3x-1|+C_1, & \text{nếu} x>\dfrac{1}{3}\\ \ln|3x-1|+C_2, & \text{nếu} x<\dfrac{1}{3}\end{cases}$.

$f(0)=1\Rightarrow C_2=1$, $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=2\Rightarrow C_1=2$.

Vậy $f(-1)+f(3)=\ln 4+2+\ln 8+1=5\ln 2+3$.

Chọn đáp án A □

Câu 452. Cho $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2}g(x)\,\mathrm{d}x=-1$, Tính $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{2}[x+2f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x$

A. $I=\dfrac{11}{2}$. **B.** $I=\dfrac{7}{2}$. **C.** $I=\dfrac{17}{2}$. **D.** $I=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

$$I=\int\limits_{-1}^{2}[x+2f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}x\,\mathrm{d}x+2\int\limits_{-1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x-3\int\limits_{-1}^{2}g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{17}{2}$$

Chọn đáp án C □

Câu 453. Một ô tô đang chạy với vận tốc 200 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=200+at$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh và $a\left(\text{m/s}^2\right)$ là gia tốc. Biết rằng khi đi được 1500 m thì xe dừng hẳn, hỏi gia tốc của xe bằng bao nhiêu?

A. $a=-\dfrac{200}{13}$ m/s^2. **B.** $a=-\dfrac{100}{13}$ m/s^2. **C.** $a=\dfrac{40}{3}$ m/s^2. **D.** $a=-\dfrac{40}{3}$ m/s^2.

Lời giải.

Thời điểm xe dừng hẳn là $200 + at = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{200}{a}$.

Khi đó ta có

$$\int\limits_0^{-\frac{200}{a}} (200 + at)\,\mathrm{d}t = 1500 \Leftrightarrow -\frac{200^2}{2a} = 1500 \Leftrightarrow a = -\frac{40}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 454. Cho $\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 16$. Tính $I = \int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 32$. **B.** $I = 8$. **C.** $I = 16$. **D.** $I = 4$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}(2x) = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 f(u)\,\mathrm{d}(u) = 8$.

Chọn đáp án B □

Câu 455. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$, hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải.

Theo bài ra ta có $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int (2 - 2x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln|f(x)| = 2x - x^2 + C$. (1)

Thay $x = 0$ vào (1) ta được $C = 0$, từ đó suy ra $\ln|f(x)| = 2x - x^2 \Leftrightarrow f(x) = \mathrm{e}^{2x - x^2}$.

Phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt khi chỉ khi phương trình $m = \mathrm{e}^{2x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt tương đương với $-x^2 + 2x - \ln m = 0$ có hai nghiệm phân biệt tương đương với $\Delta' = 1 - \ln m > 0 \Leftrightarrow 0 < m < \mathrm{e}$, từ đó suy ra $m = 1$ hoặc $m = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 456. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$. Nếu $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ thì tích phân $\int\limits_0^3 [x - 2f(x)]\,\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 7. **D.** 5.

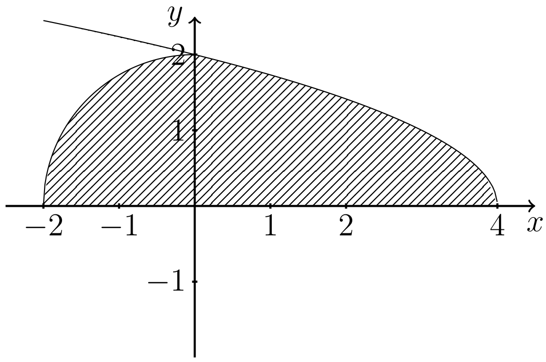
Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^3 [x - 2f(x)]\,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^3 - 2\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{9}{2} - 4 = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 457.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $\frac{1}{4}$ đường tròn có bán kính $R = 2$, đường cong $y = \sqrt{4 - x}$ và trục hoành (như hình vẽ). Tính thể tích V của khối tạo thành khi cho hình (H) quay quanh trục Ox.



A. $V = \frac{40\pi}{3}$. **B.** $V = \frac{53\pi}{6}$.

C. $V = \frac{67\pi}{6}$. **D.** $V = \frac{77\pi}{6}$.

Lời giải.

Phần đường tròn có phương trình hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$, nên thể tích khi quay hình giới hạn quanh trục Ox là

$$\pi \int\limits_{-2}^{0} (4 - x^2)\,\mathrm{d}x + \pi \int\limits_{0}^{4} (4 - x)\,\mathrm{d}x = \frac{40\pi}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 458. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số: $f(x) = x^2 - 3x$.

A. $F(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C$. **B.** $F(x) = x^3 - 3x^2 + C$.

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + C$. **D.** $F(x) = 2x - 3 + C$.

Lời giải.

Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = x^2 - 3x$ là $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 459. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Nếu $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ thì $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$.

B. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) = G(x)$.

C. $\int [f_1(x) + f_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (k là hằng số và $k \neq 0$).

Câu 460. Tìm họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2\sqrt{4 + x^3}$.

A. $2\sqrt{4 + x^3} + C$. **B.** $\frac{2}{9}\sqrt{(4 + x^3)^3} + C$. **C.** $2\sqrt{(4 + x^3)^3} + C$. **D.** $\frac{1}{9}\sqrt{(4 + x^3)^3} + C$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{4 + x^3} \Rightarrow t^2 = 4 + x^3 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = 3x^2\mathrm{d}x \Rightarrow x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}t\mathrm{d}t$.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{2}{3}t^2\mathrm{d}t = \frac{2}{9}t^3 + C = \frac{2}{9}\sqrt{(4 + x^3)^3} + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 461. Tính tích phân $\int\limits_{0}^{100} x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{4}(199\mathrm{e}^{200} + 1)$. **B.** $\frac{1}{4}(199\mathrm{e}^{200} - 1)$. **C.** $\frac{1}{2}(199\mathrm{e}^{200} + 1)$. **D.** $\frac{1}{2}(199\mathrm{e}^{200} - 1)$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = x\cdot\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^{100} - \int\limits_0^{100}\frac{1}{2}e^{2x}dx = 50e^{200} - \frac{1}{4}e^{200} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(199e^{200}+1\right).$$

Chọn đáp án A □

Câu 462. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x}{4}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{21}{16}$. **B.** $\frac{21\pi}{16}$. **C.** $\frac{15}{16}$. **D.** $\frac{15\pi}{8}$.

Lời giải.

Thể tích cần tính bằng $V = \pi\int\limits_1^4 \left(\frac{x}{4}\right)^2 dx = \frac{21\pi}{16}$.

Chọn đáp án B □

Câu 463. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$.

Khi đó, $F'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số $F(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 464. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4; 4]$ biết $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\,dx = 2$ và $\int\limits_1^2 f(-2x)\,dx = 4$. Tính $I = \int\limits_0^4 f(x)\,dx$

A. $I = 10$. **B.** $I = -6$. **C.** $I = 6$. **D.** $I = -10$.

Lời giải.

Với giả thiết $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\,dx = 2$, ta đặt $t = -x$. Khi đó $2 = \int\limits_{-2}^{0} f(-x)\,dx = -\int\limits_2^0 f(t)\,dt = \int\limits_0^2 f(t)\,dt$.

Mặt khác $\int\limits_1^2 f(-2x)\,\mathrm{d}x = 4$, ta đặt $t = 2x$. Khi đó cùng với giả thiết $f(x)$ là hàm số lẻ ta có

$$4 = \int\limits_1^2 f(-2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_2^4 f(-t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int\limits_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int\limits_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t = -8.$$

Vậy $\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + (-8) = -6.$

Chọn đáp án B □

Câu 465. Họ nguyên hàm $\int x\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{x^2+1}+C.$ **B.** $\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^2+1}+C.$ **C.** $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}+C.$ **D.** $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}+C.$

Lời giải.

Ta có $\int x\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}(x^2+1) = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}+C.$

Chọn đáp án C □

Câu 466. Họ nguyên hàm $\int \sin x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\cos x + C.$ **B.** $-\sin x + C.$ **C.** $-\cos x + C.$ **D.** $\sin x + C.$

Lời giải.

Có $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$

Chọn đáp án C □

Câu 467. Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P)\colon y = \frac{x^2-2x}{x-1}$, đường thẳng $d\colon y = x-1$ và $x = a$, $x = 2a$ $(a > 1)$ bằng $\ln 3$.

A. $a = 1.$ **B.** $a = 4.$ **C.** $a = 3.$ **D.** $a = 2.$

Lời giải.

Ta có $\frac{x^2-2x}{x-1} = x-1 \Rightarrow x^2-2x = x^2-2x+1 \Rightarrow$ vô nghiệm.

$\Rightarrow S = \int\limits_a^{2a}\left|\frac{x^2-2x}{x-1}-(x-1)\right|\mathrm{d}x = \int\limits_a^{2a}\left|\frac{-1}{x-1}\right|\mathrm{d}x = \int\limits_a^{2a}\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \ln(x-1)\Big|_a^{2a} = \ln\frac{2a-1}{a-1} = \ln 3$

$\Leftrightarrow \frac{2a-1}{a-1} = 3 \Leftrightarrow a = 2.$

Chọn đáp án D □

Câu 468. Tính thể tích của phần vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số $(P)\colon y = 2x - x^2$ và trục Ox.

A. $V = \frac{19\pi}{15}.$ **B.** $V = \frac{13\pi}{15}.$ **C.** $V = \frac{17\pi}{15}.$ **D.** $V = \frac{16\pi}{15}.$

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục Ox là nghiệm của phương trình $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Khi đó thể tích khi quay hình phẳng D là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int\limits_0^2 (2x - x^2)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) \,\mathrm{d}x \\ &= \pi \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 469. Cho $\int\limits_1^2 [3f(x) + 2g(x)] \,\mathrm{d}x = 1$ và $\int\limits_1^2 [2f(x) - g(x)] \,\mathrm{d}x = -3$. Khi đó $\int\limits_1^2 f(x) \,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{11}{7}$. **B.** $-\frac{5}{7}$. **C.** $\frac{6}{7}$. **D.** $\frac{16}{7}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \int\limits_1^2 [3f(x) + 2g(x)] \,\mathrm{d}x = 1 \\ \int\limits_1^2 [2f(x) - g(x)] \,\mathrm{d}x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\int\limits_1^2 f(x) \,\mathrm{d}x + 2\int\limits_1^2 g(x) \,\mathrm{d}x = 1 \\ 2\int\limits_1^2 f(x) \,\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 g(x) \,\mathrm{d}x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int\limits_1^2 f(x) \,\mathrm{d}x = -\frac{5}{7} \\ \int\limits_1^2 g(x) \,\mathrm{d}x = \frac{11}{7} \end{cases}$.

Chọn đáp án B □

Câu 470. Tính $I = \int 8 \sin 3x \cos x \,\mathrm{d}x = a \cos 4x + b \cos 2x + C$. Khi đó $a - b$ bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $I = 4 \int (\sin 4x + \sin 2x) \,\mathrm{d}x = -\cos 4x - 2\cos 2x + C \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a - b = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 471. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s) có gia tốc là $v'(t) = \frac{3}{t+1}$ (m/s^2). Vận tốc ban đầu của vật là 6 m/s. Tính vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

A. 11 m/s. **B.** 12 m/s. **C.** 13 m/s. **D.** 14 m/s.

Lời giải.

Vận tốc $v = \int v'(t) \,\mathrm{d}t = \int \frac{3}{t+1} \,\mathrm{d}t = 3 \ln |t + 1| + C$.

Vì $v(0) = 6 \Rightarrow C = 6 \Rightarrow v(t) = 3 \ln |t + 1| + 6 \Rightarrow v(10) = 3 \ln 11 + 6 = 13$ m/s.

Chọn đáp án C □

Câu 472. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$ là

A. $\sin 2x + C$. **B.** $\frac{1}{2} \sin 2x + C$. **C.** $-\frac{1}{2} \sin 2x + C$. **D.** $2 \sin 2x + C$.

Lời giải.

Ta có: $\int \cos 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 473. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x = 0, x = 1, y = 0$ và $y = \sqrt{2x + 1}$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $V = \pi \int\limits_0^1 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$. **B**. $V = \pi \int\limits_0^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

C. $V = \int\limits_0^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x$. **D**. $V = \int\limits_0^1 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $V = \pi \int\limits_0^1 \left(\sqrt{2x+1}\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 474. Tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B**. $\dfrac{3}{2}$. **C**. $\dfrac{1}{3}$. **D**. $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x+1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{2t}{3}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$. Khi đó

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 \frac{1}{t}\cdot t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 \mathrm{d}t = \frac{2}{3}t\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 475. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2) = 16$, $\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = 2$. Tích phân $\int\limits_0^2 xf'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 30. **B**. 28. **C**. 36. **D**. 16.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2}$, ta có: $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 1 \Rightarrow t = 2$.

$$\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \Rightarrow \int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 4 \Rightarrow \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4.$$

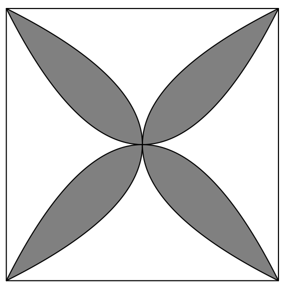
Khi đó

$$\int\limits_0^2 xf'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 x\,\mathrm{d}\left(f(x)\right) = xf(x)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2f(2) - 4 = 28.$$

Chọn đáp án B □

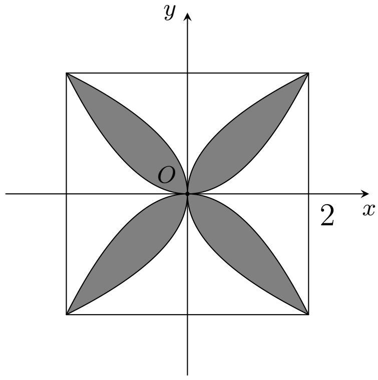
Câu 476.

Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên). Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng



A. $800\ \mathrm{cm}^2$. **B**. $\dfrac{800}{3}\ \mathrm{cm}^2$. **C**. $\dfrac{400}{3}\ \mathrm{cm}^2$. **D**. $250\ \mathrm{cm}^2$.

Lời giải.



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng 10 cm = 1 dm), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình là $y = \frac{x^2}{2}$, $y = -\frac{x^2}{2}$, $x = -\frac{y^2}{2}$, $x = \frac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{2}, y = \sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x = 0; x = 2$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Vậy diện tích một cánh hoa là $\frac{4}{3}\ \mathrm{dm}^2 = \frac{400}{3}\ \mathrm{cm}^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 477. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & (f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x \\ \Leftrightarrow\ & [f'(x) \cdot f(x)]' = 15x^4 + 12x \\ \Leftrightarrow\ & f'(x) \cdot f(x) = 3x^5 + 6x^2 + C_1. \end{aligned}$$

Do $f(0) = f'(0) = 1$ nên ta có $C_1 = 1$. Do đó:

$$\begin{aligned} & f'(x) \cdot f(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)' = 3x^5 + 6x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow\ & f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + C_2. \end{aligned}$$

Mà $f(0) = 1$ nên ta có $C_2 = 1$. Vậy $f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + 1$ suy ra $f^2(1) = 8$.

Chọn đáp án D □

Câu 478. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và $f(0) + f(1) = 0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. π. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \cos(\pi x) \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\pi\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x &= \cos(\pi x)\,f(x)\Big|_0^1 + \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\left(f(1)+f(0)\right) + \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

— *Cách 1:* Ta có

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[f(x) - k\sin(\pi x)\right]^2\mathrm{d}x &= \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2k\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x + k^2\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} - k + \frac{k^2}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 1. \end{aligned}$$

Do đó $\int_0^1 \left[f(x) - \sin(\pi x)\right]^2\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f(x) = \sin(\pi x)$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$.

— *Cách 2:* Sử dụng BĐT Holder

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = kg(x), \forall x \in [a;b]$.

Áp dụng vào bài ta có

$\frac{1}{4} = \left[\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \sin^2(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$, suy ra $f(x) = k\sin(\pi x)$.

Mặt khác: $\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow f(x) = \sin(\pi x)$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$.

Chọn đáp án C □

Câu 479. Xác định m để đồ thị hàm số (C): $y = 5x^4 - 8x^2 + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành có phần trên và phần dưới bằng nhau.

A. $\frac{9}{16}$. **B.** $\frac{16}{9}$. **C.** 9. **D.** $\frac{25}{16}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành là $5x^4 - 8x^2 + m = 0$.
Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Ta có $5t^2 - 8t + m = 0$. (1)
Đồ thị (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 5m > 0 \\ \dfrac{m}{5} > 0 \\ \dfrac{8}{5} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{16}{5}.$$

Ta có hàm số $y = f(x) = 5x^4 - 8x^2 + m$ là hàm số chẵn nên $S_1 + S_2 = S_3 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{2}S_3$. Gọi $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ là bốn hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành ta có

$$S_2 = \frac{1}{2}S_3 \Rightarrow \int\limits_{x_3}^{x_4} (-f(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{x_3}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{x_4} (5x^4 - 8x^2 + m)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^5 - \frac{8}{3}x^3 + mx\right)\Bigg|_0^{x_4} = 0 \Leftrightarrow x_4^5 - \frac{8}{3}x_4^3 + mx_4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_4^4 - \dfrac{8}{3}x_4^2 + m = 0 \qquad (2) \end{array}\right.$$

Với $x_4 = 0 \Rightarrow m = 0$ (loại).
Xét (2) $\Leftrightarrow (5x_4^4 - 8x_4^2 + m) - 4x_4^4 + \frac{16}{3}x_4^2 = 0 \Leftrightarrow 4x_4^4 - \frac{16}{3}x_4^2 = 0 \Leftrightarrow x_4^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow m = \frac{16}{9}$(nhận).
Chọn đáp án B □

Câu 480. Biết $\int\limits_0^{\pi} (x - \sin 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b}\pi^2$ trong đó a, b là các số thực và $\frac{a}{b}$ (tối giản). Tính $a + b$.

A. -3. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.
Ta có $\int\limits_0^{\pi} (x - \sin 2x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{2}$. Suy ra $a = 1$, $b = 2$ khi đó $a + b = 3$.
Chọn đáp án C □

Câu 481. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$. Đẳng thức nào **sai**?

A. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}t$.

B. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

D. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^a f(t)\,\mathrm{d}(-t)$.

Lời giải.
Ta có $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Chọn đáp án A □

Câu 482. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\int\limits_0^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 5$, $\int\limits_2^5 f'(2u)\,\mathrm{d}u = 6$, $f(0) = 3$. Giá trị của $f(10)$ bằng

A. 4. **B.** 20. **C.** -4. **D.** -20.

Lời giải.

Đặt $x = 2u \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}u$.

Đổi cận $u = 2 \Rightarrow x = 4$, $u = 5 \Rightarrow x = 10$.

Khi đó $\int\limits_2^5 f'(2u)du = \int\limits_2^5 f'(x)\dfrac{\mathrm{d}x}{2} = \dfrac{1}{2}\int\limits_2^5 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Mà $\int\limits_2^5 f'(2u)du = 6 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\int\limits_2^5 f'(x)\,\mathrm{d}x = 6 \Rightarrow \int\limits_2^5 f'(x)\,\mathrm{d}x = 12$.

Ta có $\int\limits_0^{10} f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^4 f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_4^{10} f'(x)\,\mathrm{d}x = 5 + 12 = 17$. Mà $\int\limits_0^{10} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(10) - f(0)$ $\Rightarrow f(10) = 20$.

Chọn đáp án B □

Câu 483. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{3}{3x+1}$ là

A. $\ln|3x+1| + C$. **B.** $\dfrac{1}{3x+1} + C$. **C.** $\dfrac{9}{(3x+1)^2} + C$. **D.** $3\ln|3x+1| + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \dfrac{3}{3x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|3x+1| + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 484. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x\ln x$, $y = 0$, $x = \mathrm{e}$ khi quay quanh trục Ox.

A. $\dfrac{5\mathrm{e}^3+2}{27}\pi$. **B.** $\dfrac{5\mathrm{e}^3-2}{27}\pi$. **C.** $\dfrac{5\mathrm{e}^3+2}{25}\pi$. **D.** $\dfrac{5\mathrm{e}^3-2}{25}\pi$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra $V = \pi\int\limits_1^{\mathrm{e}} \left|x^2\ln^2 x\right|\,\mathrm{d}x = \pi\left|\int\limits_1^{\mathrm{e}} x^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x\right|$. Xét $\int\limits_1^{\mathrm{e}} x^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x$

Đặt $u = \ln^2 x \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{2}{x}\ln x$, $\mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{x^3}{3}$. Ta được

$$\begin{aligned}&\int\limits_1^{\mathrm{e}} x^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x\\ =\ &\left.\dfrac{x^3}{3}\ln^2 x\right|_1^{\mathrm{e}} - \dfrac{2}{3}\int\limits_1^{\mathrm{e}} x^2\ln x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Xét $\int\limits_1^e x^2 \ln x \, dx$. Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx, \; dv = x^2 \, dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$. Ta được

$$\int\limits_1^e x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x \bigg|_1^e - \frac{1}{3} \int\limits_1^e x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x \bigg|_1^e - \frac{1}{9} x^3 \bigg|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9}.$$

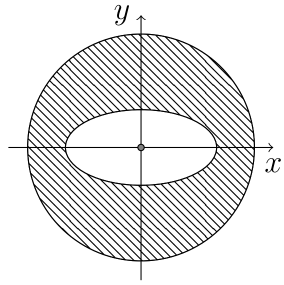
Khi đó $\int\limits_1^e x^2 \ln^2 x \, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{5}{27} e^3 - \frac{2}{27} = \frac{5e^3 - 2}{27}$. Vậy thể tích khối tròn xoay $V = \frac{5e^3 - 2}{27} \pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 485. Một quả đào có dạng hình cầu đường kính 6 cm. Hạt của nó là khối tròn xoay sinh ra bởi hình Ê-líp khi quay quanh đường thẳng nối hai tiêu điểm F_1, F_2. Biết tâm của Ê-líp trùng với tâm của khối cầu và độ dài trục lớn, trục nhỏ lần lượt là 4 cm và 2 cm. Thể tích phần cùi (phần ăn được) của quả đào bằng $\frac{a}{b} \pi \, (\text{cm}^3)$ với a, b là các số thực và $\frac{a}{b}$ (tối giản), khi đó $a - b$ bằng

A. 97. **B**. 36. **C**. 5. **D**. 103.

Lời giải.



Xét Elip có độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ lần lượt là 4 và 2. Ta có $a = 2$, $b = 1$. Phương trình chính tắc của Ê-líp là

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Gọi V_1 là thể tích khối cầu. V_2 là thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi hình Ê-líp khi quay quanh trục Ox. Khi đó thể tích V phần cùi (phần ăn được) của quả đào là $V = V_1 - V_2$.
Ta có $V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi 3^3 = 36\pi$.

$$\text{Ta có } V_2 = 2\pi \int\limits_0^2 \left| 1 - \frac{x^2}{4} \right| dx = 2\pi \int\limits_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx = 2\pi \left(x - \frac{x^3}{12}\right) \bigg|_0^2 = 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

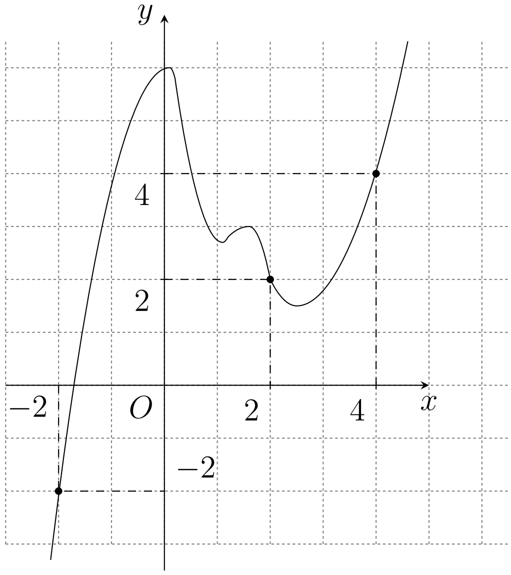
Khi đó $V = V_1 - V_2 = 36\pi - \frac{8\pi}{3} = \frac{100\pi}{3}$. Khi đó $a = 100$, $b = 3$ suy ra $a - b = 97$.

Chọn đáp án A □

Câu 486.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $h(x) = f(x) - \dfrac{x^2}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $y = h(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 3)$.
B. Hàm số $y = h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
C. Hàm số $y = h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$.
D. Hàm số $y = h(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

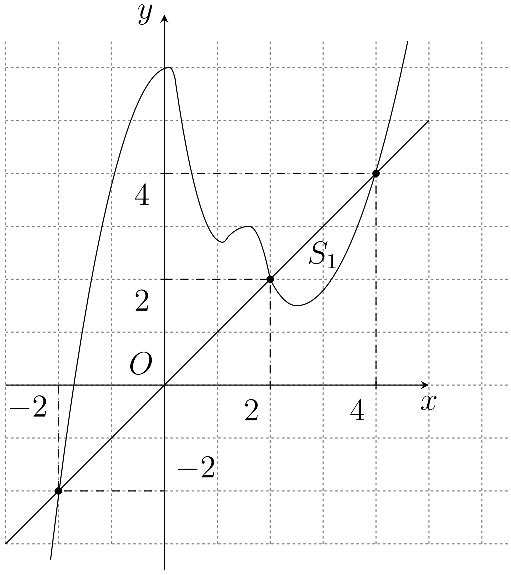


Lời giải.

Ta có $h(x) = 2f(x) - x^2$ nên $h'(x) = 2f'(x) - 2x = 2\left(f'(x) - x\right)$.

Vẽ đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị tại ba điểm $(-2; -2)$, $(2; 2)$, $(4; 4)$ tạo ra hai miền (H_1), (H_2) có diện tích là S_1 và S_2. Trong đó

$$S_1 = \int\limits_2^4 (x - f'(x))\mathrm{d}x > 0$$



nên $0 < 2\int\limits_2^4 (x - f'(x))\mathrm{d}x = \left(x^2 - 2f(x)\right)\Big|_2^4 = h(2) - h(4)$.

Do đó $h(2) > h(4)$.

Ta có $f(x)$ là hàm liên tục nên $h(x)$ cũng là hàm liên tục, $\forall x \in (2; 4)$, mà $h(2) > h(4)$ nên suy ra hàm số $y = h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 487. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2018x}$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2018x} + C$.
B. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2018} \cdot \mathrm{e}^{2018x} + C$.
C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2018 \cdot \mathrm{e}^{2018x} + C$.
D. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2018x} \cdot \ln 2018 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2018x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2018}\mathrm{e}^{2018x}\,\mathrm{d}(2018x) = \frac{1}{2018} \cdot \mathrm{e}^{2018x} + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 488. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{5}{4}$.
B. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.
C. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{4}$.
D. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{6}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 489. Một học sinh làm bài tích phân $I=\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ theo các bước sau.

— Bước 1: Đặt $x=\tan t$, suy ra $\mathrm{d}x=(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$.
— Bước 2: Đổi cận $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}; x=0\Rightarrow t=0$.
— Bước 3: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t=t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=0-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$.

Các bước làm ở trên, bước nào **sai**?

A. Bước 1. **B**. Bước 2. **C**. Bước 3. **D**. Không bước nào.

Lời giải.

Bước 3 bị sai. Sửa đúng là $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t=t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án C □

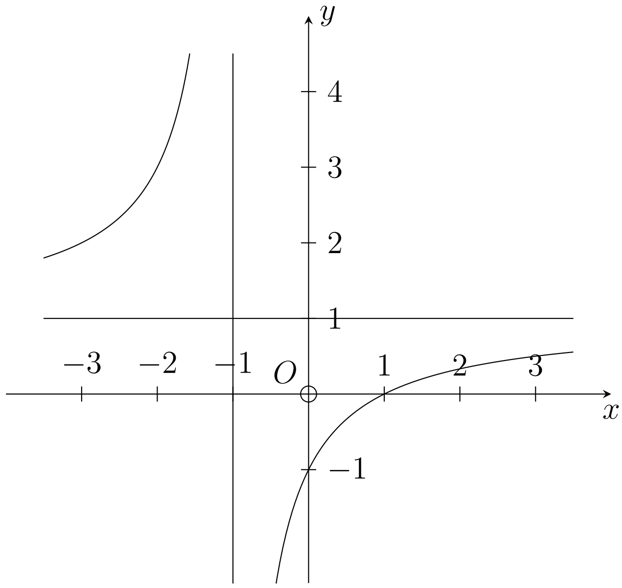
Câu 490. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $\ln 2-1$. **B**. $2\ln 2-1$. **C**. $\ln 2+1$. **D**. $\ln 2+1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số H cắt trục tọa độ tại các điểm $(0;-1)$ và $(1;0)$.

Vậy diện tích $S=\int\limits_0^1 \left(-\frac{x-1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=2\ln 2-1$.



Chọn đáp án B □

Câu 491. Tính tích phân $I=\int\limits_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x+1}}$ ta được kết quả $I=a\ln 3+b\ln 5$.

Giá trị $S=a^2+ab+3b^2$ là

A. 4. **B**. 1. **C**. 0. **D**. 5.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=3\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2; x=5\Rightarrow t=4$.

$$I=\int\limits_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{3}\int\limits_2^4 \frac{t\mathrm{d}t}{\frac{t^2-1}{3}\cdot t}=2\int\limits_2^4 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

$$= \int\limits_2^4 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^4 = 2\ln 3 - \ln 5.$$

Khi đó $a = 2, b = -1 \Rightarrow a^2 + ab + 3b^2 = 4 - 2 + 3 = 5.$

Chọn đáp án D □

Câu 492. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f'(x) \geq x + \dfrac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$ và $f(1) = 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(2) \geq 5$. **B.** $f(2) \geq 4$. **C.** $f(2) \geq \dfrac{5}{2} + \ln 2$. **D.** $f(2) \geq \dfrac{5}{2} + 2\ln 2$.

Lời giải.

Lấy tích phân hai vế ta có:

$$\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x \geq \int\limits_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(2) - f(1) \geq \left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)\Bigg|_1^2$$

$$\Leftrightarrow f(2) - 1 \geq \frac{3}{2} + \ln 2 \Leftrightarrow f(2) \geq \frac{5}{2} + \ln 2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 493. Cho số thực $a > 0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn $f(x) \cdot f(a - x) = 1$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_0^a \frac{1}{1 + f(x)}\mathrm{d}x$?

A. $I = \dfrac{2a}{3}$. **B.** $I = \dfrac{a}{2}$. **C.** $I = \dfrac{a}{3}$. **D.** $I = a$.

Lời giải.

Đặt $t = a - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = 0$.

Ta có $f(x) \cdot f(a - x) = 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{f(a - x)}$.

$$\text{Vậy } I = \int\limits_a^0 \frac{-\mathrm{d}t}{1 + \frac{1}{f(t)}} = -\int\limits_a^0 \frac{f(t)}{1 + f(t)}\mathrm{d}t = -\int\limits_a^0 \frac{1 + f(t) - 1}{1 + f(t)}\mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_0^a \frac{1 + f(t) - 1}{1 + f(t)}\mathrm{d}t = \int\limits_0^a \left(1 - \frac{1}{1 + f(t)}\right)\mathrm{d}t = \int\limits_0^a \left(1 - \frac{1}{1 + f(x)}\right)\mathrm{d}x = x|_0^a - I = a - I.$$

Do đó ta có $I = a - I \Leftrightarrow I = \dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 494. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\mathrm{e} - 1$. **B.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}} - 1$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}}$. **D.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\big|_0^1 = \frac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 495. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$, đồ thị hàm số $y = \cos x$ và trục Ox là

A. $S=\int\limits_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x$. **B**. $S=\int\limits_0^{\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$. **C**. $S=\int\limits_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x$. **D**. $S=\pi\int\limits_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo công thức tính diện tích hình phẳng bằng tích phân ta có $S=\int\limits_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 496. Họ nguyên hàm của hàm số $y=\cos 3x$ là

A. $\dfrac{\sin 3x}{3}+C$. **B**. $-\dfrac{\sin 3x}{3}+C$. **C**. $\sin 3x+C$. **D**. $-\sin 3x+C$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int\cos(ax+b)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sin(ax+b)}{a}+C$ ta có $\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sin 3x}{3}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 497. Biết $\int\limits_0^1\dfrac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x=a-\ln b$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $P=a^2+b^2$.

A. $P=13$. **B**. $P=5$. **C**. $P=4$. **D**. $P=10$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}I=\int\limits_0^1\frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x&=\int\limits_0^1\left(2-\frac{x-1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\int\limits_0^1\left(2-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\left.\left(2x-\ln|x+1|-\frac{2}{x+1}\right)\right|_0^1=3-\ln 2.\end{aligned}$$

Suy ra $P=13$.

Chọn đáp án A □

Câu 498. Cho $I=\int\limits_0^m(2x-1)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để $I<m$ là khoảng $(a;b)$. Tính $P=a-3b$.

A. $P=-3$. **B**. $P=-2$. **C**. $P=-4$. **D**. $P=-1$.

Lời giải.

Ta có: $I=\int\limits_0^m(2x-1)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. Đặt $u=2x-1\Rightarrow\mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{2x}\Rightarrow v=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$.

Vậy $I=\left.\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}(2x-1)\right|_0^m-\int\limits_0^m\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2m}(m-1)+1$.

Ta có $I<m\Leftrightarrow\mathrm{e}^{2m}(m-1)+1<m\Leftrightarrow(m-1)(\mathrm{e}^{2m}-1)<0\Leftrightarrow 0<m<1$.

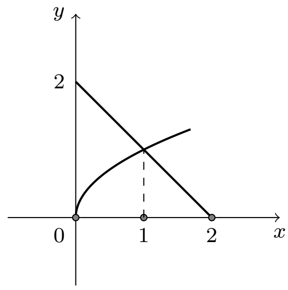
Vậy $m\in(0;1)$ theo đó $P=0-3\cdot 1=-3$

Chọn đáp án A □

Câu 499. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x+y-2=0$; $y=\sqrt{x}$; $y=0$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{5}{6}$. **B**. $\dfrac{6\pi}{5}$. **C**. $\dfrac{2\pi}{3}$. **D**. $\dfrac{5\pi}{6}$.

Lời giải.



Đặt $f(x) = 2 - x$; $g(x) = \sqrt{x}$; $h(x) = 0$.

Xét $2 - x = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geqslant 0 \\ (2-x)^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có $(H_1) : \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 0 \\ x = 0, x = 1 \end{cases}$ và $(H_2) : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \\ x = 1, x = 2 \end{cases}$.

Cho (H_1), (H_2) quay quanh Ox có thể tích lần lượt là V_1, V_2 và thể tích cần tìm là $V = V_1 + V_2$.

$V_1 = \pi \int\limits_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x = \pi \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

$V_2 = \pi \int\limits_1^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_1^2 (2-x)^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 (x-2)^2\,\mathrm{d}(x-2) = \pi \cdot \frac{(x-2)^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{3}$.

Vậy $V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 500. Biết $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^a}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính $P = 2a + b$.

A. $P = 8$. **B.** $P = 10$. **C.** $P = 6$. **D.** $P = 12$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x}$.

Đặt $t = \pi - x$.

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\pi} xf(x)\,\mathrm{d}x &= -\int\limits_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\pi - t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^{\pi} (\pi - t)f(\pi - t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\pi} (\pi - x)f(\pi - x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi} (\pi - x)f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^{\pi} \pi f(x)\,\mathrm{d}t - \int\limits_0^{\pi} xf(x)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Suy ra $\int\limits_0^{\pi} xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Xét $I_1 = \int\limits_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$.

$$\begin{aligned}
I_1 = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2} - t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} t}{\cos^{2018} t + \sin^{2018} t}\,\mathrm{d}t &= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} t}{\cos^{2018} t + \sin^{2018} t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} x}{\cos^{2018} x + \sin^{2018} x}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Xét $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^{2018} x}{\cos^{2018} x + \sin^{2018} x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \dfrac{\pi}{2} - x$.

$$I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\cos^{2018}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin^{2018}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} t}{\cos^{2018} t + \sin^{2018} t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\cos^{2018} x + \sin^{2018} x}\,\mathrm{d}x.$$

Khi đó $I_1 = 2I_2 = I_2 + I_2 = \int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$. Suy ra $\int\limits_0^{\pi} x f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2} I_1 = \dfrac{\pi^2}{4}$.

Suy ra $a = 2; b = 4$. Do đó $2a + b = 8$.

Chọn đáp án A □

Câu 501. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

A. $\int \dfrac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{(x+1)^3} + C$.

B. $\int \dfrac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{-1}{x+1} + C$.

C. $\int \dfrac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{x+1} + C$.

D. $\int \dfrac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{-2}{(x+1)^3} + C$.

Lời giải.

$\int \dfrac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}(x+1) = \dfrac{-1}{x+1} + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 502. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ và $u(x) \in [\alpha;\beta]$, $\forall x \in [a;b]$, hơn nữa $f(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int\limits_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$.

B. $\int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$.

C. $\int\limits_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$.

D. $\int\limits_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}u$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$.

Chọn đáp án C □

Câu 503. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{\pi}{4}$. **B.** $I = -1$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = 1$.

Lời giải.

Ta có $I = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 504. Cho $f(x)=\dfrac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $x\cdot f'(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$. Biết $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $\tan\alpha=3$. Tính $F(\alpha)-10\alpha^2+3\alpha$.

A. $-\dfrac{1}{2}\ln 10$. **B.** $-\dfrac{1}{4}\ln 10$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln 10$. **D.** $\ln 10$.

Lời giải.

Theo công thức tích phân từng phần ta có

$$\int x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=x\cdot f(x)-\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cũng theo công thức tích phân từng phần lại có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int x\cdot(\tan x)'\,\mathrm{d}x=x\cdot\tan x-\int\tan x\,\mathrm{d}x=x\cdot\tan x+\ln|\cos x|+C.$$

Do đó

$$F(x)=\int x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=x\cdot f(x)-x\cdot\tan x-\ln|\cos x|+C.$$

Mà $F(0)=0$ nên $F(x)=x\cdot f(x)-x\cdot\tan x-\ln|\cos x|$. Lại có $\tan\alpha=3$ nên $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=10$. Từ đó $F(\alpha)-10\alpha^2+3\alpha=-\ln\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{1}{2}\ln 10$.

Chọn đáp án C □

Câu 505. Cho $I_n=\displaystyle\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, $n\in\mathbb{N}$. Đặt $u_n=1\left(I_1+I_2\right)+2\left(I_2+I_3\right)+\cdots+n\left(I_n+I_{n+1}\right)-n$. Biết $\lim u_n=L$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $L\in(-1;0)$. **B.** $L\in(-2;-1)$. **C.** $L\in(0;1)$. **D.** $L\in(1;2)$.

Lời giải.

Ta có

$$I_n+I_{n-1}=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{e}^{-nx}+\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\mathrm{e}^{-(n-1)x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n-1}\mathrm{e}^{-(n-1)x}\Big|_0^1=-\frac{1}{n-1}\left(\mathrm{e}^{-(n-1)}-1\right).$$

Do đó $(n-1)\left(I_{n-1}+I_n\right)=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{n-1}}$. Suy ra

$$u_n=-\left[\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n+\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n-1}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{e}}\right].$$

Nên $-u_n=\dfrac{\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{\mathrm{e}}-1}-1$ và $\lim u_n=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}}$. Vậy $L\in(-1;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 506. Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $f(x)\cdot f(a-x)=1$, $\forall x\in[0;a]$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^a\dfrac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{2a}{3}$. **B.** $I=\dfrac{a}{2}$. **C.** $I=a$. **D.** $I=\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t = a - x$ thì

$$I = -\int\limits_a^0 \frac{1}{1+f(a-t)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^a \frac{1}{1+\frac{1}{f(t)}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^a \frac{f(t)}{1+f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Từ đó ta có $I + I = \int\limits_0^a \mathrm{d}x = a$. Do đó $I = \dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 507. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = a$, với $a \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{1}{2}\left(-3 + 4\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$. Hỏi số a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(\dfrac{7}{10}; 1\right)$. **B.** $\left(\dfrac{51}{50}; \dfrac{11}{10}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{11}{10}; \dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(1; \dfrac{51}{50}\right)$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = a$ là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^a |\sin x - \cos x|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin x - \cos x|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^a |\sin x - \cos x|\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^a (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\sqrt{2} - 1 - \cos a - \sin a. \end{aligned}$$

Theo bài ra ta có

$$\left(-3 + 4\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) = -2 + 4\sqrt{2} - 2\cos a - 2\sin a \Leftrightarrow \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \sin\frac{5\pi}{12}.$$

$\Rightarrow a + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{12} \Leftrightarrow a = \dfrac{\pi}{3} \approx 1{,}047 \Rightarrow a \in \left(\dfrac{51}{10}; \dfrac{11}{10}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 508. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ được tính theo công thức

A. $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \pi\int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \left|\int\limits_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ là $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 509. Giá trị của tích phân $I = \int\limits_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$ là

A. $I = 2 + \ln 2$. **B.** $I = 1 + \ln 2$. **C.** $I = 1 - \ln 2$. **D.** $I = 2 - \ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$I = \int\limits_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\,dx = \int\limits_0^1 dx - \int\limits_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$$
$$= x\Big|_0^1 - \ln(x+1)\Big|_0^1 = 1 - \ln 2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 510. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thoả mãn $f(1) = 0$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,dx = \int\limits_0^1 (x+1)e^x f(x)\,dx = \frac{e^2-1}{4}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ bằng

A. $\frac{e-1}{2}$. **B.** $\frac{e^2}{4}$. **C.** $\frac{e}{2}$. **D.** $e - 2$.

Lời giải.

Đặt $I = \int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,dx = \int\limits_0^1 (x+1)e^x f(x)\,dx = \frac{e^2-1}{4}$.

Xét

$$\int\limits_0^1 e^x f(x)\,dx = xe^x f(x)|_0^1 - \int\limits_0^1 x\,d\left(e^x f(x)\right) = -\int\limits_0^1 \left(xe^x f(x) + xe^x f'(x)\right)\,dx.$$

Suy ra

$$\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\,dx = -\int\limits_0^1 xe^x f(x)\,dx - \int\limits_0^1 e^x f(x)\,dx = -I = \frac{1-e^2}{4}.$$

Khi đó

$$\int\limits_0^1 f'(x)\left(f'(x) + xe^x\right)\,dx = \int\limits_0^1 \left([f'(x)]^2 + xe^x f'(x)\right)\,dx = \int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,dx + \int\limits_0^1 xe^x f'(x)\,dx = 0.$$

Do $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, xe^x liên tục trên $[0;1] \subset \mathbb{R}$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,dx \neq 0$, suy ra $f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in [0;1]$ nên

$$f'(x) = -xe^x \Rightarrow f(x) = -\int xe^x = -\int x\,de^x = -xe^x + \int e^x\,dx = -xe^x + e^x + C.$$

Từ $f(1)=0$ suy ra $C=0$. Vậy $f(x)=-xe^x+e^x$. Do đó

$$\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(-xe^x+e^x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 e^x\,\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}e^x+\int\limits_0^1 e^x\,\mathrm{d}x$$

$$=-xe^x\Big|_0^1+2\int\limits_0^1 e^x\,\mathrm{d}x=-e+2e^x\Big|_0^1$$

$$=-e+2(e-1)=e-2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 511. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x$.

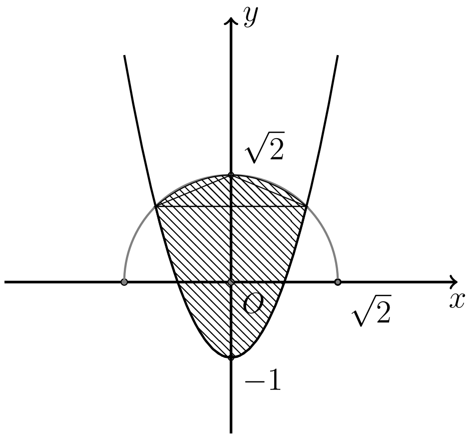
A. $2\cos 2x+C$. **B.** $2\cos 2x+C$. **C.** $\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

Lời giải.

Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x$ là $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 512. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=2x^2-1$ và nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{2-x^2}$ với $(-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2})$ (phần tô đậm trong hình vẽ).



Diện tích của (H) bằng

A. $\dfrac{3\pi+2}{6}$. **B.** $\dfrac{3\pi+10}{3}$. **C.** $\dfrac{3\pi+10}{6}$. **D.** $\dfrac{3\pi-2}{6}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=f(x)=2x^2-1$ và nửa đường tròn $y=g(x)=\sqrt{2-x^2}$ $(-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2})$ là

$2x^2-1=\sqrt{2-x^2}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2\ge 1\\ 2-x^2=4x^4-4x^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\ge\dfrac{1}{2}\\ 4x^4-3x^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vee x\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x^2=1\\ x^2=-\dfrac{1}{4}\text{ (vô lý)}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vee x\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ x=1\vee x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right..$$

$$S=\int\limits_{-1}^1|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^1|2x^2-1-\sqrt{2-x^2}|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^1(\sqrt{2-x^2}-2x^2+1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = A - 2B + C$$

Trong đó:

— $A = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$

Đặt $x = \sqrt{2}\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = \sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t$ với $t \in [-\pi;\pi]$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$; $x = -1 \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{4}$.

Khi đó $A = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2-2cos^2t}\cdot\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2|\cos t|\cdot\cos tdt$

$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cdot\left(\dfrac{\cos 2t+1}{2}\right)\mathrm{d}t$

$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t\,\mathrm{d}t + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\cdot\sin 2t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{2}\cdot 2 + \dfrac{\pi}{2} = 1 + \dfrac{\pi}{2}$

— $B = \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \dfrac{2}{3}$

— $C = \int\limits_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 2$

Suy ra $S = A - 2B + C = 1 + \dfrac{\pi}{2} - 2\cdot\dfrac{2}{3} + 2 = \dfrac{3\pi+10}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 513. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $2 + \ln 15$. **B.** $4 + \ln 15$. **C.** $3 + \ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \ln|2x-1| + C = \begin{cases} \ln(2x-1) + C_1 & \text{khi } x \geq \dfrac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + C_2 & \text{khi } x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Do $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$ nên ta có $C_1 = 2$ và $C_2 = 1$.

Vậy $f(-1) + f(3) = 3 + \ln 3 + \ln 5 = 3 + \ln 15$.

Chọn đáp án C □

Câu 514. Tính tích phân $I = \int\limits_{0}^{3} \dfrac{\mathrm{d}x}{x+2}$.

A. $I = -\dfrac{21}{100}$. **B.** $I = \ln\dfrac{5}{2}$. **C.** $I = \dfrac{4581}{5000}$. **D.** $I = \log\dfrac{5}{2}$.

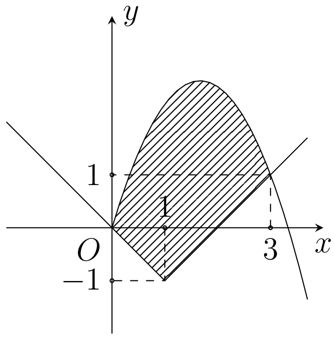
Lời giải.

$I = \int\limits_{0}^{3} \dfrac{\mathrm{d}x}{x+2} = \ln|x+2|\Big|_{0}^{3} = \ln 5 - \ln 2 = \ln\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 515.

Cho H là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y = \dfrac{10}{3}x - x^2$, $y = \begin{cases} -x & \text{khi} \quad x \leq 1 \\ x - 2 & \text{khi} \quad x > 1 \end{cases}$. Diện tích của H bằng



A. $\dfrac{11}{2}$. **B.** $\dfrac{13}{2}$. **C.** $\dfrac{11}{6}$. **D.** $\dfrac{14}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{10}{3}x - x^2 + x\right) \mathrm{d}x + \int_1^3 \left(\frac{10}{3}x - x^2 - x + 2\right) \mathrm{d}x = \frac{13}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 516. Cho hàm số $y = \pi^x$ có đồ thị C. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi C, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$, $x = 3$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V = \pi^3 \displaystyle\int_2^3 \pi^x \,\mathrm{d}x$. **B.** $V = \pi^2 \displaystyle\int_2^3 \pi^x \,\mathrm{d}x$. **C.** $V = \pi \displaystyle\int_3^2 \pi^{2x} \,\mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi \displaystyle\int_2^3 \pi^{2x} \,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có: $V = \pi \displaystyle\int_2^3 (\pi^x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_2^3 \pi^{2x} \,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 517. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty) \setminus \{\mathrm{e}\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x(\ln x - 1)}$, $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) = \ln 6$ và $f\left(\mathrm{e}^2\right) = 3$. Giá trị của biểu thức $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) + f\left(\mathrm{e}^3\right)$ bằng

A. $3(\ln 2 + 1)$. **B.** $2\ln 2$. **C.** $3\ln 2 + 1$. **D.** $\ln 2 + 3$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x(\ln x - 1)} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\ln x - 1)}{\ln x - 1} = \ln|\ln x - 1| + C$

$= \begin{cases} \ln(\ln x - 1) + C_1 & \text{khi} \quad x > \mathrm{e} \\ \ln(1 - \ln x) + C_2 & \text{khi} \quad 0 < x < \mathrm{e} \end{cases}$.

Vì $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) = \ln 6 \Rightarrow \ln\left(1 - \ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + C_2 = \ln 6 \Rightarrow \ln 3 + C_2 = \ln 6 \Rightarrow C_2 = \ln 6 - \ln 3 = \ln 2$.

Vì $f\left(\mathrm{e}^2\right) = 3 \Rightarrow \ln\left(\ln \mathrm{e}^2 - 1\right) + C_1 = 3 \Rightarrow C_2 = 3$.

Do đó $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) + f\left(\mathrm{e}^3\right) = \ln\left(1 - \ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) + \ln 2 + \ln\left(\ln \mathrm{e}^3 - 1\right) + 3 = 2\ln 2 + \ln 2 + 3 = 3(\ln 2 + 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 518. Biết $\displaystyle\int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + \mathrm{e}x^3 \cdot 2^x}{\pi + \mathrm{e} \cdot 2^x} \mathrm{d}x = \frac{1}{m} + \frac{1}{\mathrm{e}\ln n} \ln\left(p + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} + \pi}\right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $S = m + n + p$.

A. $S = 7$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = 8$. **D.** $S = 5$.

Lời giải.

$$\int\limits_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + \mathrm{e}x^3 \cdot 2^x}{\pi + \mathrm{e} \cdot 2^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{x^3\left(\pi + \mathrm{e}\cdot 2^x\right) + 2^x}{\pi + \mathrm{e}\cdot 2^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(x^3 + \frac{2^x}{\pi + \mathrm{e}\cdot 2^x}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^3\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \frac{2^x}{\pi + \mathrm{e}\cdot 2^x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + \frac{1}{\ln 2}\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(2^x\right)}{\pi + \mathrm{e}\cdot 2^x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\mathrm{e}\cdot\ln 2}\ln\left|\pi + \mathrm{e}\cdot 2^x\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{\mathrm{e}\cdot \ln 2}\ln\frac{\pi + 2\mathrm{e}}{\pi + \mathrm{e}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\mathrm{e}\cdot\ln 2}\ln\left(1 + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right).$$

Suy ra $S = 7$.

Chọn đáp án A □

Câu 519. Họ nguyên hàm của hàm số $\mathrm{e}x^{\mathrm{e}} + 4$ là

A. $\mathrm{e}x^{\mathrm{e}+1} + 4x + C$. **B.** $\mathrm{e}^2x^{\mathrm{e}-1} + C$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1} + 4x + C$. **D.** $\dfrac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1} + 4x + C$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int \left(\mathrm{e}x^{\mathrm{e}} + 4\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}\int x^{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x + \int 4\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\frac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1} + 4x + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 520. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\cos x + \dfrac{1}{x^2}$ trên $(0; +\infty)$.

A. $3\cos x + \ln x + C$. **B.** $3\sin x - \dfrac{1}{x} + C$. **C.** $-3\sin x + \dfrac{1}{x} + C$. **D.** $3\cos x + \dfrac{1}{x} + C$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int (3\cos x + \frac{1}{x^2})\,\mathrm{d}x = 3\int \cos x\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 3\sin x - \frac{1}{x} + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 521. Cho số dương a và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $2a^2$. **B.** a^2. **C.** a. **D.** $2a$.

Lời giải.

Đặt $x = -t$, suy ra $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Khi đó

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{a}^{-a} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} \left[a - f(t)\right]\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} a\mathrm{d}x - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} a\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a\cdot(a+a) = a^2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 522. Trong các hàm số sau, hàm số nào không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$?

A. $y = \dfrac{x^4}{4} - 1$. **B.** $y = \dfrac{x^4}{4} + 1$. **C.** $y = \dfrac{x^4}{4}$. **D.** $y = 3x^2$.

Lời giải.

Ta có

$$\int x^3\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C.$$

Suy ra hàm số $y = 3x^2$ không phải là nguyên hàm của $y = x^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 523. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^2$. Giá trị của biểu thức $F'(4)$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 16.

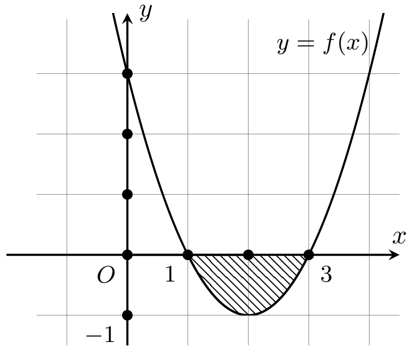
Lời giải.

Theo định nghĩa nguyên hàm, ta có $F'(x) = x^2$. Suy ra $F'(4) = 16$.

Chọn đáp án D □

Câu 524.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị đã cho và trục Ox. Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức nào dưới đây?



A. $V = \pi^2 \int_1^3 (f(x))^2\,dx$.
B. $V = \int_1^3 (f(x))^2\,dx$.
C. $V = \frac{1}{3}\int_1^3 (f(x))^2\,dx$.
D. $V = \pi \int_1^3 (f(x))^2\,dx$.

Lời giải.

Theo công thức tính thể tích khối tròn xoay khi quay một hình phẳng xung quanh trục Ox, ta có $V = \pi \int_1^3 (f(x))^2\,dx$.

Chọn đáp án D □

Câu 525. Cho số dương a thỏa mãn hình phẳng giới hạn bởi các đường parabol $y = ax^2 - 2$ và $y = 4 - 2ax^2$ có diện tích bằng 16. Tìm giá trị của a.

A. 1. **B**. $\frac{1}{2}$. **C**. $\frac{1}{4}$. **D**. 2.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 - 2 = 4 - 2ax^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{a} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$.

Đặt $m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} > 0$. Khi đó, diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai parabol là

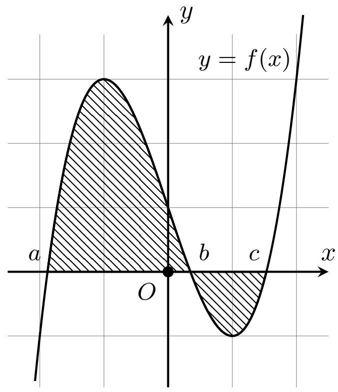
$$S = \int_{-m}^{m} |3ax^2 - 6|\mathrm{d}x = \int_{-m}^{m} (6 - 3ax^2)\mathrm{d}x = (6x - ax^3)|_{-m\to m} = 12m - 2am^3 = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{a}}.$$

Từ đó suy ra $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{a}} = 16 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 526.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tính diện tích S của hình phẳng được đánh dấu trong hình.



A. $S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$.
B. $S = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.
C. $S = -\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.
D. $S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$.

Lời giải.

Ta có $S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|\int_b^c f(x)\,dx\right| = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$.

Chọn đáp án A □

Câu 527. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{nếu } x > 0 \\ \cos x & \text{nếu } x \le 0 \end{cases}$. Tính giá trị biểu thức $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)\,dx$.

A. Đáp án khác. **B**. $I = \dfrac{1}{2}$. **C**. $I = 1$. **D**. $I = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} (1-2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left(x - x^2\right)\Big|_0^1 = 1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 528. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2^{2x}$.

A. $F(x) = 2^{2x} \cdot \ln 2$. **B**. $F(x) = \dfrac{2^{2x}}{\ln 2} + C$.

C. $F(x) = \dfrac{4^x}{\ln 4} + C$. **D**. $F(x) = 4^x \cdot \ln 4 + C$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 2^{2x}\,\mathrm{d}x = \int 4^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{4^x}{\ln 4} + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 529. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 2x$ và $y = -x^2 + 4x$.

A. $S = 12$. **B**. $S = 9$. **C**. $S = \dfrac{11}{3}$. **D**. $S = 27$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

Suy ra diện tích hình giới hạn là

$$S = \int\limits_0^3 \left|x^2 - 2x - (-x^2 + 4x)\right|\mathrm{d}x = \left|\int\limits_0^3 (2x^2 - 6x)\,\mathrm{d}x\right| = 9.$$

Chọn đáp án B □

Câu 530. Cho $I = \displaystyle\int\limits_0^1 (2x - m^2)\,\mathrm{d}x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $I + 3 \geq 0$.

A. 4. **B**. 0. **C**. 5. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int\limits_0^1 (2x - m^2)\,\mathrm{d}x = \left(x^2 - m^2x\right)\Big|_0^1 = 1 - m^2$.

Để $I + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Từ đó suy ra có 2 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 531. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 2$ có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \leq x \leq 2)$ là một nửa đường tròn đường kính là $\sqrt{5}x^2$. Tính thể tích V của vật thể đã cho.

A. $V = 2\pi$. **B.** $V = 5\pi$. **C.** $V = 4\pi$. **D.** $V = 3\pi$.

Lời giải.

Do thiết diện là nửa đường tròn với đường kính $\sqrt{5}x^2$ nên diện tích của thiết diện là

$$S(x) = \frac{\pi\left(\frac{\sqrt{5}x^2}{2}\right)^2}{2} = \frac{5\pi x^4}{8}.$$

Từ đó suy ra thể tích của vật thể là

$$V = \int_0^2 S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{5\pi x^4}{8}\,\mathrm{d}x = 4\pi.$$

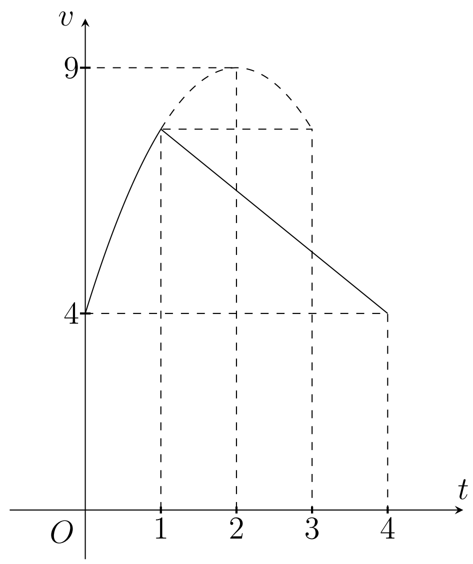
Chọn đáp án C □

Câu 532.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình vẽ bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại vật chuyển động chậm dần đều. Tính quãng đường S mà vật đi được trong 4 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $S = 23,71$ km. **B.** $S = 23,58$ km.

C. $S = 23,56$ km. **D.** $S = 23,72$ km.



Lời giải.

Trong 1 giờ đầu, ta gọi phương trình vận tốc của vật là $v = at^2 + bt + c$, suy ra $v' = 2at + b$.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v(2) = 9 \\ v'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + 4 = 9 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases}.$$

Suy ra $v(t) = -\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4$, từ đó ta có $v(1) = \frac{31}{4}$.

Trong 3 giờ sau, gọi phương trình vận tốc $v(t) = at + b$.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} v(1) = a + b = \dfrac{31}{4} \\ v(4) = 4a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = 9 \end{cases}.$$

Suy ra $v(t) = -\frac{5}{4}t + 9$.

Quãng đường vật đi trong 4 giờ là

$$S = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right)\,\mathrm{d}t + \int_1^4 \left(-\frac{5}{4}t + 9\right)\,\mathrm{d}t = 23,7083.$$

Chọn đáp án A □

Câu 533. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức sau với mọi $x \in [1;4]$

$$\begin{cases} f(1) = 2g(1) = 2 \\ f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{g(x)} \\ g'(x) = -\dfrac{2}{x\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{f(x)}. \end{cases}$$

Tính $I = \int\limits_1^4 [f(x)g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 4\ln 2$. **B.** $I = 4$. **C.** $I = 2\ln 2$. **D.** $I = 2$.

Lời giải.

Theo bài ra ta có

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}} = -\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f(x)g(x) = -\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

Kết hợp với giả thiết ta có

$$f(1)g(1) = 2 = \frac{2}{\sqrt{1}} + C \Rightarrow C = 0.$$

Từ đó suy ra

$$I = \int\limits_1^4 [f(x)g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4.$$

Chọn đáp án B □

Câu 534. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

A. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$.

B. $\int\limits_a^b [f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

D. $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 (x\cdot x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ và $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 \cdot \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 (x\cdot x)\,\mathrm{d}x \neq \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_a^b [f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ là mệnh đề sai.

Chọn đáp án B □

Câu 535. Biết $\int\limits_1^2 \ln(9-x^2)\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2 + c$ với $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a+b+c$.

A. $S=0$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=-1$.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_1^2 \ln(9-x^2)\,\mathrm{d}x = \ln(9-x^2)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}\left(\ln(9-x^2)\right) = \ln 5 - \ln 8 + 2\int\limits_1^2 \frac{x^2}{9-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \ln 5 - 2\ln 2 + \int\limits_1^2 \left(-2 + \frac{3}{x+3} - \frac{3}{x-3}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \ln 5 - 2\ln 2 + \left(-2x + 3\ln|x+3| - 3\ln|x-3|\right)\Big|_1^2$$

$$= 5\ln 5 - 6\ln 2 - 2.$$

Vậy $S=-3$.

Chọn đáp án C □

Câu 536. Cho $I = \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\,\mathrm{d}x$. Đặt $t = \cos 2x$ thì mệnh đề nào đúng?

A. $I = \int \frac{-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. **B.** $I = \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. **C.** $I = \frac{1}{2}\int \frac{-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. **D.** $I = 2\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

Lời giải.

Ta có $\frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \frac{\sin 2x}{1 - 2\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{\sin 2x}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x} = \frac{2\sin 2x}{1+\cos^2 2x}$.

$\mathrm{d}t = -2\sin 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow 2\sin 2x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \Rightarrow I = \int \frac{-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án A □

Câu 537. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ quanh trục Ox.

A. $V = \pi(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e})$. **B.** $V = \pi\mathrm{e}^2$. **C.** $V = \pi(\mathrm{e}^2 + \mathrm{e})$. **D.** $V = \pi\mathrm{e}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích vật thể tròn xoay ta có

$$V = \pi\int\limits_1^2 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \pi\int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

$$= \pi x\mathrm{e}^x\Big|_1^2 - \pi\int\limits_1^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \pi\left(2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\Big|_1^2\right) = \pi\mathrm{e}^2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 538. Tìm nguyên hàm I của hàm số $y = \mathrm{e}^x - 3x^2$.

A. $I = \mathrm{e}^x - x^3 + C$. **B.** $I = \mathrm{e}^x + x^3 + C$. **C.** $I = \mathrm{e}^x + 6x + C$. **D.** $I = \mathrm{e}^x - 6x + C$.

Lời giải.

$I = \int (\mathrm{e}^x - 3x^2)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - x^3 + C$.

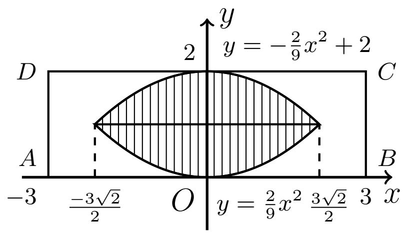
Chọn đáp án A □

Câu 539. Cho một mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng là 2 m, chiều dài gấp ba chiều rộng. Người ta chia mảnh vườn bằng cách dùng hai đường parabol, mỗi parabol có đỉnh là trung điểm của một cạnh dài và đi qua hai mút của cạnh dài đối diện. Tính tỉ số k diện tích phần mảnh vườn nằm ở miền trong hai parabol với diện tích phần đất còn lại?

A. $=\dfrac{1}{3}$. **B.** $=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $=\dfrac{1}{2}$. **D.** $=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{7}$.

Lời giải.

Giả sử mảnh vườn được gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên. Khi đó phương trình hai parabol có đỉnh là trung điểm AB, CD lần lượt là $y=\dfrac{2}{9}x^2$ và $y=-\dfrac{2}{9}x^2+2$. Xét phương trình $\dfrac{2}{9}x^2=-\dfrac{2}{9}x^2+2 \Rightarrow x=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.



Miền diện tích giới hạn bởi các parabol (như hình vẽ) có diện tích là

$$S=\int\limits_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left|-\frac{2}{9}x^2+2-\frac{2}{9}x^2\right|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(2-\frac{4}{9}x^2\right)\,\mathrm{d}x=4\sqrt{2}.$$

Ta có $S_{ABCD}=12 \Leftrightarrow k=\dfrac{4\sqrt{2}}{12-4\sqrt{2}}=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{7}$.

Chọn đáp án D □

Câu 540. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và $f(0)=0$, $f'(1)=\dfrac{9}{2}$, $\displaystyle\int\limits_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\frac{39}{4}$, $\displaystyle\int\limits_0^1(x^2+x)f''(x)\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{14}{3}$. **B.** $I=14$. **C.** $I=\dfrac{7}{3}$. **D.** $I=7$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{5}{2}=\displaystyle\int\limits_0^1(x^2+x)f''(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(x^2+x)\,\mathrm{d}f'(x)=(x^2+x)f'(x)\big|_0^1-\int\limits_0^1(2x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \displaystyle\int\limits_0^1(2x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{13}{2}$ (1).

$\Rightarrow \displaystyle\int\limits_0^1\left[4[f'(x)]^2-12(2x+1)f'(x)+9(2x+1)^2\right]\,\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow \displaystyle\int\limits_0^1\left[2f'(x)-3(2x+1)\right]^2\,\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow 2f'(x)-3(2x+1)=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{3(x^2+x)}{2}+C$

Từ $f(0)=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{3(x^2+x)}{2}$. Vậy $I=\displaystyle\int\limits_0^2\frac{3(x^2+x)}{2}\,\mathrm{d}x=7$.

Chọn đáp án D □

Câu 541. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=3x^2+1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ là

A. $S=8$. **B.** $S=12$. **C.** $S=10$. **D.** $S=9$.

Lời giải.

Ta có $S=\int\limits_0^2 \left|3x^2+1\right| \mathrm{d}x=\int\limits_0^2 \left(3x^2+1\right) \mathrm{d}x=\left.\left(x^3+x\right)\right|_0^2=10$.

Chọn đáp án C □

Câu 542. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ là

A. $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+C$. **B.** $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+C$. **C.** $\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x+C$. **D.** $2\mathrm{e}^{-x}+C$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right) \mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 543. $\int\limits_0^1 \dfrac{x-1}{x^2-2x+2} \mathrm{d}x$ bằng

A. $\ln 2$. **B.** $-\ln 2$. **C.** $\ln\sqrt{2}$. **D.** $-\ln\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \dfrac{x-1}{x^2-2x+2} \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^2-2x+2} \mathrm{d}(x^2-2x+2)=\dfrac{1}{2}\ln\left.\left|x^2-2x+2\right|\right|_0^1=-\dfrac{1}{2}\ln 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 544. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{5\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x} \mathrm{d}x=a\pi+\ln b$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S=a+b$.

A. $S=2+\sqrt{2}$. **B.** $S=\dfrac{11}{4}$. **C.** $S=\dfrac{5}{4}$. **D.** $S=\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Phân tích $5\sin x+\cos x=\alpha\left(\sin x+\cos x\right)+\beta\left(-\sin x+\cos x\right)\Rightarrow \alpha=3, \beta=-2$.

Suy ra

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x} \mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(3-2\frac{-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\right) \mathrm{d}x$$

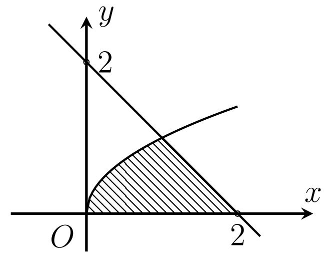
$$=\left.\left(3x-2\ln\left|\sin x+\cos x\right|\right)\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3\pi}{4}-2\ln\sqrt{2}=\frac{3\pi}{4}+\ln\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S=a+b=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 545. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x}$, đường thẳng $y=2-x$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng trên khi quay quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{7\pi}{6}$. **B.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{5\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{5\pi}{4}$.



Lời giải.

Ta có $\sqrt{x}=-x+2 \Leftrightarrow \begin{cases}-x+2\geq 0\\ x=(-x+2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 2\\ x^2-5x+4=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Thể tích $V=\pi\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2\,\mathrm{d}x+\pi\int\limits_1^2(-x+2)^2\,\mathrm{d}x=\pi\left[\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1+\left.\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\right|_1^2\right]=\frac{5\pi}{6}.$

Chọn đáp án C □

Câu 546. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1;2\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{3}{x^2-x-2}$, $f(-2)=2\ln 2+2$ và $f(-2)-2f(0)=4$. Giá trị của biểu thức $f(-3)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ bằng

A. $2+\ln 5$. **B.** $2+\ln\dfrac{5}{2}$. **C.** $2-\ln 2$. **D.** $1+\ln\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{3}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x=\int\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C.$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{x-2}{x+1}+C_1, & x\in(-\infty;-1)\\ \ln\dfrac{2-x}{x+1}+C_2, & x\in(-1;2)\\ \ln\dfrac{x-2}{x+1}+C_3, & x\in(2;+\infty)\end{cases}$$

Xét điều kiện $\begin{cases}f(-2)=2\ln 2+2\\ f(-2)-2f(0)=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1=2\\ C_2=-1\end{cases}.$

Suy ra $f(-3)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln\dfrac{5}{2}+2+\ln 1-1=1+\ln\dfrac{5}{2}.$

Chọn đáp án D □

Câu 547. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn $[-\pi;\pi]$ thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=2018$. Tính $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{2018^x+1}\,\mathrm{d}x.$

A. 2018. **B.** 4036. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{2018}$.

Lời giải.

Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\,\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=-\pi\Rightarrow t=\pi$; $x=\pi\Rightarrow t=-\pi$. Khi đó

$$I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{2018^x+1}\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(-t)}{2018^{-t}+1}(-\,\mathrm{d}t)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2018^t\cdot f(t)}{2018^t+1}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2018^x\cdot f(x)}{2018^x+1}\,\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow 2I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{2018^x+1}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2018^x\cdot f(x)}{2018^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=4036\Rightarrow I=2018.$$

Chọn đáp án A □

Câu 548. Cho $\displaystyle\int\limits_{-2}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{-2}^{1}[2f(x)-1]\,\mathrm{d}x.$

A. -9. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 5.

Lời giải.

$$I=\int\limits_{-2}^{1}[2f(x)-1]\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{-2}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-2}^{1}\mathrm{d}x=3.$$

Chọn đáp án B □

Câu 549. Tích phân $\int\limits_1^2 (x+3)^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{61}{9}$. **B.** 4. **C.** 61. **D.** $\dfrac{61}{3}$.

Lời giải.

$$\int\limits_1^2 (x+3)^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 (x^2+6x+9)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}+9x\right)\Big|_1^2 = \frac{61}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 550. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\cos 2x$ là

A. $-\sin 2x + C$. **B.** $-2\sin 2x + C$. **C.** $\sin 2x + C$. **D.** $2\sin 2x + C$.

Lời giải.

$$\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 551. Cho $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \dfrac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\,\mathrm{d}x = a + b\sqrt{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Khi đó giá trị của a là

A. $\dfrac{26}{27}$. **B.** $-\dfrac{26}{27}$. **C.** $-\dfrac{27}{26}$. **D.** $-\dfrac{25}{27}$.

Lời giải.

Nhân cả tử và mẫu với lượng liên hợp của $3x+\sqrt{9x^2-1}$ ta được

$$I = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} x\left(3x-\sqrt{9x^2-1}\right)\mathrm{d}x = 3\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} x^2\,\mathrm{d}x - \int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} x\sqrt{9x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

Đặt $u = 9x^2 - 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 18x\,\mathrm{d}x$ và đổi cận, ta được

$$I = x^3\Big|_{\frac{1}{3}}^{1} - \frac{1}{18}\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\sqrt{9x^2-1}\cdot 18x\,\mathrm{d}x = x^3\Big|_{\frac{1}{3}}^{1} - \frac{1}{18}\int\limits_0^8 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{26}{27} + \left(-\frac{u^{\frac{3}{2}}}{27}\right)\Big|_0^8 = \frac{26}{27} - \frac{16\sqrt{2}}{27}.$$

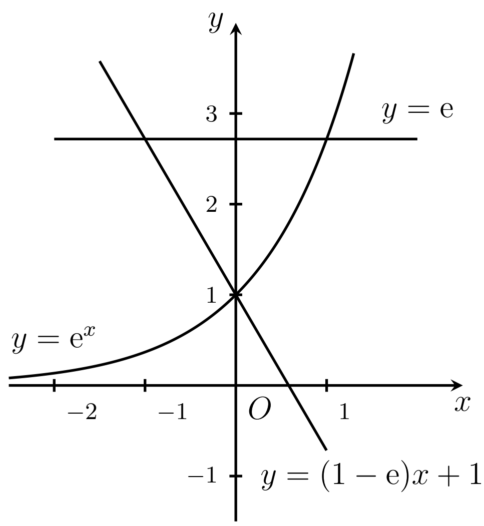
Chọn đáp án A □

Câu 552.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \mathrm{e}$, $y = \mathrm{e}^x$ và $y = (1-\mathrm{e})x + 1$ (tham khảo hình vẽ bên). Diện tích của (H) là

A. $S = \dfrac{\mathrm{e}+1}{2}$. **B.** $S = \mathrm{e} + \dfrac{1}{2}$.

C. $S = \mathrm{e} + \dfrac{3}{2}$. **D.** $S = \dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, ta xác định nhanh các hoành độ giao điểm của từng cặp đồ thị hàm số lần lượt là $x=-1$, $x=0$, $x=1$.

$$S=\int\limits_{-1}^{0}(\mathrm{e}-(1-\mathrm{e})x+1)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}+1}{2}$$

Chọn đáp án A □

Câu 553. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$, $f(-3)+f(3)=0$. Tính giá trị của biểu thức $f(0)+f(4)$.

A. $P=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}$. **C.** $1+\ln\dfrac{3}{5}$. **D.** $\ln\dfrac{3}{5}+2$.

Lời giải.

$$f'(x)=\frac{1}{x^2-1}\Rightarrow f(x)=\int\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C.$$

Theo giả thiết, ta có

$$f(-3)+f(3)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+2C=0\Leftrightarrow C=0.$$

Vậy $f(0)+f(4)=\dfrac{1}{2}\ln 1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}+2C=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 554. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\displaystyle\int\limits_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(x+1)\mathrm{e}^xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\mathrm{e}-2$. **B.** $I=2-\mathrm{e}$. **C.** $I=\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$. **D.** $I=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Lời giải.

Tính $\displaystyle\int\limits_0^1(x+1)\mathrm{e}^xf(x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\dv=(x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)\,\mathrm{d}x\\v=x\mathrm{e}^x\end{cases}$.

$$\int\limits_0^1(x+1)\mathrm{e}^xf(x)\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^xf(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1x\mathrm{e}^xf'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}f(1)-\int\limits_0^1x\mathrm{e}^xf'(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1x\mathrm{e}^xf'(x)\,\mathrm{d}x$$

Mà $\displaystyle\int\limits_0^1(x+1)\mathrm{e}^xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}\Rightarrow\int\limits_0^1x\mathrm{e}^xf'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1-\mathrm{e}^2}{4}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\left(\frac{1-\mathrm{e}^2}{4}\right)^2=\left(\int\limits_0^1x\mathrm{e}^xf'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int\limits_0^1(x\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int\limits_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1-\mathrm{e}^2}{4}\right)^2\le\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}\int\limits_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}\le\int\limits_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

Dấu bằng xảy ra khi $f'(x) = axe^x$, với $a \in \mathbb{R}$.

Ta có $\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\,dx = \dfrac{1-e^2}{4} \Rightarrow \int\limits_0^1 a(xe^x)^2\,dx = \dfrac{1-e^2}{4} \Leftrightarrow a \cdot \dfrac{e^2-1}{4} = \dfrac{1-e^2}{4} \Leftrightarrow a = -1$.

Suy ra $f'(x) = -xe^x \Rightarrow f(x) = -e^x(x-1) + C$, mà $f(1) = 0$ nên $C = 0$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 -e^x(x-1)\,dx = e - 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 555. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ và $\int\limits_0^{x^2} f(t)\,dt = x\sin(\pi x)$. Tính $f(4)$.

A. $f(4) = \dfrac{\pi - 1}{4}$. **B.** $f(4) = \dfrac{\pi}{2}$. **C.** $f(4) = \dfrac{1}{2}$. **D.** $f(4) = \dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Ta có $\int\limits_0^{x^2} f(t)\,dt = F(x)\Big|_0^{x^2} = F(x^2) - F(0) = x\sin(\pi x)$.

Lấy đạo hàm hai vế, ta được $2xF'(x^2) = \sin \pi x + \pi x \cos \pi x$.

Thay $x = 2$ vào ta được $4F'(4) = 2\pi \Leftrightarrow F'(4) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(4) = \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 556. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, xác định trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$. **B.** $S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. **C.** $S = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$. **D.** $S = \int\limits_b^a |f(x)|\,dx$.

Lời giải.

Câu hỏi lý thuyết.

Chọn đáp án A □

Câu 557. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3 - \dfrac{1}{\sin^2 x}$ là

A. $F(x) = 3x - \tan x + C$. **B.** $F(x) = 3x + \tan x + C$.

C. $F(x) = 3x + \cot x + C$. **D.** $F(x) = 3x - \cot x + C$.

Lời giải.

$F(x) = \int \left(3 - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)\,dx = 3x + \cot x + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 558. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$, $f(1) = 12$ và $\int_1^4 f'(x)\,dx = 17$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. 29. **B.** 5. **C.** 19. **D.** 9.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^4 f'(x)\,dx = f(x)\big|_1^4 = f(4) - f(1) \Rightarrow 17 = f(4) - 12 \Leftrightarrow f(4) = 29$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 559. Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi đường cong có phương trình $y=\sqrt{2-x^2}$ và trục Ox, quay (S) xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành bằng

A. $V=\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{8\pi}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong $y=\sqrt{2-x^2}$ và trục Ox là

$$\sqrt{2-x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}.$$

Thể tích khối tròn xoay là $V=\pi\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(2-x^2)\,\mathrm{d}x=\pi\left(2x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 560. Cho $\displaystyle\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=a\sqrt{b}-\dfrac{8}{3}\sqrt{a}+\dfrac{2}{3}$, $a,b\in\mathbb{N}^*$. Tính $a+2b$.

A. $a+2b=7$. **B.** $a+2b=8$. **C.** $a+2b=-1$. **D.** $a+2b=5$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} &= \int\limits_0^1\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\,\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)}\\ &= \int\limits_0^1\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{3}\left[(x+2)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^1\\ &= 2\sqrt{3}-\frac{8}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Suy ra $a=2$ và $b=3$. Vậy $a+2b=8$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 561. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$. **B.** $\ln 80+1$. **C.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{4}{5}+\ln 2+1$. **D.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{8}{5}+1$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int\dfrac{1}{(x+2)(x-1)}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_1,\forall x\in(-\infty;-2)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_2,\forall x\in(-2;1)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_3,\forall x\in(1;+\infty)\end{cases}$.

— Trên khoảng $(-\infty;-2)$, ta có $f(-3)=\dfrac{1}{3}\ln 4+C_1$.

— Trên khoảng $(-2;1)$, ta có $f(0)=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}+C_2=\dfrac{1}{3}\Rightarrow C_2=\dfrac{1}{3}(1+\ln 2)$.

Do đó $f(-1)=\dfrac{2}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$.

— Trên khoảng $(1;+\infty)$, ta có $f(3) = \frac{1}{3}\ln\frac{2}{5} + C_3$.

Theo giả thiết $f(-3) - f(3) = 0 \Leftrightarrow C_1 - C_3 = \frac{1}{3}\ln\frac{1}{10}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} f(-4)+f(-1)-f(4) &= \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2} + C_1 + \frac{2}{3}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\ln\frac{1}{2} - C_3 \\ &= \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2} + \frac{2}{3}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ln\frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 562. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = -\mathrm{e}^x \cdot f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0 = \ln 2$ là

A. $2x + 9y - 2\ln 2 - 3 = 0$.

B. $2x - 9y - 2\ln 2 + 3 = 0$.

C. $2x - 9y + 2\ln 2 - 3 = 0$.

D. $2x + 9y + 2\ln 2 - 3 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & f'(x) = -\mathrm{e}^x \cdot f^2(x) \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \mathrm{e}^x \\ \Leftrightarrow\ & \int_0^{\ln 2} \left[-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right] \mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{f(x)}\right)\Bigg|_0^{\ln 2} = \mathrm{e}^x\Big|_0^{\ln 2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{f(\ln 2)} - \frac{1}{f(0)} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & f(\ln 2) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$f'(\ln 2) = -\mathrm{e}^{\ln 2} \cdot f^2(\ln 2) = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{2}{9}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = -\frac{2}{9}(x - \ln 2) + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x + 9y - 2\ln 2 - 3 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 563. Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn: $g(x) = 1 + 2018\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $g(x) = f^2(x)$. Tính $\int_0^1 \sqrt{g(x)}\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1011}{2}$.

B. $\frac{1009}{2}$.

C. $\frac{2019}{2}$.

D. 505.

Lời giải.

Vì $f(x) > 0$ và $g(x) = f^2(x)$ nên $g(x) > 0$.

$g(x) = 1 + 2018\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ nên $g(0) = 1 + 2018\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& g(x)=1+2018\int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\\
\Rightarrow\ & g'(x)=2018f(x)=2018\sqrt{g(x)}\\
\Rightarrow\ & \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}=2018\\
\Rightarrow\ & \int\limits_0^t \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\,\mathrm{d}x=2018\int\limits_0^t \mathrm{d}x\\
\Rightarrow\ & 2\left(\sqrt{g(t)}-1\right)=2018t\\
\Rightarrow\ & \sqrt{g(t)}=1009t+1\\
\Rightarrow\ & \int\limits_0^1 \sqrt{g(t)}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1(1009t+1)\,\mathrm{d}t=\frac{1011}{2}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 564. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b (a<b)$ được tính theo công thức.

A. $\int\limits_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 565. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=1-x+x^2$ là

A. $F(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+C$. **B.** $F(x)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+C$.

C. $F(x)=-1+2x+C$. **D.** $F(x)x-x^2+x^3+C$.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 566. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-2)<3$ là

A. $(-\infty;10)$. **B.** $(2;6)$. **C.** $(2;10)$. **D.** $[2;10)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>2$.

Phương trình tương đương với: $x-2<8\Leftrightarrow x<10$.

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $(2;10)$.

Chọn đáp án C □

Câu 567. Tích phân $\int\limits_0^1 3e^{3x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. e^3-1. **B.** e^3+1. **C.** e^3. **D.** $2e^3$.

Lời giải.

$$\int_0^1 3e^{3x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{3x}\,\mathrm{d}(3x) = e^{3x}\Big|_0^1 = e^3 - 1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 568. Tích phân $\int\limits_0^2 max\left\{x^2; 3x-2\right\}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{10}{3}$. **C.** $\dfrac{11}{6}$. **D.** $\dfrac{17}{6}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	-	0	+	

Như vậy $max\left\{x^2; 3x-2\right\} = \begin{cases} x^2 & \text{khi } 0 \le x < 1 \\ 3x-2 & \text{khi } 1 \le x \le 2 \end{cases}$.

Vậy $\int\limits_0^2 max\left\{x^2; 3x-2\right\}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 (3x-2)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \left(\dfrac{3x^2}{2} - 2x\right)\Big|_1^2 = \dfrac{17}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 569. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và tiếp tuyến với đồ thị tại $M(4;2)$ và trục hoành là

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

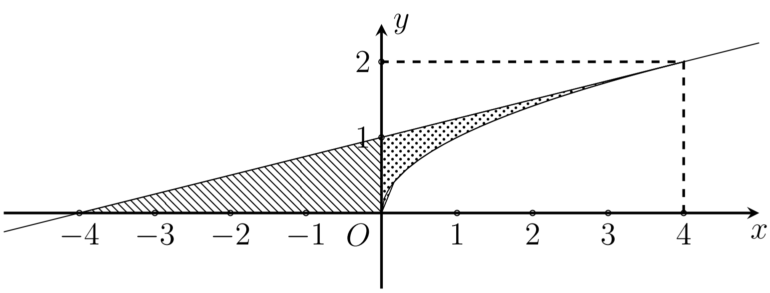
Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = [0; +\infty)$.

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $M(4;2)$ là :

$y = \dfrac{1}{2\sqrt{4}}(x-4) + 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{4}x + 1$.



Tiếp tuyến cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là nghiệm: $\dfrac{1}{4}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Ta chia miền diện tích giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, Ox$ và tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $M(4;2)$ thành hai miền S_1(phần gạch chéo) và S_2 (phần chấm) như ở hình vẽ trên.

$$S_1 = \int_{-4}^{0} \frac{1}{4}x + 1\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{8} + x\right)\Bigg|_{-4}^{0} = 2.$$

$$S_2 = \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x + 1 - \sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{2}{3}$$

Vậy $S = S_1 + S_2 = 2 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 570. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\displaystyle\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4$ và $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x = 2$.

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 2$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 10$. **D.** $I = 4$.

Lời giải.

— Tích phân $\displaystyle\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4 \quad (1)$

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

x	1	9
t	1	3

$(1) \Leftrightarrow \displaystyle\int_1^3 f(t)\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = 4 \Leftrightarrow \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 8 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 8.$

— Tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x = 2 \quad (2)$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

$(2) \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2.$

Như vậy ta có: $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + 8 = 10.$

Chọn đáp án C □

Câu 571. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - \frac{1}{-1}\mathrm{e}^{-x} + C = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + C.$

Chọn đáp án A □

Câu 572. Tính $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{1}{2}$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = \dfrac{1}{8}$. **D.** $I = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$I = \int\limits_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^{\ln 2} = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 573. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \int\limits_a^b [|f(x)| - |g(x)|]\,\mathrm{d}x$.

B. $S = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \left|\int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$.

D. $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức diện tích $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 574. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{3}{x+1}$; $f(0) = 1$ và $f(1) + f(-2) = 2$. Giá trị $f(-3)$ bằng

A. $1 + 2\ln 2$. **B.** $1 - \ln 2$. **C.** 1. **D.** $2 + \ln 2$.

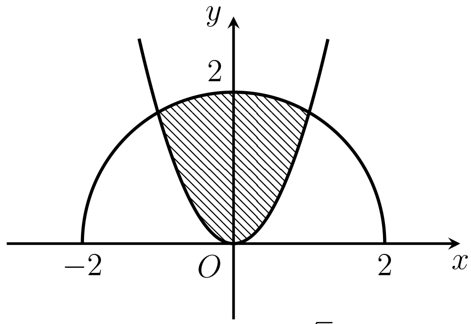
Lời giải.

Trên khoảng $(-\infty; -1)$ nguyên hàm của $f(x)$ là $3\ln|x+1| + C_1$.
Trên khoảng $(-1; +\infty)$ nguyên hàm của $f(x)$ là $3\ln|x+1| + C_2$.
$f(0) = 1$ nên $3\ln 1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1$.
$f(1) + f(-2) = 2$ nên $3\ln 2 + 1 + 3\ln 1 + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 1 - 3\ln 2$.
$f(-3) = 3\ln 2 + 1 - 3\ln 2 = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 575.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$ và nửa đường tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ với $-2 \leq x \leq 2$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{2\pi + 5\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{4\pi + 5\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2\pi + \sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm là $x = \pm 1$. Do đó diện tích cần tìm là

$S = \int\limits_{-1}^{1} (\sqrt{4 - x^2} - \sqrt{3}x^2)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{3}x^2\,\mathrm{d}x = I - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, với $I = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x$

Để tính I đặt $x = 2\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Nên $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2 t\,\mathrm{d}t = (2t - \sin 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$.

Do đó $S = \dfrac{2\pi + \sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 576. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, biết $f'(x) + (2x+3)f^2(x) = 0$, $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$ và $f(1) = \dfrac{1}{6}$. Tính giá trị của $P = 1 + f(1) + f(2) + \cdots + f(2017)$

A. $\dfrac{6059}{4038}$. **B.** $\dfrac{6055}{4038}$. **C.** $\dfrac{6053}{4038}$. **D.** $\dfrac{6047}{4038}$.

Lời giải.

$f'(x) + (2x+3)f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = -2x - 3$. Lấy nguyên hàm hai vế ta có $-\dfrac{1}{f(x)} = -x^2 - 3x + C$.

Do $f(1) = \dfrac{1}{6}$ nên $C = -2$.

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$.

Do đó $P = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2018} - \dfrac{1}{2019} = \dfrac{6055}{4038}$.

Chọn đáp án B □

Câu 577. Biết $\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \dfrac{1 - x\tan x}{x^2\cos x + x}\,\mathrm{d}x = \ln \dfrac{\pi - a}{\pi - b}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$. Tính $P = a + b$.

A. $P = 2$. **B.** $P = -4$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = -2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \dfrac{1 - x\tan x}{x^2\cos x + x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \dfrac{\cos x - x\sin x}{x^2\cos^2 x + x\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = (\cos x - x\sin x)\,\mathrm{d}x$

Đổi cận $x = \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{3}$; $x = \pi \Rightarrow t = -\pi$.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\pi} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2 + t} = \ln\left|\dfrac{t}{t+1}\right|\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{-\pi} = \ln \dfrac{\pi - 3}{\pi - 1} \Rightarrow P = a + b = 4.$$

Chọn đáp án C □

Câu 578. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2x}$ là

A. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \ln|1 - 2x| + C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = -2\ln|1 - 2x| + C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = 2\ln|1 - 2x| + C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\ln|1 - 2x| + C$.

Lời giải.

$$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1 - 2x} = -\dfrac{1}{2}\int \dfrac{\mathrm{d}(1 - 2x)}{1 - 2x} = -\dfrac{1}{2}\ln|1 - 2x| + C.$$

Chọn đáp án D □

Câu 579. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a$ và đường thẳng $x = b$. Khi đó diện tích S của hình phẳng D được tính bởi công thức

A. $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. **C.** $S = \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S = \pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức ở bài "§3. Ứng dụng của tích phân trong hình học", SGK Giải tích 12.

Chọn đáp án B □

Câu 580. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = 8$. Tính $I = \int\limits_0^{\sqrt{2}} xf(x^2)\mathrm{d}x$.

A. $I = 8$. **B.** $I = 16$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 32$.

Lời giải.

Ta có

$$8 = \int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 16.$$

Đặt $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$. Suy ra

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 8.$$

Chọn đáp án A □

Câu 581. Gọi $F(t)$ là số lượng vi khuẩn phát triển sau t giờ. Biết $F(t)$ thỏa mãn $F'(t) = \dfrac{10000}{1+2t}$ với $t \geq 0$ và ban đầu có 1000 con vi khuẩn. Hỏi sau 2 giờ số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

A. 17094. **B.** 9047. **C.** 32118. **D.** 8047.

Lời giải.

$F(t) = \displaystyle\int \frac{10000}{1+2t}\mathrm{d}t = 5000\ln|1+2t| + C$.

$F(0) = 1000 \Leftrightarrow 5000\ln|1+2\cdot 0| + C = 1000 \Leftrightarrow C = 1000$.

Số lượng vi khuẩn sau 2 giờ:

$F(2) = 5000\ln|1+2\cdot 2| + 1000 = 5000\ln(5) + 1000 \approx 9047$.

Chọn đáp án B □

Câu 582. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x} + 2$ với $a,\ b$ là các số hữu tỉ thỏa điều kiện $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 - 3\ln 2$.

Tính $T = a + b$

A. $T = -2$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = -1$. **D.** $T = 0$.

Lời giải.

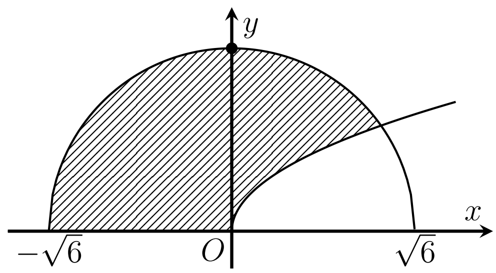
Ta có

$$2 - 3\ln 2 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x = \left(-\frac{a}{x} + b\ln|x| + 2x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = a + b\ln 2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} a + 1 = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a + b = -2.$$

Chọn đáp án A □

Câu 583.

Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{6 - x^2}$ $(-\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6})$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh bởi khi quay hình phẳng D quanh trục Ox



A. $V = 4\pi\sqrt{6} + \dfrac{22\pi}{3}$. **B.** $V = 8\pi\sqrt{6} - 2\pi$.

C. $V = 8\pi\sqrt{6} - \dfrac{22\pi}{3}$. **D.** $V = 8\pi\sqrt{6} + \dfrac{22\pi}{3}$.

Lời giải.
Gọi $D_1 = \{y = \sqrt{6 - x^2},\ Ox,\ x = -\sqrt{6},\ x = 0\}$ và $D_2 = \{y = \sqrt{6 - x^2},\ y = \sqrt{x},\ x = 0,\ x = 2\}$.
Khi quay D_1 quanh Ox ta được khối tròn xoay là nửa khối cầu có bán kính $R = \sqrt{6}$ nên có thể tích

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi\sqrt{6}.$$

Khi quay D_2 quanh trục Ox, khối tròn xoay sinh bởi có thể tích

$$V_2 = \pi \int\limits_0^2 (6 - x^2 - x)\mathrm{d}x = \frac{22\pi}{3}.$$

Vậy thể tích cần tính là $V = V_1 + V_2 = 4\pi\sqrt{6} + \dfrac{22\pi}{3}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 584. Biết $\displaystyle\int\limits_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x} + e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}\mathrm{d}x = a + e^b - e^c$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên. Tính $T = a + b + c$

A. $T = -4$. **B.** $T = -5$. **C.** $T = -3$. **D.** $T = 3$.

Lời giải.
Ta có

$$\int\limits_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x} + e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + e^{-x}\right)^2}\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + e^{-x}\right)\mathrm{d}x = \left(\sqrt{x} - e^{-x}\right)\Big|_1^4 = 1 - e^{-4} + e^{-1}.$$

Do đó $T = 1 - 1 - 4 = -4$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 585. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ là

A. $S = \dfrac{7}{3}$. **B.** $S = \dfrac{8}{3}$. **C.** $S = 7$. **D.** $S = 8$.

Lời giải.
Ta có $S = \displaystyle\int\limits_1^2 |x^2|\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{7}{3}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 586. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(2x + 1)$ là

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x + 1) + C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos(2x + 1) + C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x + 1)$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \cos(2x + 1)$.

Lời giải.
Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin(2x + 1)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x + 1) + C$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 587. Chọn công thức đúng trong các công thức dưới đây.

A. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln x + C$. **B.** $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln^2 x + C$.

C. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \ln^2 x + C$. **D.** $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 588. Biết rằng $\int\limits_0^1 x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(a\sin 2 + b\cos 2 + c)$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a + b + c = 1$. **B.** $a - b + c = 0$. **C.** $2a + b + c = -1$. **D.** $a + 2b + c = 1$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$. Khi đó

$I = \frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2 + \left(\frac{1}{4}\cos 2x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(2\sin 2 + \cos 2 - 1).$

Suy ra $a = 2, b = 1, c = -1 \Rightarrow a - b + c = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 589. Cho số thực $a > 0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn $f(x)f(a - x) = 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^a \frac{1}{1 + f(x)}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{2a}{3}$. **B.** $I = \frac{a}{2}$. **C.** $I = \frac{a}{3}$. **D.** $I = a$.

Lời giải.

Đặt $t = a - x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$.

$\Rightarrow I = \int_0^a \frac{1}{1 + f(a - t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{1}{1 + \frac{1}{f(x)}}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{f(x)}{1 + f(x)}\,\mathrm{d}x.$

$\Rightarrow 2I = \int_0^a \mathrm{d}x = a \Rightarrow I = \frac{a}{2}.$

Chọn đáp án B □

Câu 590. Nguyên hàm $I = \int \frac{1}{2x + 1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{2}\ln|2x + 1| + C$. **B.** $-\ln|2x + 1| + C$. **C.** $\frac{1}{2}\ln|2x + 1| + C$. **D.** $\ln|2x + 1| + C$.

Lời giải.

Sử dụng công thức $\int \frac{1}{ax + b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax + b| + C$, ta được

$$\int \frac{1}{2x + 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x + 1| + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 591. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 17$. Khi đó $f(4)$ bằng

A. 5. **B.** 29. **C.** 19. **D.** 9.

Lời giải.

Ta có
$$\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(4) - f(1) \Rightarrow f(4) = \int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x + f(1) = 17 + 12 = 29.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 592. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ với $a < b$. Kí hiệu S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3f(x)$, $y = 3g(x)$, $x = a$, $x = b$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) - 2$, $y = g(x) - 2$, $x = a$, $x = b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_1 = 2S_2$. **B.** $S_1 = 3S_2$. **C.** $S_1 = 2S_2 - 2$. **D.** $S_1 = 2S_2 + 2$.

Lời giải.

Từ giả thiết, suy ra
$$S_1 = \int\limits_a^b |3f(x) - 3g(x)|\,\mathrm{d}x = 3\int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$S_2 = \int\limits_a^b |[f(x) - 2] - [g(x) - 2]|\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow S_1 = 3S_2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 593. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$. Thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi cho hình (H) quay quanh trục hoành bằng

A. $\dfrac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}{2}$. **B.** $\dfrac{(\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-2})\,\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}^4\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2})\,\pi}{2}$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay cần tìm bằng
$$V = \pi\int\limits_{-1}^1 (\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}\right) = \frac{(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2})\,\pi}{2}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 594. Biết tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$, giá trị của a bằng

A. 7. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có
$$\int\limits_0^1 \frac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{2(x-2)+7}{-(x-2)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(-2 - \frac{7}{x-2}\right)\mathrm{d}x = (-2x - 7\ln|x-2|)\Big|_0^1$$
$$= (-2 - 7\ln 1) - (0 - 7\ln 2) = -2 + 7\ln 2.$$

Vậy $a = 7$, $b = -2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 595. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I = \displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = \dfrac{\pi}{4}$. **B.** $I = \dfrac{\pi}{6}$. **C.** $I = \dfrac{\pi}{20}$. **D.** $I = \dfrac{\pi}{16}$.

Lời giải.

Từ $4xf(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$, ta có

$$\int\limits_0^1 4xf(x^2)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 3f(1-x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}. \quad (1)$$

Xét tích phân $L = \int\limits_0^1 4xf(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$ và $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = 1$. Suy ra

$$L = \int\limits_0^1 2f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2I.$$

Xét tích phân $K = \int\limits_0^1 3f(1-x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = 1 \Rightarrow t = 0$. Suy ra

$$K = \int\limits_1^0 3f(t)(-\mathrm{d}t) = 3\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 3\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3I.$$

Từ (1) suy ra

$$2I + 3I = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{20}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 596. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = xe^{x^2}$. Hàm số nào sau đây không phải là $F(x)$?

A. $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2} + 2$. **B.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{x^2} + 5\right)$.

C. $F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{x^2} + C$. **D.** $F(x) = -\dfrac{1}{2}\left(2 - e^{x^2}\right)$.

Câu 597. Biết $\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x = axe^{2x} + be^{2x} + C$ $(a, b \in \mathbb{Q})$. Tính tích ab.

A. $ab = -\dfrac{1}{4}$. **B.** $ab = \dfrac{1}{4}$. **C.** $ab = -\dfrac{1}{8}$. **D.** $ab = \dfrac{1}{8}$.

Câu 598. Trong các hàm số sau, hàm số nào có một nguyên hàm là hàm số $\ln|x|$?

A. $f(x) = x$. **B.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$. **C.** $f(x) = \dfrac{x^3}{2}$. **D.** $f(x) = |x|$.

Câu 599. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **SAI**?

A. $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\int 2f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\int [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 600. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 5^x + C$.
B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 5^x \ln 5 + C$.
C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{5^x}{\ln 5} + C$.
D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{5^{x+1}}{x+1} + C$.

Câu 601. Kết quả của $I = \int xe^x\,\mathrm{d}x$ là

A. $I = xe^x - e^x + C$.
B. $I = \dfrac{x^2}{2}e^x + C$.
C. $I = xe^x + e^x + C$.
D. $I = \dfrac{x^2}{2}e^x + e^x + C$.

Câu 602. Cho $I = \int_0^4 x\sqrt{1+2x}\,\mathrm{d}x$ và $u = \sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây là **SAI**?

A. $I = \dfrac{1}{2}\int_1^3 x^2(x^2-1)\,\mathrm{d}x$.
B. $I = \int_1^3 u^2(u^2-1)\,\mathrm{d}u$.
C. $I = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u^5}{5} - \dfrac{u^3}{3}\right)\Big|_1^3$.
D. $I = \dfrac{1}{2}\int_1^3 u^2(u^2-1)\,\mathrm{d}u$.

Câu 603. Biết $I = \int_3^5 \dfrac{x^2+x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x = a + \ln\dfrac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

A. -2.
B. 5.
C. 2.
D. 10.

Câu 604. Kết quả tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1 - \sin x)\,\mathrm{d}x$ được viết ở dạng $\pi\left(\dfrac{\pi}{a} - \dfrac{1}{b}\right) - 1$. Khẳng định nào sau đây **SAI**?

A. $a + 2b = 8$.
B. $a + b = 5$.
C. $2a - 3b = 2$.
D. $a - b = 2$.

Câu 605. Nếu $I = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{x} + \ln x + C$ thì $f(x)$ là

A. $f(x) = \sqrt{x} + \in x + C$.
B. $f(x) = -\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} + \ln x + C$.
C. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \in x + C$.
D. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$.

Câu 606. Hàm số $F(x) = e^{x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f(x) = e^{x^3}$.
B. $f(x) = 3x^2.e^{x^3}$.
C. $f(x) = \dfrac{e^{x^3}}{3x^2}$.
D. $f(x) = x^3.e^{x^3-1}$.

Câu 607. Biết $\int_1^e \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = a\sqrt{e} + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = ab$.

A. $P = 4$.
B. $P = -8$.
C. $P = -4$.
D. $P = 8$.

Câu 608. Nếu $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + e^x + C$ thì $f(x)$ bằng

A. $f(x) = x^2 + e^x$.
B. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + e^x$.
C. $f(x) = 3x^2 + e^x$.
D. $f(x) = \dfrac{x^4}{12} + e^x$.

Câu 609. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \dfrac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + F(2) + \cdots + F(2017)$.

A. $T = 1009 \cdot \dfrac{2^{2017}+1}{\ln 2}$.
B. $T = 2^{2017.2018}$.
C. $T = \dfrac{2^{2017}-1}{\ln 2}$.
D. $T = \dfrac{2^{2018}-1}{\ln 2}$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int 2^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$. Mà $F(0) = \dfrac{1}{\ln 2}$ nên $C = 0$. Khi đó

$$T = \sum_{x=0}^{2017} \frac{2^x}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\left(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2017}\right) = \frac{2^{2018}-1}{\ln 2}.$$

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 610. Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15$ m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t$ (m/s^2). Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3s kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. $70,25$ m. **B.** $68,25$ m. **C.** $67,25$ m. **D.** $69,75$ m.

Lời giải.

Vận tốc của chuyển động từ khi tăng tốc là $v(t) = \int (t^2 + 4t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{t^3}{3} + 2t^2 + C$.

Mà $v_0 = 15$ nên $C = 15 \Rightarrow v(t) = \dfrac{t^3}{3} + 2t^2 + 15$. Quãng đường đi được sau 3s là

$$S = \int_0^3 \left(\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15\right)\mathrm{d}t = 69,75.$$

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 611. Hàm số $F(x) = x + \cos(2x - 3) + 10$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số được cho ở các phương án sau?

A. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}\sin(2x - 3) + 10x + C$. **B.** $f(x) = 2\sin(2x - 3) + 1$.

C. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\sin(2x - 3) + 10x + C$. **D.** $f(x) = -2\sin(2x - 3) + 1$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = F'(x) = 1 - 2\sin(2x - 3)$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 612. Biết $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 10$ và $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính tích phân $I = \int\limits_a^b [3f(x) - 5g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 5$. **B.** $I = -5$. **C.** $I = 15$. **D.** $I = 10$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_a^b [3f(x) - 5g(x)]\,\mathrm{d}x = 3\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 5\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 3 \cdot 10 - 5 \cdot 5 = 5$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 613. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = -x^2 + 2x$ và $y = -3x$.

A. $\dfrac{125}{2}$. **B.** $\dfrac{125}{3}$. **C.** $\dfrac{125}{6}$. **D.** $\dfrac{125}{8}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $-x^2 + 2x = -3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5. \end{array}\right.$

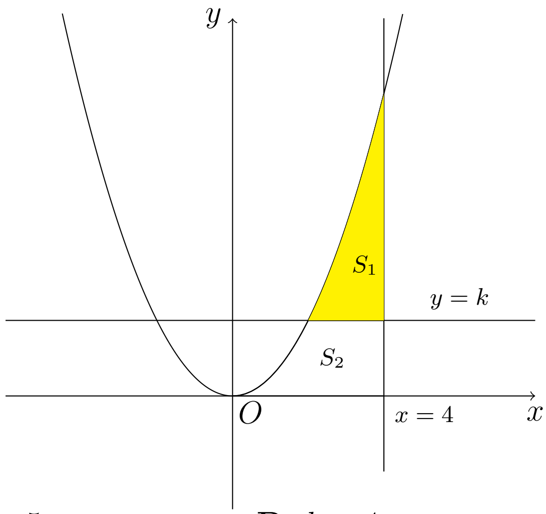
Khi đó diện tích S của hình phẳng được xác định bởi

$$S = \int\limits_0^5 |-x^2 + 2x + 3x|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^5 |-x^2 + 5x|\,\mathrm{d}x = \left|\int\limits_0^5 (-x^2 + 5x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right)\Big|_0^5\right| = \frac{125}{6}.$$

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 614.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = 0, x = 0, x = 4$. Đường thẳng $y = k(0 < k < 16)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ). Tìm k để $S_1 = S_2$.



A. $k = 8$. **B**. $k = 3$. **C**. $k = 5$. **D**. $k = 4$.

Lời giải.

Ta có hình (H) giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{y}, x = 4, y = 0, y = 16$, khi đó diện tích hình (H) là: $S = \int\limits_0^{16} (4 - \sqrt{y})\,\mathrm{d}x = \frac{64}{3}$.

Gọi (H_1) là hình giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{y}, x = 4, y = 0, y = k$, khi đó diện tích hình (H_1) là: $S_1 = \int\limits_0^{k} (4 - \sqrt{y}) = 4k - \frac{2}{3}\sqrt{k^3}$.

$$S_1 = S_2 = \frac{S}{2} \Leftrightarrow 4k - \frac{2}{3}\sqrt{k^3} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\left(\sqrt{k}\right)^3 + 4\left(\sqrt{k}\right)^2 - \frac{32}{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{k} = 2 + 2\sqrt{3} \\ \sqrt{k} = 2 - 2\sqrt{3} \\ \sqrt{k} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 16 + 8\sqrt{3} \\ k = 16 - 8\sqrt{3} \\ k = 4. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $0 < k < 16$ ta được $k = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 615. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Tính $f(-1)$, biết rằng $f(1) = 1$.

A. 3. **B**. e^{-2}. **C**. e^4. **D**. e^3.

Lời giải.

$f'(x) + 2f(x) = 0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2 \Rightarrow (f(x))' = -2$

$\Rightarrow \ln(f(x)) = -2x + C \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{-2x+C}, C \in \mathbb{R}$.

Có $f(1) = 1 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{-2x+2}$.

Từ đó $f(-1) = \mathrm{e}^4$.

Chọn đáp án C □

Câu 616. Biết $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1 + x^2} + x}\,\mathrm{d}x = a + \frac{\pi^2}{b} + \frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $M = a - b + c$.

A. $M = 35$. **B**. $M = 41$. **C**. $M = -37$. **D**. $M = -35$.

Lời giải.

Đặt $x = -t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$.
Đổi cận: $x = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}$.

Từ đó, $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{-t\cos(-t)}{\sqrt{1+t^2}-t}\,\mathrm{d}t = -\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}-x}\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}-x}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 2x^2\cos x\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $I = -\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$.

u	v'
x^2	$\cos x$
$2x$	$\sin x$
2	$-\cos x$
0	$-\sin x$

$= -\left(x^2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} + 2x\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} - 2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\right) = 2 - \frac{\pi^2}{36} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.
Vậy $a = 2$, $b = -36$, $c = -3$ do đó $M = a - b + c = 35$.
Chọn đáp án A □

Câu 617. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định bởi công thức

A. $S = \pi\int\limits_a^b \left|f(x) - g(x)\right|\mathrm{d}x$.

B. $S = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \int\limits_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$.

D. $S = \int\limits_a^b \left|f(x) - g(x)\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích cần tìm được tính theo công thức $S = \int\limits_a^b \left|f(x) - g(x)\right|\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 618. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^2 + x + 1$ là

A. $\frac{2x^3}{3} + x^2 + x + C$. **B.** $4x + 1$. **C.** $\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$. **D.** $\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (2x^2 + x + 1)\,\mathrm{d}x = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$.
Chọn đáp án D □

Câu 619. Tích phân $\int\limits_0^2 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+3}$ bằng

A. $\frac{1}{2}\log\frac{7}{3}$. **B.** $\ln\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{7}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+3} = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}(x^2+3)}{x^2+3} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+3\right|\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}$.

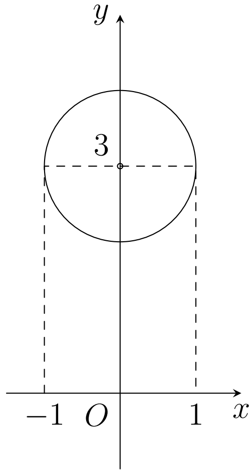
Chọn đáp án C ☐

Câu 620. Thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C)\colon x^2+(y-3)^2=1$ xung quanh trục hoành là

A. $V=6\pi$. **B.** $V=6\pi^3$. **C.** $V=3\pi^2$. **D.** $V=6\pi^2$.

Lời giải.

Phương trình đường tròn $(C)\colon x^2+(y-3)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3+\sqrt{1-x^2} \\ y=3-\sqrt{1-x^2} \end{array}\right.$.



Khi đó hình xuyến cái phao được tạo thành khi quay đường tròn tâm $I(0;3)$ và có bán kính $r=1$ xung quanh trục Ox.

$$\Rightarrow V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left[\left(3+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]\,\mathrm{d}x = 12\pi\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $x=\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$.

Khi đó

$$V=12\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 6\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = 6\pi\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi^2.$$

Chọn đáp án D ☐

Câu 621. Gọi x_1, x_2 lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số $f(x)=\displaystyle\int\limits_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{2x}} t\ln t\,\mathrm{d}t$. Tính $S=x_1+x_2$

A. $\ln 2\mathrm{e}$. **B.** $\ln 2$. **C.** $-\ln 2$. **D.** 0.

Lời giải.

Đặt $F(t)=\displaystyle\int t\ln t\,\mathrm{d}t \Rightarrow F'(t)=t\ln t$.

Khi đó $f(x)=\displaystyle\int\limits_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{2x}} t\ln t\,\mathrm{d}t = F(\mathrm{e}^{2x})-F(\mathrm{e}^x) \Rightarrow f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}F'(\mathrm{e}^{2x})-\mathrm{e}^xF'(\mathrm{e}^x)$.

Suy ra $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{2x}\ln(\mathrm{e}^{2x})-\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^x\ln(\mathrm{e}^x)=4x\mathrm{e}^{4x}-x\mathrm{e}^{2x}=x\mathrm{e}^{2x}(4\mathrm{e}^{2x}-1)$.

Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \mathrm{e}^{2x}=\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x=\ln\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\ln 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $x_1=-\ln 2$ và $x_2=0$.

Vậy $S = x_1 + x_2 = -\ln 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 622. Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3)f^2(x)$ và $f(0) = -\dfrac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2017) + f(2018) = \dfrac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{a}{b} < -1$. **B.** $\dfrac{a}{b} > 1$. **C.** $a + b = 1010$. **D.** $b - a = 3029$.

Lời giải.

Ta có

$f'(x) = (2x+3)f^2(x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x + 3 \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int (2x+3)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C$.

Vì $f(0) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow C = 2$.

Vậy $f(x) = -\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+1}$.

Do đó $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2017) + f(2018) = \dfrac{1}{2020} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1009}{2020}$.

Vậy $a = -1009$; $b = 2020$. Do đó $b - a = 3029$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 623. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x - 1$ là

A. $\cos x - x + C$. **B.** $-\cos x + C$. **C.** $-\cos x - x + C$. **D.** $\cos x - x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)dx = \int (\sin x - 1)\,\mathrm{d}x = -\cos x - x + C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 624. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ với $a < b$. Diện tích của D được tính theo công thức

A. $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \pi\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S = \pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích của D được tính theo công thức $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 625. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_2^4 \dfrac{x}{x-1}\,\mathrm{d}x$.

A. $2 - \ln 3$. **B.** $1 + \ln 3$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $2 + \ln 3$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_2^4 \dfrac{x}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 \left(1 + \dfrac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = (x + \ln|x-1|)\Big|_2^4 = 2 + \ln 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 626. Biết $\displaystyle\int_0^2 \dfrac{x}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}a - \dfrac{1}{3}\sqrt{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P =$

$5a-b$.

A. $P=6$. **B**. $P=1$. **C**. $P=5$. **D**. $P=8$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^2 \frac{x}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^2 \frac{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{[(2+x)-(2-x)]}\,\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_0^2 \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\sqrt{(2+x)^3}+\sqrt{(2-x)^3}}{3}\Bigg|_0^2\\ &= \frac{8-\sqrt{32}}{3}.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $a=8, b=32$ nên $P=5\cdot 8-32=8$.

Chọn đáp án D □

Câu 627. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Có bao nhiêu số thực $x\in(0;2018\pi)$ để $F(x)=1$.

A. 2018. **B**. 1009. **C**. 2017. **D**. 2016.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}-\sin x$, suy ra $F(x)=-\cot x+\cos x+C$.

Do $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên $C=1$, khi đó $F(x)=-\cot x+\cos x+1$.

Vậy $F(x)=1\Leftrightarrow \cot x-\cos x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Do $x\in(0;2018\pi)\Rightarrow 0<\dfrac{\pi}{2}+k\pi<2018\pi\Rightarrow 0<\dfrac{1}{2}+k$, từ đó suy ra có 2018 số thực thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 628. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1, f'(x)=(2-2x)\cdot f(x)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m\in(0;\mathrm{e}^2)$. **B**. $m\in(0;\mathrm{e})$. **C**. $m\in(1;\mathrm{e})$. **D**. $m\in(0;1)$.

Lời giải.

Từ giả thiết $f'(x)=(2-2x)\cdot f(x)$ ta suy ra $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int(2-2x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $\ln|f(x)|=2x-x^2+C\Rightarrow |f(x)|=\mathrm{e}^{2x-x^2+C}\Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^{2x-x^2+C}$ (vì $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$).

Do $f(0)=1\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^{2x-x^2}$.

Ta có $f'(x)=(2-2x)\cdot\mathrm{e}^{2x-x^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Từ đó suy ra phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $m \in (0; \mathrm{e})$.

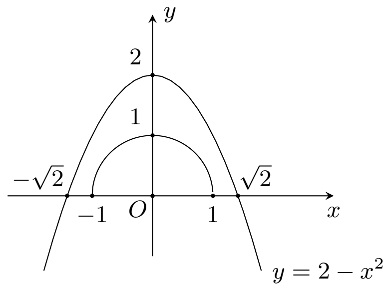
Chọn đáp án B $\square$

Câu 629. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{1 - x^2}, y = 2 - x^2$ và trục hoành bằng

A. $\dfrac{8\sqrt{2}}{3} - \dfrac{\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{8\sqrt{2}}{3} - \pi$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3} - \dfrac{\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{8\sqrt{2}}{3} + \dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$, $2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$.



Gọi S là diện tích hình phẳng cần tính, S_1 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Parabol $y = 2 - x^2$ và trục Ox, S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{1 - x^2}$ và trục Ox.

Khi đó $S = S_1 - S_2$.

Ta có $S_1 = \displaystyle\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(2x - \dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$.

S_2 chính là diện tích của nửa hình tròn bán kính 1, do đó $S_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Vậy $S = \dfrac{8\sqrt{2}}{3} - \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 630. Tìm $\displaystyle\int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

A. $\displaystyle\int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{x} + C$. **B.** $\displaystyle\int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} + C$.

C. $\displaystyle\int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2x} + C$. **D.** $\displaystyle\int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \ln x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} + C$.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 631. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và nhận giá trị bất kỳ. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \displaystyle\int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \displaystyle\int\limits_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \displaystyle\int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $\left|S = \displaystyle\int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Ta có: diện tích hình phẳng theo yêu cầu bài toán được tính theo công thức $S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 632. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 633. Biết $\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x=ax\sin 2x+b\cos 2x+C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab.

A. $ab=\frac{1}{8}$. **B.** $ab=\frac{1}{4}$. **C.** $ab=-\frac{1}{8}$. **D.** $ab=-\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=\cos 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\frac{\sin 2x}{2} \end{cases}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.\end{aligned}$$

Suy ra $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}\Rightarrow ab=\frac{1}{8}$.

Chọn đáp án A □

Câu 634. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2$ và đường thẳng $y=2x$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành.

A. $V=\frac{64\pi}{15}$. **B.** $V=\frac{16\pi}{15}$. **C.** $V=\frac{20\pi}{3}$. **D.** $V=\frac{4\pi}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=2x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$. Ta có $x^2\cdot 2x\geq 0$, $\forall x\in[0;2]$. Khi đó

$$V=\pi\int\limits_0^2 |x^4-4x^2|\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2(-x^4+4x^2)\,\mathrm{d}x=\pi\left(-\frac{x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{64\pi}{15}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 635. Cho hàm số chẵn $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^{1}\frac{f(2x)}{1+2^x}\,\mathrm{d}x=8$. Tính $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 16.

Lời giải.

• Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$. Với $x=-1\Rightarrow t=-2$, $x=1\Rightarrow t=2$. Suy ra

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(2x)}{1+2^x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\frac{f(t)}{1+\sqrt{2}^t}\,\mathrm{d}t=8\Rightarrow\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{1+\sqrt{2}^x}\,\mathrm{d}x=16.$$

• Xét $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{f(-x)}{1+(\sqrt{2})^{-x}}\,\mathrm{d}x$. Đặt $u = -x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}u$. Với $x = -2 \Rightarrow u = 2$, $x = 2 \Rightarrow u = -2$.
Suy ra

$$\int_{-2}^{2} \frac{f(-x)}{1+(\sqrt{2})^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \frac{f(u)}{1+\sqrt{2}^{u}}\,\mathrm{d}u = 16.$$

• Ta có $y = f(x)$ là hàm chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(-x) = f(x)\ \forall x \in [-2;2]$.
Suy ra $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} \frac{f(-x)}{1+(\sqrt{2})^{-x}}\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{2} \frac{f(x)\cdot\sqrt{2}^{x}}{1+\sqrt{2}^{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{1+\sqrt{2}^{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{1+\sqrt{2}^{x}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Suy ra $16 = 2\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x - 16 \Rightarrow \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 16$.

Chọn đáp án D □

Câu 636. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(x)$, $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = 2$, $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)\cdot[f(x)]^2+1]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$. Tính $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^3\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{15}{4}$. **B.** $\dfrac{15}{2}$. **C.** $\dfrac{17}{2}$. **D.** $\dfrac{19}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)\cdot[f(x)]^2+1]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\sqrt{f'(x)}\cdot f(x)-1\right)^2\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow \sqrt{f'(x)}\cdot f(x) = 1 \Rightarrow f'(x)\cdot[f(x)]^2 = 1$. Lấy nguyên hàm hai vế ta được $\dfrac{[f(x)]^3}{3} = x + C$.

Mà $f(0) = 2 \Rightarrow C = \dfrac{8}{3} \Rightarrow [f(x)]^3 = 3\left(x+\dfrac{8}{3}\right)$. Suy ra $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^3\,\mathrm{d}x = \frac{19}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 637. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \cos 3x\,\mathrm{d}x$.

A. $-3\sin 3x + c$. **B.** $\dfrac{1}{3}\sin 3x + c$. **C.** $3\sin 3x + c$. **D.** $-\dfrac{1}{3}\sin 3x + c$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin 3x + c$.

Chọn đáp án B □

Câu 638. Tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 (x+1)^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** 4. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_0^1 (x+1)^2\,\mathrm{d}x=\left.\dfrac{(x+1)^3}{3}\right|_0^1=\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 639. Nếu $f(1)=12$, $f'(x)$ liên tục và $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=17$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. 19. **B.** 5. **C.** 29. **D.** 9.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=\left.f(x)\right|_1^4=f(4)-f(1)=17\Leftrightarrow f(4)=29$.

Chọn đáp án C □

Câu 640. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=5$. Khi đó $\int\limits_0^2 [4f(x)-3]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 14. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^2 [4f(x)-3]\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 4f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^2 3\,\mathrm{d}x=4\cdot 5-\left.3x\right|_0^2=14$.

Chọn đáp án B □

Câu 641. Cho tích phân $H=\int\limits_1^{\mathrm{e}} x^2\cdot\ln x\,\mathrm{d}x=\dfrac{a\mathrm{e}^3+c}{b}$. Tính $N=\dfrac{2a-\sqrt{c}-4}{3\sqrt{b}}$.

A. $N=-\dfrac{1}{9}$. **B.** $N=1$. **C.** $N=3$. **D.** $N=\dfrac{7}{9}$.

Lời giải.

Xét $H=\int\limits_1^{\mathrm{e}} x^2\cdot\ln x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\int\limits_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}\left(x^3\right)=\left.\dfrac{1}{3}x^3\cdot\ln x\right|_1^{\mathrm{e}}-\dfrac{1}{3}\int\limits_1^{\mathrm{e}} x^3\,\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{\mathrm{e}^3}{3}-\dfrac{1}{3}\int\limits_1^{\mathrm{e}} x^2\,\mathrm{d}x$

Khi đó $H=\dfrac{2\mathrm{e}^3+1}{9}\Rightarrow a=2,b=9,c=1\Rightarrow N=\dfrac{2\cdot 2-1-4}{3\sqrt{9}}=-\dfrac{1}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 642. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2$ ($\mathrm{m/s^2}$). Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{2200}{3}$ m. **B.** $\dfrac{4000}{4}$ m. **C.** $\dfrac{1900}{3}$ m. **D.** $\dfrac{4300}{3}$ m.

Lời giải.

Ta có $a(t)=v'(t)\Rightarrow v(t)=\int\left(3t+t^2\right)\,\mathrm{d}x=\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{3t^2}{2}+c$, khi $t=0$ thì $v=10\Rightarrow c=10$.

Mặt khác $v(t)=s'(t)\Rightarrow s=\int\limits_0^{10}\left(\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{3t^2}{2}+10\right)\,\mathrm{d}x=\dfrac{4300}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 643. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và

$\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Tích phân $\int\limits_0^1 f'\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B**. -2. **C**. 1. **D**. 4.

Lời giải.

Xét $I = \int\limits_0^1 f'\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$, đặt $\sqrt{x} = t \to \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

Khi đó $I = \int\limits_0^1 f'(t)\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^1 x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}\left(f(x)\right) = 2\cdot x\cdot f(x)\Big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$.

Chọn đáp án B □

Câu 644. Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$. Quay hình (H) quanh trục hoành ta được vật thể có thể tích bằng

A. $\dfrac{9\pi}{2}$. **B**. $\dfrac{7\pi}{3}$. **C**. $\dfrac{5\pi}{31}$. **D**. $\dfrac{31\pi}{5}$.

Lời giải.

Ta có thể tích cần tính là $V = \pi\int\limits_1^2 (x^2)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int\limits_1^2 x^4\,\mathrm{d}x = \pi\left(\dfrac{x^5}{5}\right)\Big|_1^2 = \dfrac{\pi}{5}(32-1) = \dfrac{31\pi}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 645. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn $\int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7$, $\int\limits_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $P = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $P = 4$. **B**. $P = 5$. **C**. $P = 7$. **D**. $P = -4$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 646. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int \ln|x|\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{x} + C$. **B**. $\int (x+1)^{-3}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}(x+1)^{-2} + C$.

C. $\int (x+1)^3\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}(x+1)^4 + C$. **D**. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{2x+1} = \ln|2x+1| + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (x+1)^3\,\mathrm{d}x = \int (x+1)^3\,\mathrm{d}(x+1) = \dfrac{1}{4}(x+1)^4 + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 647. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = (x-2)^2, y = 0, x = 0, x = 2$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \dfrac{32}{5}$. **B**. $V = 32\pi$. **C**. $V = \dfrac{32\pi}{5}$. **D**. $V = \dfrac{32}{5\pi}$.

Lời giải.

Ta có thể tích V được tính bởi

$$V=\pi\int\limits_0^2 (x-2)^4\,\mathrm{d}x=\pi\cdot\left.\frac{(x-2)^5}{5}\right|_0^2=\pi\left[\frac{(2-2)^5}{5}-\frac{(0-2)^5}{5}\right]=\frac{32\pi}{5}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 648. Cho tích phân $I=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$. Nếu đổi biến số $x=2\sin t, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì

A. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}t$. **B.** $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}t\,\mathrm{d}t$. **C.** $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\mathrm{d}t}{t}$. **D.** $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}t$.

Lời giải.

Ta có $x=2\sin t\Rightarrow\ \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Với $x=0\Rightarrow t=0, x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

Do đó $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos t\,\mathrm{d}t}{2\sqrt{\cos^2 t}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos t\,\mathrm{d}t}{2\cos t}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án A □

Câu 649. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $[-1;0]$, $F(-1)=-1$, $F(0)=0$ và $\int\limits_{-1}^0 2^{3x}F(x)\,\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\int\limits_{-1}^0 2^{3x}f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{8}-3\ln 2$. **B.** $I=\frac{1}{8}+\ln 2$. **C.** $I=\frac{1}{8}+3\ln 2$. **D.** $I=\frac{1}{8}+3\ln 2$.

Lời giải.

$$I=\int\limits_{-1}^0 2^{3x}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0 2^{3x}\,\mathrm{d}\left(F(x)\right)=2^{3x}F(x)\Big|_{-1}^0-3\ln 2\int\limits_{-1}^0 2^{3x}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}+3\ln 2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 650. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$ với $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$. Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^2\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=-\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{9}{2}$. **D.** $I=-\frac{9}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$ và $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=3\cdot\frac{1}{x}$. Suy ra $f(x)=\frac{2}{x}-x$.

$$I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^2\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{2}{x^2}-1\right)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 651. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f(0)=0$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$

và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{\pi}{4}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Xét $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}$, đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Ta có $I = -f(x) \cdot \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}$.

Suy ra $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} -2\cos x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\pi}{2}$, theo giả thiết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}$, mặt khác $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}$.

Do đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} [f'(x) - \cos x]^2\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x + C$ vì $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = \sin x$.

Vậy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 652. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\cos 3x + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -3\cos 3x + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\cos 3x + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\cos 3x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin 3x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int \sin 3x\,\mathrm{d}(3x) = -\dfrac{1}{3}\cos 3x + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 653. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và số thực dương a. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào luôn đúng?

A. $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$. **B.** $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. **C.** $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = -1$. **D.** $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Lời giải.

Theo tính chất cơ bản của tích phân thì $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 654. Tích phân $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x = x\Big|_0^1 = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 655. Công thức nguyên hàm nào sau đây là **sai**?

A. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C$.

B. $\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

C. $\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C\,(< \alpha \neq -1)$.

D. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$.

Lời giải.

Dựa vào công thức nguyên hàm cơ bản. (Đúng là $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$).

Chọn đáp án (A) □

Câu 656. Tính thể tích V của vật thể nằm giữa 2 mặt phẳng $x = 0, x = 3$, biết thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x\,(0 \leq x \leq 3)$ là một hình chữ nhật có hai kích thước là x và $2\sqrt{1-x^2}$.

A. $V = 16$.

B. $V = 17$.

C. $V = 18$.

D. $V = 19$.

Lời giải.

Diện tích hình chử nhật có hai kích thước là x và $2\sqrt{1-x^2}$ là $S(x) = x \cdot 2\sqrt{1-x^2}$.

Vậy thể tích là $V = \int\limits_0^1 x \cdot 2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 18$

Chọn đáp án (C) □

Câu 657. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

B. $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \frac{5}{2}$.

C. $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \frac{3}{2}$.

D. $F(x) = 2\mathrm{e}^x + x^2 - \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (e^x + 2x)\,\mathrm{d}x = e^x + x^2 + C$.

Do $F(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$.

Từ đó ta có $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 658. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -2\ln 2$.

B. $I = \frac{2\ln 2}{3}$.

C. $I = -\frac{2\ln 2}{3}$.

D. $I = 2\ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$I = \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\int\limits_0^1 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\ln 2 = -\frac{2\ln 2}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 659. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $f(0)=\ln 2$, $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{3}{2}-\ln 2$ và $\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = 2\ln 2-\frac{3}{2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1-\ln 2}{2}$. **B.** $I=\frac{3-\ln 2}{2}$. **C.** $I=1-\ln 2$. **D.** $I=\frac{3-4\ln 2}{2}$.

Lời giải.

Ta có $2\ln 2-\frac{3}{2}=\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{-f(x)}{x+1}\right|_0^1 + \int\limits_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln 2+\int\limits_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int\limits_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln 2-\frac{3}{2}$.

Kết hợp với giả thiết ta có

$$\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f'(x)\left[f'(x)+\frac{1}{x+1}\right]\mathrm{d}x.$$

Từ đó suy ra $f'(x)=-\frac{1}{x+1} \Rightarrow f(x)=-\ln(x+1)+C$.

Kết hợp với giả thiết ta có $\begin{cases} f(1)=-\ln 2+C=0 \\ f(0)=-\ln 1+C=\ln 2 \end{cases} \Rightarrow C=\ln 2$, suy ra $f(x)=\ln\frac{2}{x+1}$.

Từ đó ta tính được $I=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1-\ln 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 660. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lại đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 10 m. **B.** 5 m. **C.** 20 m. **D.** 8 m.

Lời giải.

Thời điểm ô tô dừng hẳn $v(t)=-5t+10=0 \Leftrightarrow t=2$ (s).

Quãng đường từ lúc đạp phanh tới khi ô tô dừng hẳn $s=\int\limits_0^2 (-5t+10)\,\mathrm{d}t = 10$ (m).

Chọn đáp án A □

Câu 661. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $\mathscr{K}$ và $a,b\in\mathscr{K}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\int\limits_a^b \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b [f(x)g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào tính chất của tích phân.

Chọn đáp án C □

Câu 662. Biết $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Khi đó giá trị của $\int\limits_1^4 f(3x-3)\,\mathrm{d}x$ là

A. 27. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 24.

Lời giải.

Đặt $t = 3x-3 \Rightarrow \mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t=0$; $x=4 \Rightarrow t=9$.

Suy ra $\int\limits_1^4 f(3x-3)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^9 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}\cdot 9 = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 663. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 5-4t \\ z = -6+7t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và điểm $A(1;2;3)$. Đường thẳng Δ đi qua A và song song song với đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(3;-4;7)$. **B.** $\vec{u}=(3;-4;-7)$. **C.** $\vec{u}=(-3;-4;-7)$. **D.** $\vec{u}=(-3;-4;7)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{v}=(3;-4;7)$.

Vì đường thẳng Δ song song song với đường thẳng d nên đường thẳng Δ nhận $\vec{v}=(3;-4;7)$ làm một véc-tơ chỉ phương.

Chọn đáp án A □

Câu 664. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x+3}$ là

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{2x+3}+C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x+3}+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+3}+C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{2x+3}+C$.

Lời giải.

Áp dụng công thức nguyên hàm mở rộng, ta được $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2x+3}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+3}+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 665. Cho các số thực dương a, b, c với $c\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\log_c(ab)=\log_c b+\log_c a$. **B.** $\log_c \dfrac{a}{b} = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$.

C. $\log_c \sqrt{b} = \dfrac{1}{2}\log_c b$. **D.** $\log_c \dfrac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$.

Lời giải.

Dựa vào tính chất của lôgarit.

Chọn đáp án (B) □

Câu 666. Tích phân $I = \int\limits_{-1}^{2} 3x \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$ nhận giá trị nào sau đây?

A. $I = \dfrac{3\mathrm{e}^3 + 6}{\mathrm{e}^{-1}}$. **B.** $I = \dfrac{3\mathrm{e}^3 - 6}{\mathrm{e}^{-1}}$. **C.** $I = \dfrac{3\mathrm{e}^3 + 6}{\mathrm{e}}$. **D.** $I = \dfrac{3\mathrm{e}^3 + 6}{-\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = 3x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 3 \, \mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

$\Rightarrow I = 3x\mathrm{e}^x \Big|_{-1}^{2} - 3 \int\limits_{-1}^{2} \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = 6\mathrm{e}^2 + 3\mathrm{e}^{-1} - 3\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-1}\right) = 3\mathrm{e}^2 + \dfrac{6}{\mathrm{e}} = \dfrac{3\mathrm{e}^3 + 6}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 667. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1) f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b\ln 3$ $(a, b \in \mathbb{Q})$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $\dfrac{25}{4}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải.

Ta có $x(x+1) f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1} f'(x) + \dfrac{1}{(x+1)^2} f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{x}{x+1} f(x)\right]' = \dfrac{x}{x+1}$.

Lấy tích phân từ 1 đến 2 hai vế ta được

$\int\limits_{1}^{2} \left[\dfrac{x}{x+1} f(x)\right]' \mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2} \dfrac{x}{x+1} \, \mathrm{d}x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1} f(x) \Big|_{1}^{2} = (x - \ln|x+1|) \Big|_{1}^{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3} f(2) - \dfrac{1}{2} f(1) = (2 - \ln 3) - (1 - \ln 2) \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} f(2) + \ln 2 = 1 - \ln 3 + \ln 2 \Leftrightarrow f(2) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}\ln 3$.

Suy ra $a = \dfrac{3}{2}$ và $b = -\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a^2 + b^2 = \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 668. Cho hình thang cong $(\mathscr{H})$ giới hạn bởi các đường $y = \ln(x+1)$, trục hoành và đường thẳng $x = \mathrm{e} - 1$. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình $(\mathscr{H})$ quanh trục Ox.

A. $\mathrm{e} - 2$. **B.** 2π. **C.** $\pi\mathrm{e}$. **D.** $\pi(\mathrm{e} - 2)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = \ln(x+1)$ và trục hoành là

$$\ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình $(\mathscr{H})$ quanh trục Ox là

$V = \int\limits_{0}^{\mathrm{e}-1} [\ln(x+1)]^2 \, \mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{\mathrm{e}} (\ln t)^2 \, \mathrm{d}t = \pi(\mathrm{e} - 2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 669. Một vật chuyển động với vận tốc $v = 20$ m/s thì thay đổi vận tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t) = -4 + 2t$ m/s^2. Tính quãng đường vật đi được để từ thời điểm thay đổi gia tốc đến lúc vật đạt vận tốc bé nhất.

A. $\dfrac{104}{3}$ m. **B.** 104 m. **C.** 208 m. **D.** $\dfrac{104}{6}$ m.

Lời giải.

Ta có $v = \displaystyle\int (-4+2t)\,\mathrm{d}t = -4t + t^2 + C$. Tại thời điểm $t=0$, $v=20 \Rightarrow C=20$.

Do đó $v = t^2 - 4t + 20 = (t-2)^2 + 16 \geq 16$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t=2$.

Vậy $s = \displaystyle\int\limits_0^2 (t^2 - 4t + 20)\,\mathrm{d}t = \dfrac{104}{3}$ m.

Chọn đáp án A □

Câu 670. Có bao nhiêu giá trị thực của a để có $\displaystyle\int\limits_0^a (2x+5)\,\mathrm{d}x = a - 4$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^a (2x+5)\,\mathrm{d}x = \left(x^2+5x\right)\Big|_0^a = a^2 + 5a$.

Nên: $\displaystyle\int\limits_0^a (2x+5)\,\mathrm{d}x = a - 4 \Leftrightarrow a^2 + 5a = a - 4 \Leftrightarrow a^2 + 4a + 4 \Leftrightarrow a = -2$.

Vậy, có một giá trị thực của a thỏa mãn là $a = -2$.

Chọn đáp án A □

Câu 671. Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng K và a, b, c là ba số bất kì thuộc K. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\displaystyle\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

B. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $c \in (a;b)$.

D. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Lời giải.

Hàm số f liên tục trên khoảng K và a số bất kì thuộc K, ta có $\displaystyle\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Như vậy, khẳng định $\displaystyle\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án A □

Câu 672. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^{-x})$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 1 + C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x + C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x + x + C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^x+1)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 673. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường $y=\sqrt{x}-1$, trục hoành và đường thẳng $x=4$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{7}{6}$. **B**. $V=\dfrac{7\pi^2}{6}$. **C**. $V=\dfrac{7\pi}{6}$. **D**. $V=\dfrac{7\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) giới hạn bởi đường $y=\sqrt{x}-1$, trục hoành và đường thẳng $x=4$ quanh trục hoành là

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_1^4 \left(\sqrt{x}-1\right)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\int_1^4 \left(x-2\sqrt{x}+1\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+x\right)\Bigg|_1^4 = \frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 674. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$, $f(2)=2018$. Tính $S=[f(3)-2018]\cdot[f(-1)-2017]$.

A. $S=1$. **B**. $S=1+\ln^2 2$. **C**. $S=2\ln 2$. **D**. $S=\ln^2 2$.

Lời giải.

Ta có

— $f(3)-2018=f(3)-f(2)=\displaystyle\int_2^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_2^3\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\ln(x-1)\big|_2^3=\ln 2$.

— $2017-f(-1)=f(0)-f(-1)=\displaystyle\int_{-1}^0 f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\ln|x-1|\big|_{-1}^0=-\ln 2$.

Do đó $f(-1)-2017=\ln 2$.

Vậy $S=[f(3)-2018]\cdot[f(-1)-2017]=(\ln 2)\cdot(\ln 2)=\ln^2 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 675. Biết $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{a-b\sqrt{c}}{3}$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $c<4$. Tính giá trị $S=a+b+c$.

A. $S=13$. **B**. $S=28$. **C**. $S=25$. **D**. $S=16$.

Lời giải.

Xét tích phân: $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\sqrt{3+\ln x}\Rightarrow u^2=3+\ln x\Rightarrow 2u\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$;

Khi $x=1$ thì $u=\sqrt{3}$;

Khi $x = \mathrm{e}$ thì $u = 2$;

Ta có: $I = \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} u \cdot 2u \, \mathrm{d}u = 2\int\limits_{\sqrt{3}}^{2} u^2 \, \mathrm{d}u = \left.\dfrac{2}{3}u^3\right|_{\sqrt{3}}^{2} = \dfrac{16 - 6\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $a = 16$, $b = 6$, $c = 3$. Do đó $S = a + b + c = 16 + 6 + 3 = 25$.

Chọn đáp án C □

Câu 676. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) \, \mathrm{d}x = 4$, $\int\limits_0^{1} \dfrac{x^2 f(x)}{x^2+1} \mathrm{d}x = 2$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5; 9)$. **B.** $(3; 6)$. **C.** $(\sqrt{2}; 5)$. **D.** $(1; 4)$.

Lời giải.

Xét tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) \, \mathrm{d}x$:

Đặt $t = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}t = \left(1 + \tan^2 x\right) \mathrm{d}x$.

Khi $x = 0$ thì $t = 0$. Khi $x = \dfrac{\pi}{4}$ thì $t = 1$.

Từ đó ta có:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{f(\tan x)}{1 + \tan^2 x} \left(1 + \tan^2 x\right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{x^2+1} \mathrm{d}x.$$

Do đó $\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{x^2+1} \mathrm{d}x = 4$.

Từ đó ta có:

$$\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{x^2+1} \mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \dfrac{x^2 f(x)}{x^2+1} \mathrm{d}x = 4 + 2$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 \dfrac{(x^2+1) f(x)}{x^2+1} \mathrm{d}x = 6$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = 6.$$

Chọn đáp án A □

Câu 677. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x\mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ xung quanh trục Ox là

A. $V = \int\limits_0^1 x^2 \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x$. **B.** $V = \pi \int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$. **C.** $V = \pi \int\limits_0^1 x^2 \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi \int\limits_0^1 x^2 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có: $V = \pi \int\limits_0^1 \left(x\mathrm{e}^x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 x^2 \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 678. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$ là

A. $\dfrac{1}{2}\ln(2x+3)+C$.
B. $\dfrac{1}{2}\ln|2x+3|+C$.
C. $\ln|2x+3|+C$.
D. $\dfrac{1}{\ln 2}\ln|2x+3|+C$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 679. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 x(x^2+3)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{4}{7}$. **D.** $\dfrac{7}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2+3 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=3$, $x=1 \Rightarrow t=4$.

Khi đó

$$\int\limits_0^1 x(x^2+3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_3^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^2\Big|_3^4 = \frac{7}{4}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 680. Cho biết $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3+2x-\dfrac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{(x^2+a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g(x) = x\cos ax$.

A. $x\sin x - \cos x + C$.
B. $\dfrac{1}{2}x\sin 2x - \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$.
C. $x\sin x + \cos x + C$.
D. $\dfrac{1}{2}x\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$.

Lời giải.

Ta có:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow F'(x) = f(x) \Rightarrow \frac{(x^2+1)^2}{x^2} = \frac{(x^2+a)^2}{x^2} \Rightarrow a = 1.$$

Do đó: $g(x) = \displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

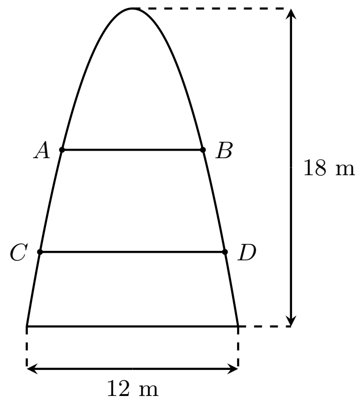
Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \sin x. \end{cases}$

$$\Rightarrow g(x) = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 681.

Một cổng chào có dạng hình parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên).

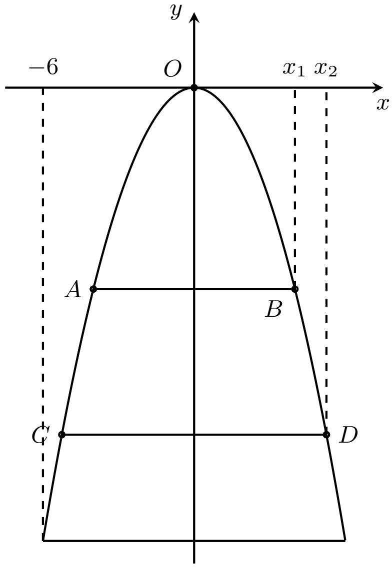


Tỉ số $\dfrac{AB}{CD}$ bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{4}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $\dfrac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình parabol (P) có dạng $y = ax^2$.

Parabol (P) đi qua điểm $(-6; -18)$ nên suy ra

$$a \cdot (-6)^2 = -18 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra $(P): y = -\dfrac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với đường thẳng AB: $y = -\dfrac{1}{2}x_1^2$ là

$$S_1 = 2\int\limits_0^{x_1} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x_1^2\right)\,\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x_1^2 x\right)\Big|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với đường thẳng CD: $y = -\dfrac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2\int\limits_0^{x_2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x_2^2\right)\,\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x_2^2 x\right)\Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3.$$

Từ giả thiết ta có

$$S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Vậy $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 682. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$. Tính $f(2)$.

A. 5. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải.

Với $x \in [1;2]$ ta có

$$f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2x + 3$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 2x + 3$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = x^2 + 3x + C.$$

Do $f(1) = 4$ nên $C = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2$.

Vậy $f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 = 20$.

Chọn đáp án B □

Câu 683. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$ và $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| = 1$. Tích phân $I = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2}; \mathrm{e} - 1\right)$. **C.** $\left(-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$. **D.** $(\mathrm{e} - 1; +\infty)$.

Lời giải.

Với mọi $a \in [0;1]$, ta có $0 = \int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = a\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 axf(x)\,\mathrm{d}x$.

Kí hiệu $I(a) = \int\limits_0^1 (\mathrm{e}^x - ax)\,\mathrm{d}x$, khi đó với mọi $a \in [0;1]$, ta có:

$$\left|\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 axf(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_0^1 (\mathrm{e}^x - ax)\,f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int\limits_0^1 |\mathrm{e}^x - ax| \cdot |f(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \int\limits_0^1 |\mathrm{e}^x - ax| \cdot \max_{x\in[0;1]} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 |\mathrm{e}^x - ax|\,\mathrm{d}x = I(a).$$

Suy ra $\left|\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \min\limits_{a\in[0;1]} I(a)$.

Mặt khác với mọi $x, a \in [0;1]$ ta có: $\mathrm{e}^x - ax \geqslant 0$.

Do đó $I(a) = \int\limits_0^1 |\mathrm{e}^x - ax|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (\mathrm{e}^x - ax)\,\mathrm{d}x = \left(\mathrm{e}^x - \frac{a}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \mathrm{e} - \frac{a}{2} - 1$.

Suy ra $\min\limits_{a\in[0;1]} I(a) = \mathrm{e} - \frac{3}{2} \Rightarrow \left|\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \mathrm{e} - \frac{3}{2} \approx 1{,}22$.

Vậy $I \in \left(-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 684. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2\pi$ có diện tích là?

A. 4. **B.** 4π. **C.** 2. **D.** 2π.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int\limits_0^{2\pi} |\sin x| dx = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 685. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x$ ta được kết quả là

A. $I = 1$. **B.** $I = \frac{1}{3}$. **C.** $I = \frac{1}{4}$. **D.** $I = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 686. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ m/s^2. Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu?

A. $\frac{43}{3}$ m. **B.** $\frac{430}{3}$ m. **C.** $\frac{4300}{3}$ m. **D.** $\frac{43000}{3}$ m.

Lời giải.

Vận tốc của vật sau khi tăng tốc có phương trình $v(t) = \int (3t + t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$.

Vì $v(0) = 10$ nên $c = 10$. Suy ra $v(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10$.

Do đó, trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc vật được quảng đường

$$s = \int\limits_0^{10} \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10\right)\,\mathrm{d}x = \left.\left(\frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{12} + 10t\right)\right|_0^{10} = \frac{4300}{3}\ (\mathrm{m}).$$

Chọn đáp án (C) □

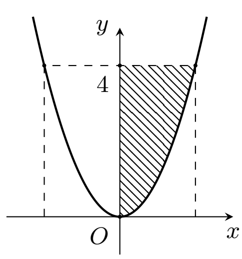
Câu 687. Cho hình phẳng $(\mathcal{D})$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $y = 4$. Khi quay $(\mathcal{D})$ quanh trục tung ta được khối tròn xoay có thể tích bằng bao nhiêu?

A. 6π. **B.** 10π. **C.** 8π. **D.** 12π.

Lời giải.

Xét phần hình phẳng bên phải trục tung, ta có $x = \sqrt{y}$. Thể tích khối tròn xoay khi quay $(\mathcal{D})$ quanh trục tung có thể tích

$$V = \pi \int\limits_0^4 y\,\mathrm{d}y = \pi \cdot \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^4 = 8\pi.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 688. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int\limits_{-1}^1 f\left(|2x - 1|\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{2}{3}$. **B**. $I=4$. **C**. $I=\dfrac{3}{2}$. **D**. $I=6$.

Lời giải.

Đặt $t=2x-1 \Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=-1 \Rightarrow t=-3$; $x=1 \Rightarrow t=1$. Khi đó

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{1} f(|t|)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=1+3=4.$$

Chọn đáp án B □

Câu 689. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$. Biết $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2-2x$, tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. $1<m<\mathrm{e}$. **B**. $0<m<\mathrm{e}$. **C**. $m>\mathrm{e}$. **D**. $0<m\le 1$.

Lời giải.

Từ $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2-2x$ lấy nguyên hàm hai vế ta được $\ln f(x)=2x-x^2+C$, với C là hằng số. Mà $f(0)=1\Rightarrow C=0$. Suy ra $f(x)=\mathrm{e}^{2x-x^2}$.

Đạo hàm $f'(x)=(2-2x)\cdot\mathrm{e}^{2x-x^2}=0\Leftrightarrow x=1$. Lập bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	e	↘	0

Từ bảng biến thiên suy ra với $0<m<\mathrm{e}$ thì phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 690. Cho biết $\displaystyle\int\limits_{0}^{4}\frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x=a+b\ln 2$, $(a,b\in\mathbb{Q})$. Khi đó, đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a-b=0$. **B**. $a^2-4b-1=0$. **C**. $a^2-4b+1=0$. **D**. $a^2-4b=0$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{2x+1}\Rightarrow t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=4\Rightarrow t=3$. Khi đó

$$\int\limits_{0}^{4}\frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{3}\frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{1}^{3}\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\,\mathrm{d}t$$
$$=\left.\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)\right|_{1}^{3}=2+\ln 2.$$

Vậy, $a=2$, $b=1$ và $a^2-4b=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 691. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \cos x$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

B. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \sin x + C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$.

D. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \sin x + C$.

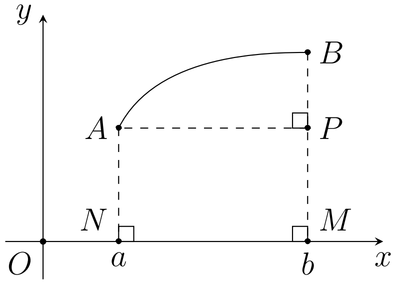
Lời giải.

$\displaystyle\int (x + \cos x)\ \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 692.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$ là diện tích hình thang cong $ABMN$.

B. $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$ là độ dài đoạn BP.

C. $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$ là độ dài đoạn NM.

D. $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$ là độ dài đoạn cong AB.

Lời giải.

Theo ý nghĩa hình học của tích phân thì $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$ là diện tích hình thang cong $ABMN$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 693. Cho hình phẳng $(\mathcal{H})$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng $(\mathcal{H})$ quay xung quanh trục Ox.

A. $2\pi \ln 2$.

B. $\dfrac{3\pi}{4}$.

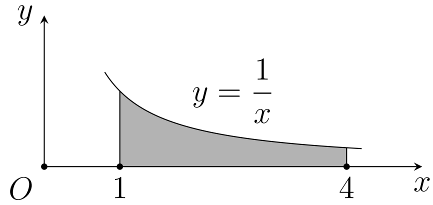
C. $\dfrac{3}{4}$.

D. $2\ln 2$.

Lời giải.

Hình phẳng $(\mathcal{H})$ là phần tô đậm trong hình vẽ bên. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay $(\mathcal{H})$ quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_1^4 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\bigg|_1^4 = \frac{3\pi}{4}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 694. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ 4 - x & \text{khi } 1 \le x \le 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{7}{2}$.

B. 1.

C. $\dfrac{5}{2}$.

D. $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (4-x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 695. Cho $I = \int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{ae^2+b}{c}$, với $a,b,c \in \mathbb{N}$ và phân số $\dfrac{a}{c}$ là tối giản. Tính $T = a+b+c$.

A. $T=5$. **B**. $T=3$. **C**. $T=4$. **D**. $T=6$.

Lời giải.

Ta có

$$\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2\ln x}{2}\right|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.$$

Suy ra $a=b=1$, $c=4$. Vậy $T=a+b+c=6$.

Chọn đáp án D □

Câu 696. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bằng công thức $v_{\mathrm{A}}(t) = 16-4t$ (m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn thì khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33 m. **B**. 12 m. **C**. 31 m. **D**. 32 m.

Lời giải.

Dễ thấy ô tô A dừng lại sau 4 giây. Quãng đường mà ô tô A di chuyển từ lúc bắt đầu hãm phanh đến lúc dừng lại là

$$\int_0^4 (16-4t)\,\mathrm{d}t = \left.\left(16t-2t^2\right)\right|_0^4 = 32 \text{ (m)}.$$

Vậy ô tô A phải bắt đầu hãm phanh cách ô tô B một khoảng ít nhất $32+1=33$ m.

Chọn đáp án A □

Câu 697. Giả sử hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, $y=f(x)$ có đạo hàm, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(3)=\dfrac{2}{3}$ và $[f'(x)]^2 = (x+1)f(x)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $2613 < f^2(8) < 2614$. **B**. $2614 < f^2(8) < 2615$.

C. $2618 < f^2(8) < 2619$. **D**. $2616 < f^2(8) < 2617$.

Lời giải.

Do $f(x)$ đồng biến nên $f'(x) \geq 0$, với $x>0$. Từ giả thiết ta có

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x+1} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{2\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{x+1}}{2}\,\mathrm{d}x$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được

$$\sqrt{f(x)} = \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

Do $f(3) = \dfrac{2}{3}$ nên $C = \dfrac{-8+\sqrt{6}}{3}$. Suy ra

$$f^2(x) = \left[\dfrac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + \dfrac{-8+\sqrt{6}}{3}\right]^4.$$

Do đó $f^2(8) \approx 2613{,}26$. Vậy $2613 < f^2(8) < 2614$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 698. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Diện tích S của hình D được tính theo công thức

A. $S = \displaystyle\int_a^b \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$. **B.** $S = \displaystyle\int_a^b f|x| \mathrm{d}x$. **C.** $S = \left|\displaystyle\int_a^b f(x) \mathrm{d}x\right|$. **D.** $S = \displaystyle\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích $S = \displaystyle\int_a^b \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 699. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$ là

A. $\displaystyle\int \cos 2x \,\mathrm{d}x = 2\sin 2x + C$.

B. $\displaystyle\int \cos 2x \,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

C. $\displaystyle\int \cos 2x \,\mathrm{d}x = \sin 2x + C$.

D. $\displaystyle\int \cos 2x \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \cos 2x \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 700. Cho $\displaystyle\int_{-1}^2 f(x) \mathrm{d}x = 2$ và $\displaystyle\int_{-1}^2 g(x) \mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \displaystyle\int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] \mathrm{d}x$ bằng

A. $I = \dfrac{11}{2}$. **B.** $I = \dfrac{7}{2}$. **C.** $I = \dfrac{17}{2}$. **D.** $I = \dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

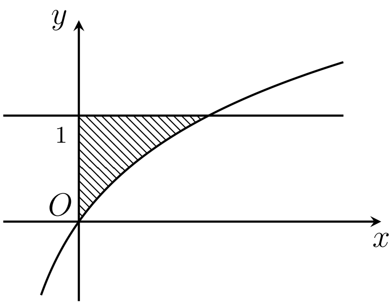
Ta thấy $I = \displaystyle\int_{-1}^2 x \,\mathrm{d}x + 2 \cdot \int_{-1}^2 f(x) \mathrm{d}x + 3 \cdot \int_{-1}^2 g(x) \mathrm{d}x = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 701.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \ln(x+1)$, đường thẳng $y = 1$ và trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích (H) bằng

A. $\mathrm{e} - 2$. **B.** $\mathrm{e} - 1$. **C.** 1. **D.** $\ln 2$.



Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\ln(x+1)=1 \Leftrightarrow x=\mathrm{e}-1$.

Diện tích (H) được tính theo công thức $S=\int\limits_0^{\mathrm{e}-1}[1-\ln(x+1)]\,\mathrm{d}x$.

Ta thấy $\int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x=(x+1)\ln(x+1)-x+C$.

Do vậy, $S=[2x-(x+1)\ln(x+1)]\Big|_0^{\mathrm{e}-1}=\mathrm{e}-2$.

Chọn đáp án A □

Câu 702. Biết $\int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}-c$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}^+$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=2$. **B.** $P=8$. **C.** $P=46$. **D.** $P=22$.

Lời giải.

Ta thấy $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$.

Ta được $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)\mathrm{d}x=\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2=\sqrt{3}+\sqrt{2}-3$.

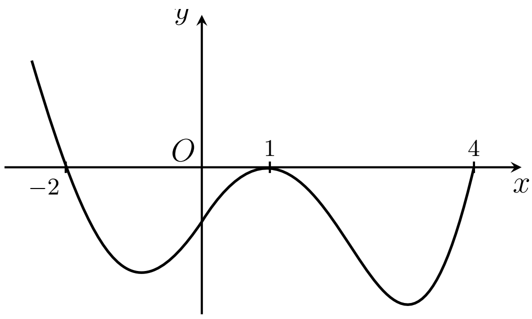
Vậy $P=8$.

Chọn đáp án B □

Câu 703.

Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1)=3$. Giá trị của biểu thức $f(-2)+f(4)$ bằng

A. 21. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 2.



Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-2}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x=-9 \Rightarrow f(1)-f(-2)=-9$. (1)

Ta có $\int\limits_{1}^{4} f'(x)\,\mathrm{d}x=-12 \Rightarrow f(4)-f(1)=-12$. (2)

Từ (1) và (2) ta được $f(-2)+f(4)=9-12+2f(1)=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 704. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(2x)=3f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$.

Tích phân $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cdot\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=3\cdot\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=6\Rightarrow\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=6\Rightarrow\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=$

5.

Chọn đáp án A □

Câu 705. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(x)+f'(x)\leq 1, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tìm giá trị lớn nhất của $f(1)$.

A. $\dfrac{2\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$. **C.** $\mathrm{e}-1$. **D.** $2\mathrm{e}-1$.

Lời giải.

Ta thấy

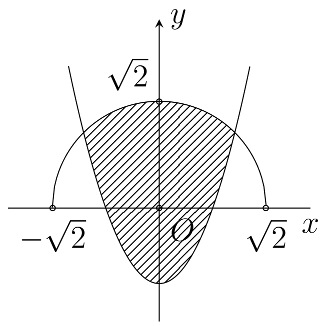
$$\begin{aligned}
& f(x)+f'(x)\leq 1\\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^x\cdot[f(x)+f'(x)]\leq \mathrm{e}^x\\
\Leftrightarrow\ & [\mathrm{e}^x\cdot f(x)]'\leq \mathrm{e}^x\\
\Leftrightarrow\ & \int\limits_0^1 [\mathrm{e}^x\cdot f(x)]'\,\mathrm{d}x\leq \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow\ & \mathrm{e}\cdot f(1)\leq \mathrm{e}-1\\
\Leftrightarrow\ & f(1)\leq \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 706.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=2x^2-1$ và nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{2-x^2}$ với $-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$ (phần gạch chéo trong hình vẽ). Diện tích của hình (H) bằng

A. $\dfrac{3\pi-2}{6}$. **B.** $\dfrac{3\pi+10}{3}$. **C.** $\dfrac{3\pi+2}{6}$. **D.** $\dfrac{3\pi+10}{6}$.



Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số là

$$\begin{aligned}
& 2x^2-1=\sqrt{2-x^2}\\
\Leftrightarrow & \begin{cases}(2x^2-1)^2=2-x^2\\ 2x^2-1\geq 0\\ 2-x^2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x^4-3x^2-1=0\\ \dfrac{1}{2}\leq x^2\leq x^2\end{cases}\\
\Leftrightarrow & x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1.
\end{aligned}$$

Khi đó diện tích của hình (H) là

$$\begin{aligned}
S_H &= \int\limits_{-1}^{1} |2x^2 - 1 - \sqrt{2-x^2}|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} (-(2x^2-1) + \sqrt{2-x^2})\,\mathrm{d}x \\
&= -\int\limits_{-1}^{1} (2x^2-1)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\left(\frac{2}{3}x^3 - x\right)\Big|_{-1}^{1} + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t \quad (\text{Đổi biến } x = \sqrt{2}\sin t) \\
&= \frac{2}{3} + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2t)+1)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2}\sin(2t) + t\right)\Big|_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi+10}{6}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 707. Biết $\int\limits_{1}^{2} \dfrac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}-1} = a\sqrt{5} + b\sqrt{2} + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $P = a+b+c$ là

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 2.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } a\sqrt{5} + b\sqrt{2} + c &= \int\limits_{1}^{2} \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}-1} \\
&= \int\limits_{1}^{2} \frac{x^3(\sqrt{x^2}+1)\,\mathrm{d}x}{x^2+1-1} \\
&= \int\limits_{1}^{2} x(\sqrt{x^2+1}+1)\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{1}^{2} (\sqrt{x^2+1})^2\,\mathrm{d}(\sqrt{x^2+1}) + \int\limits_{1}^{2} x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(\sqrt{x^2+1})^3}{3}\Big|_{1}^{2} + \frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{2} \\
&= \frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Do đó $a = \dfrac{5}{3}$, $b = -\dfrac{2}{3}$ và $c = \dfrac{3}{2}$ hay $P = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 708. Giá trị tích phân $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{x+4}{x+3}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\ln\dfrac{5}{3}$. **B.** $1+\ln\dfrac{4}{3}$. **C.** $\ln\dfrac{3}{5}$. **D.** $1-\ln\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Ta có: $\int\limits_0^1 \dfrac{x+4}{x+3}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(1+\dfrac{1}{x+3}\right)\,\mathrm{d}x = \left(x+\ln|x+3|\right)\Big|_0^1 = 1+\ln\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 709. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}+2x$ là

A. $2\ln|x|+x^2+\mathrm{C}$. **B.** $\ln|x|+2x^2+\mathrm{C}$. **C.** $\ln|x|+x^2+\mathrm{C}$. **D.** $\ln|x^2|+2x+\mathrm{C}$.

Lời giải.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(\dfrac{1}{x}+2x\right)\,\mathrm{d}x = \int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}+\int 2x\,\mathrm{d}x = \ln|x|+x^2+\mathrm{C}$.

Chọn đáp án C □

Câu 710. Tích phân $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x+2)}$ bằng

A. $\ln 2$. **B.** $\ln\dfrac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** $\ln 3$.

Lời giải.

Đặt $t=\ln x+2 \Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

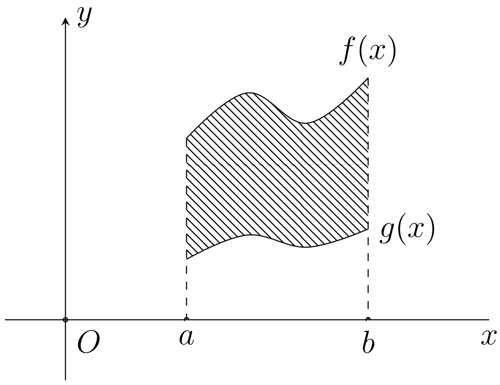
Đổi cận $x=1$ thì $t=2$ và $x=\mathrm{e}$ thì $t=3$.

$\Rightarrow \int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x+2)} = \int\limits_2^3 \dfrac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t|\Big|_2^3 = \ln\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 711.

Công thức nào sau đây để tính diện tích hình phẳng S (phần tô đậm trong hình vẽ)



A. $S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right|-\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có: $S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Trong đoạn $[a;b]$ thì $f(x)>g(x)$ nên $f(x)-g(x)>0\ \forall x\in[a;b]$, do đó

$$S=\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án A □

Câu 712. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$ có $f'(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4}$ thỏa mãn $f(0)=1$. Giá trị $f(2)$ bằng

A. $1-\ln 2$. **B.** 2. **C.** $1+3\ln 2$. **D.** $-1+3\ln 2$.

Lời giải.

Ta có: $f(x)=\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2-5x+4}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-4}\right)\mathrm{d}x=\ln|x-1|+\ln|x-4|+\mathrm{C}$ với $\mathrm{C}\in\mathbb{R}$.

Do $f(0)=1$ nên $\mathrm{C}=1-2\ln 2$ hay $f(x)=\ln|x-1|+\ln|x-4|+1-2\ln 2$.

Khi đó: $f(2)=1-\ln 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 713. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$. Giá trị $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ là

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-2$.

Lời giải.

Ta có: $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{-x=t}{=} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}} f(-t)(-\,\mathrm{d}t)=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,\mathrm{d}x$. Do đó:

$$I=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)+f(-x)}{2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2+2\cos 2x}}{2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4\cos^2 x}}{2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

hay $I=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 714. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a;\ x=b$ được tính theo công thức

A. $S=\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\pi\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\displaystyle\int\limits_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo giáo khoa, ta có $S=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 715. Họ nguyên hàm của hàm số $y=\sin 2x$ là

A. $y=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **B.** $y=-\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

C. $y=\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $y=-\cos 2x+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \sin 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 716. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\cos x}\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $1-\mathrm{e}$. **B.** $\mathrm{e}+1$. **C.** $\mathrm{e}-1$. **D.** e.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\cos x} \cdot \sin x \, \mathrm{d}x = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\cos x} \, \mathrm{d}(\cos x) = -\mathrm{e}^{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e} - 1.$

Chọn đáp án C □

Câu 717. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(2 - x) = 2x^2 - 4x + 10$. Tích phân $\int\limits_0^2 f(x) \, \mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{26}{3}$. **B.** $\frac{52}{3}$. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{14}{3}$.

Lời giải.

Chú ý $\int\limits_0^2 f(x) \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(2 - x) \, \mathrm{d}x$.

Ta có $2\int\limits_0^2 f(x) \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (f(x) + f(2 - x)) \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (2x^2 - 4x + 10) \, \mathrm{d}x = \frac{52}{3}$.

Vậy $\int\limits_0^2 f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{26}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 718. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x) \cdot \mathrm{e}^{f^3(x) - x^2 - 1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ và $f(0) = 1$. Tích phân $\int\limits_0^{\sqrt{7}} x f(x) \, \mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. **B.** $\frac{5\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\frac{13}{4}$. **D.** $\frac{45}{8}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $3 \cdot f^2(x) \cdot f'(x) \cdot \mathrm{e}^{f^3(x)} = 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2 + 1}$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta thu được $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} + C$. Vì $f(0) = 1 \Rightarrow C = 0$.

Vậy $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$. Từ đó ta có

$$\int\limits_0^{\sqrt{7}} x f(x) \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\sqrt{7}} x\sqrt[3]{x^2 + 1} \mathrm{d}x = \frac{45}{8}.$$

Chú ý tích phân trên tính bằng phép đổi biến $t = \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 719. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b \, (a < b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V = 2\pi \int\limits_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x$. **B.** $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x$.

C. $V = \pi^2 \int\limits_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi^2 \int\limits_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 720. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn $x(x+1)f'(x) + f(x) = x^2 + x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ và $f(1) = -2\ln 2$ biết $f(2) = a + b\ln 3$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải.

Từ giả thiết $\dfrac{x}{x+1}f'(x) + \dfrac{1}{(x+1)^2}f(x) = \dfrac{x}{x+1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.

$\Rightarrow \left[\dfrac{x}{x+1} \cdot f(x)\right]' = \dfrac{x}{x+1}$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta có

$$\frac{x}{x+1} \cdot f(x) = \int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x = x - \ln|x+1| + C.$$

Mà $f(1) = -2\ln 2$ nên $C = -1 \Rightarrow f(x) \cdot \dfrac{x}{x+1} = x - \ln|x+1| - 1$.

Cho $x = 2 \Rightarrow f(2) \cdot \dfrac{2}{3} = 2 - \ln 3 - 1 \Rightarrow f(2) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}\ln 3$.

Vậy $a = \dfrac{3}{2}$, $b = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 721. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$. Tính $I = \int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 4$. **B.** $I = \dfrac{3}{2}$. **C.** $I = 8$. **D.** $I = 12$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$ và $x = 2 \Rightarrow t = 4$.

Ta có $I = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 722. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A. $\int 7^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{7^x}{\ln 7} + C$. **B.** $\int 7^x\,\mathrm{d}x = 7^x \ln 7 + C$.

C. $\int 7^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{7^{x+1}}{x+1} + C$. **D.** $\int 7^x\,\mathrm{d}x = 7^{x+1} + C$.

Lời giải.

Theo công thức nguyên hàm $\int 7^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{7^x}{\ln 7} + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 723. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = \cos x + C$. **B.** $\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$.

C. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$. **D.** $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

Lời giải.

Theo công thức nguyên hàm $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 724. Cho hình phẳng S giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = 0$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo bởi S khi quay quanh trục Ox. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V = \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2) \, \mathrm{d}x$.

B. $V = \pi \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2) \, \mathrm{d}x$.

C. $V = \pi \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x$.

D. $V = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Cho $y = 0$ suy ra $x = \pm 1$. Theo công thức tính thể tích khối tròn xoay bằng tích phân ta có

$$V = \pi \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2) \, \mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 725. Biết $\int\limits_{1}^{2} \dfrac{\mathrm{d}x}{3x+1} = a \ln 7 + b \ln 2 \, (a, b \in \mathbb{Q})$. Khi đó tổng $a + b$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$.

B. 1.

C. $-\dfrac{1}{3}$.

D. -1.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int \dfrac{1}{ax+b} \, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{a} \ln |ax+b| + C$.

Ta có $\int\limits_{1}^{2} \dfrac{\mathrm{d}x}{3x+1} = \dfrac{1}{3} \ln |3x+1| \Big|_{1}^{2} = \dfrac{1}{3} \ln 7 - \dfrac{2}{3} \ln 2$. Do đó $a = \dfrac{1}{3}$, $b = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow a + b = -\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 726. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - x$ và $y = x$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$.

B. $-\dfrac{4}{3}$.

C. $\dfrac{1}{4}$.

D. 4.

Lời giải.

Phương trình $x^2 - x = x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng là $S = \int\limits_{0}^{2} |x^2 - 2x| \, \mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2} \left(2x - x^2\right) \, \mathrm{d}x = \left(x^2 - \dfrac{x^3}{3}\right) \Big|_{0}^{2} = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 727. Tích phân $\int\limits_{0}^{1} \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x$ bằng

A. $1 - \mathrm{e}^2$.

B. $\dfrac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^2)$.

C. $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1)$.

D. $\mathrm{e}^2 - 1$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{0}^{1} \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} \mathrm{e}^{2x} \Big|_{0}^{1} = \dfrac{1}{2} \left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 728. Nguyên hàm của hàm số $\int (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\sin x + \cos x + C$. **B.** $\sin x + \cos x + C$.

C. $-\sin x - \cos x + C$. **D.** $\sin x - \cos x + C$.

Lời giải.

Kết hợp các công thức nguyên hàm cơ bản, ta được

$$\int (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x = \sin x - \cos x + C.$$

Chọn đáp án D □

Câu 729. Cho một vật thể (T), gọi B là phần của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$. Cắt vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x (với $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$) thiết diện thu được là một nửa hình tròn có bán kính bằng $\sin x$. Tính thể tích V của vật thể B.

A. $V = \dfrac{\pi^2}{8}$. **B.** $V = \dfrac{\pi}{8}$. **C.** $V = \dfrac{\pi}{4}$. **D.** $V = \dfrac{\pi^2}{4}$.

Lời giải.

Tại điểm có hoành độ x, diện tích thiết diện là $S = \dfrac{1}{2}\pi \sin^2 x$.

Thể tích vật thể B theo công thức tích phân là

$$V = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} S\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 730. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x) + f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{4}{5}$. **C.** $-\dfrac{5}{4}$. **D.** $-\dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

Từ giả thiết

$$f^3(x) + f(x) = x.$$

Cho $x = 0$, suy ra

$$f^3(0) + f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$

Cho $x = 2$, suy ra

$$f^3(2) + f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = 1.$$

Ta có

$$\int\limits_0^2 \left[\left(f^3(x) + f(x)\right) f'(x)\right]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 x f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f^4(x)}{4} + \frac{f^3(x)}{3}\right)\Bigg|_0^2 = x f(x)\big|_0^2 - \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

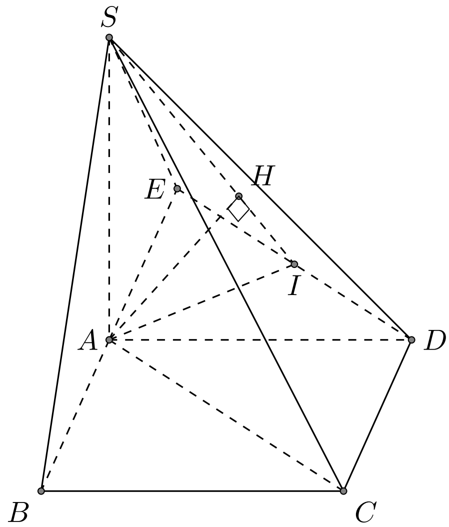
Từ đây, dễ dàng có được $I = \dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 731. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi E là điểm đối xứng của B qua A. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SE.

A. a. **B**. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **C**. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D**. $\dfrac{2a}{5}$.

Lời giải.



Tứ giác $ACDE$ là hình bình hành nên $AC \parallel ED$, suy ra $AC \parallel (SDE)$. Do đó

$$\mathrm{d}(AC, SE) = \mathrm{d}\left[AC, (SDE)\right] = \mathrm{d}\left[A, (SDE)\right].$$

Gọi I là trung điểm của DE, do $\triangle ADE$ vuông cân tại A nên $AI \perp DE$ và $AI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong mặt phẳng (SAI), kẻ $AH \perp SI$, dễ dàng chứng minh được $AH \perp (SDE)$. Do đó

$$\mathrm{d}\left[A, (SDE)\right] = AH.$$

Xét $\triangle SAI$ vuông tại A, đường cao AH, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy $\mathrm{d}(AC, SE) = \mathrm{d}\left[A, (SDE)\right] = AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 732. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2xf(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$ và $f(0) = 1$. Tính $f(1)$.

A. e. **B**. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C**. $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$. **D**. $-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Từ giả thiết $f'(x) + 2xf(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$, ta suy ra

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{x^2} f'(x) + 2x\mathrm{e}^{x^2} f(x) = 2x \quad & \Leftrightarrow \quad \left[\mathrm{e}^{x^2} f(x)\right]' = 2x \\
& \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \left[\mathrm{e}^{x^2} f(x)\right]' \mathrm{d}x = \int_0^1 2x \,\mathrm{d}x \\
& \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{x^2} f(x)\Big|_0^1 = x^2\Big|_0^1 \\
& \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}f(1) - f(0) = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{2}{\mathrm{e}}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 733. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{3}{1-2x}$.

A. $-6\ln|1-2x| + C$. **B**. $3\ln|1-2x| + C$. **C**. $-\dfrac{3}{2}\ln|1-2x| + C$. **D**. $\dfrac{3}{2}\ln|1-2x| + C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{1-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\ln|1-2x| + C.$

Chọn đáp án C □

Câu 734. Tích phân $\int\limits_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{2x}\Big|_0^{\ln 2} = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 735. Cho hai hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường cong $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ được xác định bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \int\limits_a^b |f_1(x)+f_2(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \int\limits_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \left|\int\limits_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S = \int\limits_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường cong $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ được xác định bởi công thức $S = \int\limits_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 736. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên $[0;1]$ thỏa mãn $\frac{[f(x)]^2[f'(x)]^2}{\mathrm{e}^{2x}} = 1+[f(x)]^2$ và $f(x) > 0$ với $\forall x \in [0;1]$, biết $f(0) = 1$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\frac{5}{2} < f(1) < 3$. **B.** $3 < f(1) < \frac{7}{2}$. **C.** $2 < f(1) < \frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2} < f(1) < 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{[f(x)]^2[f'(x)]^2}{\mathrm{e}^{2x}} = 1+[f(x)]^2\\
\Rightarrow\ &\frac{f(x)f'(x)}{\mathrm{e}^{x}} = \sqrt{1+[f(x)]^2}\\
\Rightarrow\ &\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}} = \mathrm{e}^x\\
\Rightarrow\ &I = \int\limits_0^1 \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-1.
\end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{1+[f(x)]^2} \Rightarrow t^2 = 1+[f(x)]^2 \Rightarrow t\,\mathrm{d}t = f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2} = t_1$; $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1+[f(1)]^2} = t_2$.

Khi đó $I = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t} = t\big|_{t_1}^{t_2} = \sqrt{1+[f(1)]^2}-\sqrt{2}$.

Do đó $\sqrt{1+[f(1)]^2}-\sqrt{2} = \mathrm{e}-1 \Leftrightarrow f(1) = \sqrt{(e-1+\sqrt{2})^2-1} \simeq 2{,}96$.

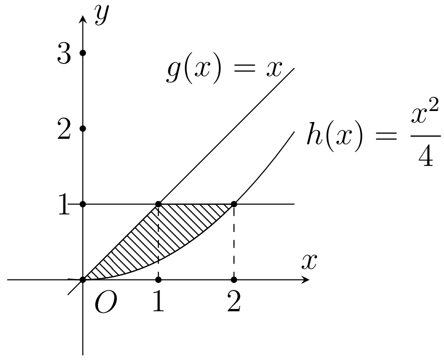
Vậy $\frac{5}{2} < f(1) < 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 737.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = 1$, $y = x$ và đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4}$ trong miền $x \geq 0$, $y \leq 1$ là $\frac{a}{b}$ (phân số tối giản). Khi đó $b - a$ bằng

A. 2. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 1.



Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\Big|_0^1 + \left(x - \frac{x^3}{12}\right)\Big|_1^2 = \frac{5}{6}.$$

Khi đó $a = 5$, $b = 6$. Vậy $b - a = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 738. Biết tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = a\pi + \ln b$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a + b$.

A. $S = \frac{5}{4}$. **B**. $S = \frac{11}{4}$. **C**. $S = \frac{3}{4}$. **D**. $S = 2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3(\sin x + \cos x) + 2(\sin x - \cos x)}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(3 + \frac{2(\sin x - \cos x)}{\sin x + \cos x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-2(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3\pi}{4} + J. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = (\cos x - \sin x)\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sqrt{2}$.

Khi đó $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-2(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{-2\,\mathrm{d}t}{t} = -2\ln|t|\Big|_1^{\sqrt{2}} = -\ln 2 = \ln\frac{1}{2}$.

Suy ra $I = \frac{3\pi}{4} - \ln 2$. Mà $I = a\pi + \ln b$ nên $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{2}$.

Vậy $S = a + b = \frac{5}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 739. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn $\int\limits_0^2 x(f'(x)-1)\,\mathrm{d}x = 2f(2)$.

Tính giá trị của $I = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $J = \int\limits_0^2 x(f'(x)-1)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 x(f'(x))\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 x(f'(x))\,\mathrm{d}x - \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^2 = K - 2$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Khi đó $K = \int\limits_0^2 x(f'(x))\,\mathrm{d}x = xf(x)|_0^2 - \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2f(2) - I$.

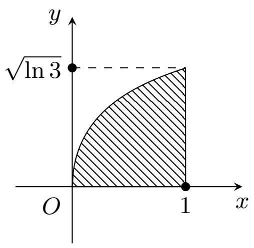
Suy ra $I = 2f(2) - K = 2f(2) - (J+2) = 2f(2) - 2f(2) - 2 = -2$.

Chọn đáp án D □

Câu 740. Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\ln(2x+1)}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox.

A. $\dfrac{3}{2}\ln 3 - 1$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}\ln 3 - \pi$. **C.** $\left(\pi + \dfrac{1}{2}\right)\ln 3 - 1$. **D.** $\dfrac{3\pi}{2}\ln 3 - \pi$.

Lời giải.



Thể tích của khối tròn xoay là $V = \int\limits_0^1 \pi\ln(2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Đổi biến $2x+1 = t$ thì $\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$. Khi $x = 0$ thì $t = 1$, $x = 1$ thì $t = 3$.

Do đó ta có $V = \int\limits_1^3 \dfrac{\pi}{2}\ln t\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2}\int\limits_1^3 \ln t\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases} \ln t = u \\ \mathrm{d}t = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \\ v = t. \end{cases}$

Sử dụng tích phân từng phần ta có

$$\int\limits_1^3 \ln t\,\mathrm{d}t = t\ln t|_1^3 - \int\limits_1^3 \mathrm{d}t = (t\ln t - t)\,|_1^3 = 3\ln 3 - 2.$$

Vậy $V = \dfrac{(3\ln 3 - 2)\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}\ln 3 - \pi$.

Chọn đáp án D □

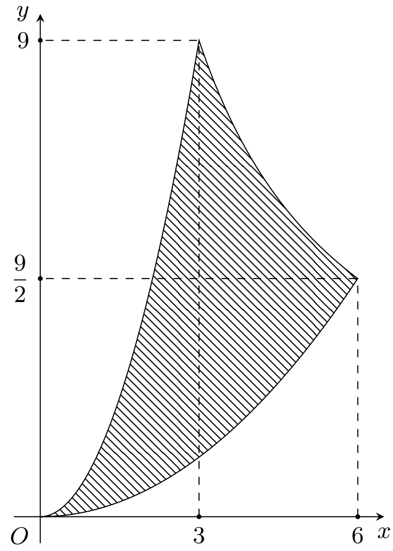
Câu 741. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{8}$, $y = \dfrac{27}{x}$.

A. $\dfrac{63}{8}$. **B.** $27\ln 2 - \dfrac{63}{8}$. **C.** $27\ln 2$. **D.** $27\ln 2 - \dfrac{63}{4}$.

Lời giải.

Giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2$ và $y = \dfrac{x^2}{8}$ là $(0;0)$.
Giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2$ và $y = \dfrac{27}{x}$ là $(3;9)$.
Giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2}{8}$ và $y = \dfrac{27}{x}$ là $(6;\dfrac{9}{2})$.
Thể tích hình phẳng được tính bởi

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^3 \left(x^2 - \frac{x^2}{8}\right) \mathrm{d}x + \int\limits_3^6 \left(\frac{27}{x} - \frac{x^2}{8}\right) \mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{7x^3}{24}\right|_0^3 + \left.\left(27\ln x - \frac{x^3}{24}\right)\right|_3^6 \\ &= 27\ln 2. \end{aligned}$$



Chọn đáp án C □

Câu 742. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_0^2 \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x$.

A. 13. **B.** $\dfrac{13}{3}$. **C.** 4. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^2 \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{\sqrt{(4x+1)^3}}{6}\right|_0^2 = \frac{13}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 743. Hàm số nào sau đây **không phải** là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$?

A. $F(x) = \ln|2x+1| + 1$. **B.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln|2x+1| + 2$.

C. $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln|4x+2| + 3$. **D.** $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln(4x^2+4x+1) + 3$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$.

Mặt khác $\dfrac{1}{2}\ln|4x+2| + 3 = \dfrac{1}{2}\ln|2x+1| + \dfrac{\ln 2}{2} + 3$ và $\dfrac{1}{2}\ln(4x^2+4x+1) + 3 = \dfrac{1}{2}\ln|2x+1| + 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 744. Cho số hữu tỷ dương m thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2m}} x\cos mx\,\mathrm{d}x = \frac{\pi-2}{2}$. Hỏi m thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $\left(\dfrac{7}{4};2\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(1;\dfrac{6}{5}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{8}{7}\right)$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos mx\,\mathrm{d}x \end{cases}$. Khi đó ta có thể chọn $\begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{\sin mx}{m}. \end{cases}$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2m}} x\cos mx\,\mathrm{d}x &= \left.\frac{x\sin mx}{m}\right|_0^{\frac{\pi}{2m}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2m}} \frac{\sin mx}{m}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2m^2} - \left(-\left.\frac{\cos mx}{m^2}\right|_0^{\frac{\pi}{2m}}\right)\\ &= \frac{\pi}{2m^2} - \frac{1}{m^2}.\end{aligned}$$

Do đó ta có $\frac{\pi}{2m^2} - \frac{1}{m^2} = \frac{\pi-2}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi-2}{2m^2} = \frac{\pi-2}{2} \Leftrightarrow m^2 = 1$.
Vì m là số hữu tỷ dương nên $m = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 745. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ là

A. $\mathrm{e}^x + C$. **B.** $\frac{\mathrm{e}^x}{2} + C$. **C.** $\mathrm{e}^{2x} + C$. **D.** $\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 746. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và thỏa mãn $f(-1) = 4$; $f(3) = 7$. Giá trị của $I = \int\limits_{-1}^{3} 5f'(t)\,\mathrm{d}t$ bằng

A. $I = 20$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 10$. **D.** $I = 15$.

Lời giải.

Ta có $I = 5\int\limits_{-1}^{3} f'(t)\,\mathrm{d}t = 5f(t)\Big|_{-1}^{3} = 5(f(3) - f(-1)) = 15$.

Chọn đáp án D □

Câu 747. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

D. $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Lời giải.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ ta có các mệnh đề sau

— $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

— $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\forall c \in (a;b)$.

— $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

— $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 748. Cho $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$ giá trị của $\int\limits_2^6 f\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 24. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 14.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_2^6 f\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int\limits_2^6 f\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2\int\limits_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\cdot 12 = 24. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 749. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $(P)\colon y = x^2 - 4x + 3$ và các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A\left(\frac{3}{2}; -3\right)$ đến đồ thị (P). Giá trị của S bằng

A. 9. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (P) \Rightarrow y_0 = x_0^2 - 4x_0 + 3$.

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại điểm M là: $d\colon y = (2x_0 - 4)(x - x_0) + x_0^2 - 4x_0 + 3$.

Vì tiếp tuyến đi qua điểm A nên thay tọa độ điểm A vào d ta được

$$\begin{aligned} & -3 = (2x_0 - 4)(\frac{3}{2} - x_0) + x_0^2 - 4x_0 + 3 \\ \Leftrightarrow\ & x_0^2 - 3x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x + 0 = 3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

— Với $x_0 = 0 \Rightarrow$ tiếp tuyến $d_1\colon y = -4x + 3$.

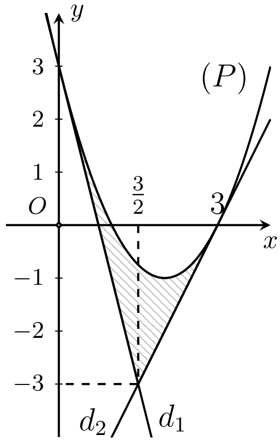
— Với $x_0 = 3 \Rightarrow$ tiếp tuyến $d_2\colon y = 2x - 6$.

Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2 là nghiệm phương trình

$$-4x + 3 = 2x - 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Vẽ đồ thị (P) và hai đường thẳng d_1; d_2 trên cùng một mặt phẳng tọa độ như hình vẽ.

Khi đó diện tích cần tính là phần được bôi đen bên hình được xác định bởi



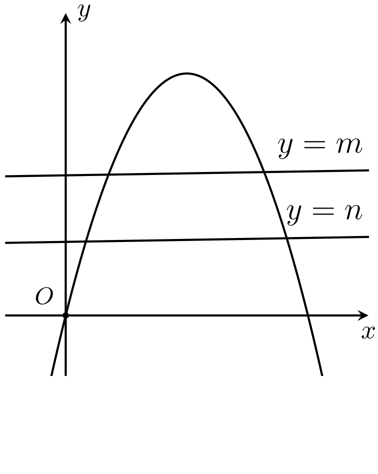
$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= \int\limits_0^{\frac{3}{2}} \left[(x^2-4x+3)-(-4x+3)\right] \mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{3}{2}}^{3} \left[(x^2-4x+3)-(2x-6)\right] \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{\frac{3}{2}} x^2 \,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{3}{2}}^{3} (x^2-6x+9)\,\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\frac{3}{2}} + \left.\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right)\right|_{\frac{3}{2}}^{3} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 750.

Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y=m$ và $y=n$ chia (H) thành ba phần có diện tích bằng nhau (tham khảo hình vẽ). Giá trị của biểu thức $T=(4-m)^3+(4-n)^3$ bằng

A. $T=\frac{320}{9}$. **B.** $T=\frac{75}{2}$. **C.** $T=\frac{512}{15}$. **D.** $T=405$.



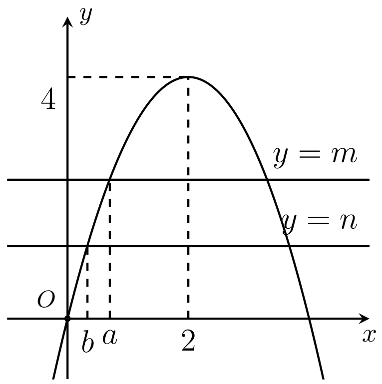
Lời giải.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ và trục Ox và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$.

Khi đó $S=\int\limits_0^2(-x^2+4x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{16}{3}$.

Đường thẳng $y=m$ và $y=n$ chia S thành ba phần bằng nhau có diện tích theo thứ tự từ trên xuống là S_1; S_2; S_3.

Gọi hoành độ các giao điểm của parabol với hai đường thẳng như hình bên.



Ta có

$$\begin{aligned}&S_1=2\int\limits_a^2(-x^2+4x-m)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}S\\ \Leftrightarrow\ &\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-mx\right)\Big|_a^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{3}\\ \Leftrightarrow\ &\left(\frac{16}{3}-2m\right)-\left(-\frac{a^3}{3}+2a^2-ma\right)=\frac{16}{9}\quad(1).\end{aligned}$$

Mà $x=a$ là nghiệm của phương trình $-x^2+4x=m$ nên ta có $-a^2+4a=m\quad(2)$.

Thay (2) vào (1) ta được $-\dfrac{2a^3}{3}+4a^2-8a+\dfrac{32}{9}=0\Leftrightarrow a\approx 0{,}613277$.

Suy ra $m=-a^2+4a\approx 2{,}077$.

Tương tự ta có

$$\begin{aligned}&S_1+S_2=\frac{2}{3}S\\ \Rightarrow\ &2\int\limits_b^2(-x^2+4x-n)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\cdot 2\cdot\int\limits_0^2(-x^2+4x)\,\mathrm{d}x\\ \Leftrightarrow\ &-\frac{2}{3}b^3+4b^2-8b+\frac{16}{9}=0\\ \Leftrightarrow\ &b\approx 0{,}252839\Rightarrow n=-b^2+4b=0{,}947428.\end{aligned}$$

Khi đó $T=(4-m)^3+(4-n)^3=\dfrac{320}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 751. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\dfrac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$. Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là

A. $\dfrac{x+3}{2\left(x^2+4\right)}+C$. **B.** $\dfrac{x+3}{x^2+4}+C$. **C.** $\dfrac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)}+C$. **D.** $\dfrac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)}+C$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}=2\,\mathrm{d}t$.

Khi đó $\int\dfrac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\int 2f(t)\,\mathrm{d}t$.

Mà $\int\dfrac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$ nên $\int 2f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{2(t+3)}{t^2+4}+C$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
&\int f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{t+3}{t^2+4} + C\\
\Leftrightarrow\ &\int f(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{2t+3}{4t^2+4} + C\\
\Leftrightarrow\ &\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)} + C.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 752. Biết rằng $\displaystyle\int\limits_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}$, ở đó a, b là các số nguyên dương và $4 < a+\sqrt{b} < 5$.

Tổng $a+b$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int\limits_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x-3 = 2\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận

— $x = a+\sqrt{b} \Rightarrow \sin t = \dfrac{a+\sqrt{b}-3}{2} \Rightarrow t = \arcsin\left(\dfrac{b+\sqrt{b}-3}{2}\right)$.

— $x = 4 \Rightarrow \sin t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin\left(\frac{b+\sqrt{b}-3}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t\\
&= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin\left(\frac{b+\sqrt{b}-3}{2}\right)} 1\,\mathrm{d}t\\
&= t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin\left(\frac{b+\sqrt{b}-3}{2}\right)}\\
&= \arcsin\left(\frac{a+\sqrt{b}-3}{2}\right) - \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Vì $I = \dfrac{\pi}{6}$ nên

$$\begin{aligned}
&\arcsin\left(\frac{b+\sqrt{b}-3}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{a+\sqrt{b}-3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
\Leftrightarrow\ &a+\sqrt{b} = 3+\sqrt{3}\\
\Rightarrow\ &\begin{cases} a = 3\\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a+b = 6.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 753. Biết $\int\limits_0^3 x\ln(x^2+16)\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2 + \dfrac{c}{2}$ trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$.

A. $T = 2$. **B.** $T = -16$. **C.** $T = -2$. **D.** $T = 16$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2+16) \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2x}{x^2+16}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}(x^2+16). \end{cases}$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^3 x\ln(x^2+16)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}(x^2+16)\cdot\ln(x^2+16)\right]\Bigg|_0^3 - \int\limits_0^3 \frac{2x}{x^2+16}\cdot\frac{1}{2}(x^2+16)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\cdot 25\cdot\ln 25 - \frac{1}{2}\cdot 16\cdot\ln 16 - \int\limits_0^3 x\,\mathrm{d}x \\ &= 25\ln 5 - 16\ln 4 - \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 \\ &= 25\ln 5 - 32\ln 2 - \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

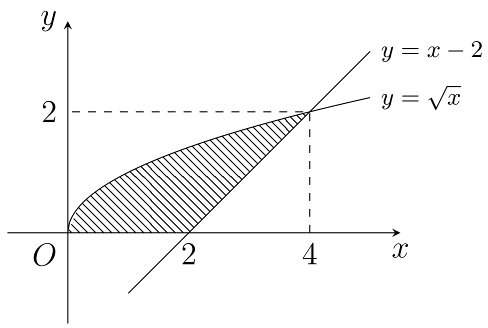
$\Rightarrow a = 25, b = -32, c = -9 \Rightarrow T = a + b + c = 25 - 32 - 9 = -16$.

Chọn đáp án B □

Câu 754. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi phép quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0, y = \sqrt{x}, y = x - 2$.

A. $\dfrac{8\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{16\pi}{3}$. **C.** 10π. **D.** 8π.

Lời giải.



Xét các phương trình hoành độ giao điểm

$\begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x} = x - 2 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = 2. \end{cases}$

Suy ra thể tích của vật thể tròn xoay cần tính là

$V = \pi\int\limits_0^2 (\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x + \pi\int\limits_2^4 \left|(x-2)^2 - (\sqrt{x})^2\right|\,\mathrm{d}x = 2\pi + \pi I$.

Ta có $I = \int\limits_2^4 \left|(x-2)^2 - (\sqrt{x})^2\right|\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{10}{3}$.

Vậy $V = 2\pi + \dfrac{10}{3}\pi = \dfrac{16\pi}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 755. Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình sau $3^{2x+8} - 4\cdot 3^{x+5} + 27 = 0$. Tính tổng các phần tử của S.

A. -5. **B.** 5. **C.** $\dfrac{4}{27}$. **D.** $-\dfrac{4}{27}$.

Lời giải.

Ta có

$$3^{2x+8} - 4\cdot 3^{x+5} + 27 = 0 \Leftrightarrow 3^{2(x+4)} - 12\cdot 3^{x+4} + 27 = 0.$$

Đặt $t = 3^{x+4} > 0$. Khi đó phương trình trên tương đương với

$$t^2 - 12t + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9 \text{ (thoả } t > 0) \\ t = 3 \text{ (thoả } t > 0) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x+4} = 3^2 \\ 3^{x+4} = 3^1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 4 = 2 \\ x + 4 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S là $(-2) + (-3) = -5$.

Chọn đáp án A □

Câu 756. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$ với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. $\int (f(x) - g(x)) = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Mệnh đề "$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ " **sai** vì hằng số k phải khác 0.

Chọn đáp án D □

Câu 757. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2018$ và $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $g(x) + g(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^1 f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 2018$. **B.** $I = \dfrac{1009}{2}$. **C.** $I = 4036$. **D.** $I = 1008$.

Lời giải.

$I = \int\limits_{-1}^1 f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_1^{-1} f(-x) \cdot g(-x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^1 f(x) \cdot (1 - g(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x - I.$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\int\limits_1^0 f(-x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2018. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 758. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thoả mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$, $f(0) = \dfrac{1}{3}$ và $f(-3) - f(3) = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = f(-4) + f(-1) - f(4)$.

A. $\dfrac{1}{3}\ln 2 + \dfrac{1}{3}$. **B.** $\ln 80 + 1$.

C. $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{4}{5}\right)+\ln 2+1$. **D.** $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{8}{5}\right)+1$.

Lời giải.

Ta có $T=f(-4)+f(-1)-f(4)=f(-4)-f(-3)+f(-1)-f(0)+f(3)-f(4)+\frac{1}{3}$.

Do $f'(x)$ liên tục trên các đoạn $[-4;-3],[-1;0],[3;4]$ nên

$$T=\int_{-3}^{-4} f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{-1} f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_{4}^{3} f'(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln\frac{5}{2}-\ln 4+\ln 2-\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{5}-\ln\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 759. Biết $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5x^2+4}}=\frac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và phân thức $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $T=a^2+b^2$.

A. $T=13$. **B.** $T=26$. **C.** $T=29$. **D.** $T=34$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{5x^2+4}\Rightarrow t^2=5x^2+4\Rightarrow t\,\mathrm{d}t=5x\,\mathrm{d}x$. Do đó

$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5x^2+4}}=\frac{1}{5}\int_2^3 \mathrm{d}t=\frac{1}{5}\Rightarrow a=1;b=5$. Vậy $T=1^2+5^2=26$.

Chọn đáp án B □

Câu 760. Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0)$, phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2. Tính tích phân $I=\int_{x_1}^{x_2}(2ax+b)^3\cdot e^{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=x_2-x_1$. **B.** $I=\frac{x_2-x_1}{4}$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\frac{x_2-x_1}{2}$.

Lời giải.

Ta đặt $t=ax^2+bx+c\Rightarrow\ \mathrm{d}t=(2ax+b)\,\mathrm{d}x$ và $g(t)=(2ax+b)^2$

Do giả thiết x_1,x_2 là hai nghiệm của $ax^2+bx+c=0$ nên $\begin{cases}x=x_1\Rightarrow t=0\\ x=x_2\Rightarrow t=0.\end{cases}$

Do đó dễ dàng có

$$I=\int_{x_1}^{x_2}(2ax+b)^3\cdot e^{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x=\int_0^0 g(t)\cdot e^t\,\mathrm{d}t=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 761. Biết rằng $\int_1^5 \frac{3}{x^2+3x}\,\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 2$ $(a,b\in\mathbb{Z})$. Tính $P=a^2+b^2$.

A. $P=1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=0$. **D.** $P=-1$.

Lời giải.

$$I=\int_1^5\frac{3}{x(x+3)}\,\mathrm{d}x=\int_1^5\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x=\int_1^5\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int_1^5\frac{\mathrm{d}(x+3)}{x+3}=\ln x\Big|_1^5-\ln(x+3)\Big|_1^5=\ln 5-\ln 2.$$

$\Rightarrow a=1,\ b=-1$. Suy ra, $P=a^2+b^2=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 762. Biết $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 x\left(2 + f(x^2+1)\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 16$. **B.** $I = 4$. **C.** $I = 10$. **D.** $I = 7$.

Lời giải.

$$I = \int\limits_0^2 \left[2x + xf(x^2+1)\right]\,\mathrm{d}x = x^2\Big|_0^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x^2+1)\,\mathrm{d}(x^2+1)$$

$$= 4 + \frac{1}{2}\int\limits_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t \text{ (ta đặt } x^2+1=t) = 4 + \frac{1}{2}\cdot 12 = 10.$$

Chọn đáp án C □

Câu 763. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường cong $y = \mathrm{e}^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2+1\right)}{2}$. **B.** $V = \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2}$. **C.** $V = \dfrac{\pi\mathrm{e}^2}{2}$. **D.** $V = \dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)}{2}$.

Lời giải.

Ta có $V = \pi\int\limits_0^1 \left(\mathrm{e}^x\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{\pi(\mathrm{e}^2-1)}{2}$.

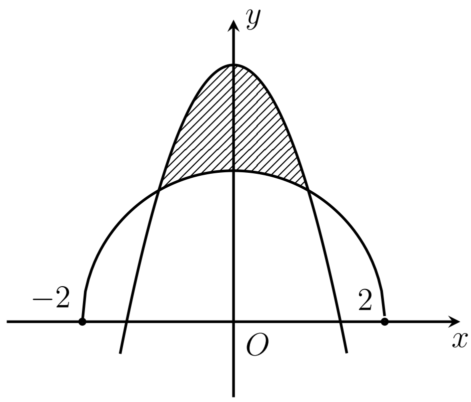
Chọn đáp án D □

Câu 764.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = -\sqrt{3}\left(x^2-2\right)$, và nửa đường tròn có phương trình $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $-2 \le x \le 2$) (*phần tô đậm như hình vẽ*). Diện tích của hình (H) bằng

A. $\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{6}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{3}-2\pi}{6}$.

C. $\dfrac{7\sqrt{3}-2\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$.



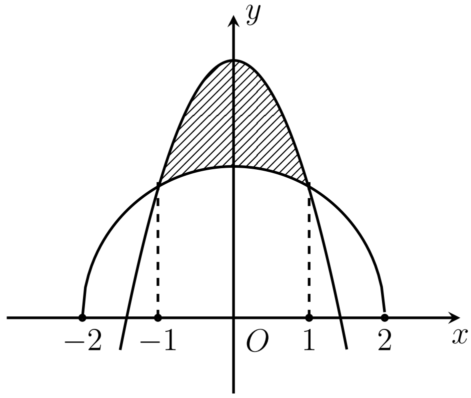
Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$-\sqrt{3}\left(x^2-2\right) = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2 \le 0 \\ 3(x^4-4x^2+4) = 4-x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x^2 \le 2 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Suy ra, diện tích của hình H là



$$S = \int\limits_{-1}^1 \left|-\sqrt{3}\left(x^2-2\right) - \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^1 -\sqrt{3}\left(x^2-2\right)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^1 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

— Xét tích phân $I_1 = \int\limits_{-1}^{1} -\sqrt{3}\left(x^2-2\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$.

— Xét tích phân $I_2 = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x = 2\sin t$ ta được

$$\begin{aligned}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} 2\cos t\sqrt{4\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} 4\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\ &= \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} 2\left(\cos 2t+1\right)\,\mathrm{d}t = \left(\sin 2t + 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

Từ đây ta tính được $S = I_1 - I_2 = \dfrac{10}{\sqrt{3}} - \left(\sqrt{3}+\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{7\sqrt{3}-2\pi}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 765. Cho hàm số $f(x)$ có các đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf'(x) - x^2\mathrm{e}^x = f(x)$ và $f(1) = \mathrm{e}$. Tính tích phân $I = \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}$. **B.** $I = \mathrm{e}$. **C.** $I = \mathrm{e}^2$. **D.** $I = 3\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}$.

Lời giải.

• Với $x = 0$ thì $f(0) = 0$. Với $x \neq 0$ ta có

$xf'(x) - f(x) = x^2\mathrm{e}^x \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{x} - \dfrac{f(x)}{x^2} = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow \displaystyle\int \dfrac{f'(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int \dfrac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C_1$. (1)

• Xét biểu thức nguyên hàm $J = \displaystyle\int \dfrac{f'(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u = \dfrac{1}{x}$, $\mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x$ thì $\mathrm{d}u = \dfrac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, $v = f(x)$. Suy ra, $J = \dfrac{f(x)}{x} + \displaystyle\int \dfrac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x + C_2$. (2)

• Thế (2) vào (1) ta thu được $\dfrac{f(x)}{x} = \mathrm{e}^x + C$. Lại có $f(1) = \mathrm{e}$ nên $C = 0$.

Suy ra, $f(x) = x\mathrm{e}^x$ (thỏa $f(0) = 0$) $\Rightarrow I = \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x\Big|_1^2 - \mathrm{e}^x\Big|_1^2 = \mathrm{e}^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 766. Cho $I = \int\limits_{0}^{1} x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}^2 + b$ (a, b là các số hữu tỷ). Khi đó tổng $a+b$ là

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x\\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\end{cases}$ ta có $\begin{cases}\mathrm{d}u = \mathrm{d}x\\ v = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}.\end{cases}$

Vậy $I = \int\limits_{0}^{1} x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \dfrac{1}{4}$.

Suy ra $\begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a + b = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 767. Cho $I = \int\limits_1^4 \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$. Thực hiện phép đổi biến, đặt $t = \sqrt{x}$, ta được

A. $I = \int\limits_1^4 e^t\, dt$. **B.** $I = 2\int\limits_1^4 e^t\, dt$. **C.** $I = 2\int\limits_1^2 e^t\, dt$. **D.** $I = \int\limits_1^2 e^t\, dt$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \Rightarrow \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\, dt$.

Với $x = 4$ thì $t = 2$, với $x = 1$ thì $t = 1$.

Vậy $I = 2\int\limits_1^2 e^t\, dt$.

Chọn đáp án C □

Câu 768. Họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 + e^x - \cos 3x$ là

A. $\dfrac{1}{3}(x^3 + 3e^x - \sin 3x) + C$. **B.** $\dfrac{1}{3}(x^3 + e^x - \sin 3x) + C$.

C. $\dfrac{1}{3}(x^3 + 3e^x + \sin 3x) + C$. **D.** $\dfrac{1}{3}(x^3 + e^x + \sin 3x) + C$.

Lời giải.

$$\int (x^2 + e^x - \cos 3x)\, dx = \frac{1}{3}x^3 + e^x - \frac{1}{3}\sin 3x + C = \frac{1}{3}\left(x^3 + 3e^x - \sin 3x\right) + C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 769. Cho tích phân $\int\limits_2^3 \dfrac{1}{x^3 + x^2}\, dx = a\ln 3 + b\ln 2 + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = -\dfrac{2}{3}$. **B.** $S = -\dfrac{7}{6}$. **C.** $S = \dfrac{2}{3}$. **D.** $S = \dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{1}{x^3 + x^2} = \dfrac{1}{x^2(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x+1} = \dfrac{(A+C)x^2 + (A+B)x + B}{x^2(x+1)}$.

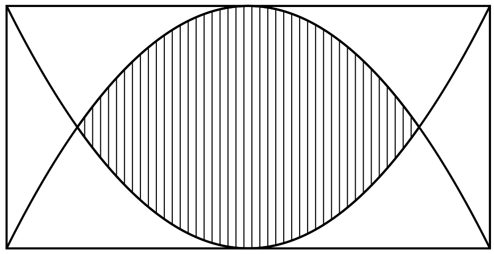
Đồng nhất 2 vế, ta được $\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B = 0 \\ B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$.

Khi đó $\int\limits_2^3 \dfrac{1}{x^3 + x^2}\, dx = \int\limits_2^3 \left(-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x+1}\right) dx = \left(\ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right| - \dfrac{1}{x}\right)\Bigg|_2^3 = -2\ln 3 + 3\ln 2 + \dfrac{1}{6}$.

Suy ra $a = -2$, $b = 3$ và $c = \dfrac{1}{6}$. Vậy $S = -2 + 3 + \dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 770. Một mảnh vườn toán học có dạng hình chữ nhật, chiều dài là 16 m và chiều rộng là 8 m. Các nhà toán học dùng hai đường parabol có đỉnh là trung điểm của một cạnh dài và đi qua 2 điểm đầu của cạnh đối diện, phần mảnh vườn nằm ở miền trong của cả hai parabol (phần gạch sọc như hình vẽ minh họa) được trồng hoa hồng. Biết chi phí để trồng hoa hồng là 45000 đồng/m^2. Hỏi các nhà toán học phải chi bao nhiêu tiền để trồng hoa trên phần mảnh vườn đó (số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)?



A. 3322000 đồng. **B.** 3476000 đồng. **C.** 2715000 đồng. **D.** 2159000 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc là tâm hình chữ nhật, các trục tọa độ song song với các cạnh của hình chữ nhật khi đó các phương trình của parabol là $y = -\dfrac{x^2}{8} + 4$ và $y = \dfrac{x^2}{8} - 4$. Diện tích phần trồng hoa là $S = \displaystyle\int\limits_{-4\sqrt{2}}^{4\sqrt{2}} \left(-\dfrac{x^2}{8} + 4 - \dfrac{x^2}{8} + 4\right) \mathrm{d}x \approx 60,34\ \mathrm{m}^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 771. Biết $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{4\sin x - 2\cos x}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)(\cos 2x + 1)}\,\mathrm{d}x = a + b\ln 2$, với a, b là các số nguyên. Tính $S = a \cdot b$.

A. $S = 10$. **B.** $S = -6$. **C.** $S = 6$. **D.** $S = 4$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\dfrac{4\sin x - 2\cos x}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)(\cos 2x + 1)} &= \dfrac{2\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)\cos^2 x}\\ &= \dfrac{2}{\cos^2 x} - \dfrac{3}{(\sin x + \cos x)\cos x}\\ &= \dfrac{2}{\cos^2 x} - \dfrac{3}{\cos^2 x(\tan x + 1)}.\end{aligned}$$

Suy ra $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{4\sin x - 2\cos x}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)(\cos 2x + 1)}\,\mathrm{d}x = (2\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 3\ln|\tan x + 1|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 - 3\ln 2$.

Vậy $S = a \cdot b = 2 \cdot (-3) = -6$.

Chọn đáp án B □

Câu 772. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x$ là

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3^x + C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3^x \ln 3 + C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3^{x+1}}{x+1} + C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3^x}{\ln 3} + C$.

Lời giải.

Theo công thức nguyên hàm thì $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3^x}{\ln 3} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 773. Viết công thức tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \ln 4$, biết khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ x $(0 \leq x \leq \ln 4)$, ta được thiết diện là một hình vuông có độ dài cạnh là $\sqrt{x\mathrm{e}^x}$.

A. $V = \int\limits_0^{\ln 4} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. **B.** $V = \pi \int\limits_0^{\ln 4} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

C. $V = \pi \int\limits_0^{\ln 4} (x\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $V = \int\limits_0^{\ln 4} \sqrt{x\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo định nghĩa ta có $V = \int\limits_0^{\ln 4} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 774. Tính tích phân $\int\limits_0^1 8^x\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 8$. **B.** $I = \dfrac{8}{3\ln 2}$. **C.** $I = \dfrac{7}{3\ln 2}$. **D.** $I = 7$.

Lời giải.

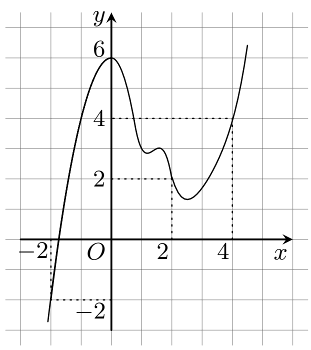
$\int\limits_0^1 8^x\,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{8^x}{\ln 8}\right|_0^1 = \dfrac{7}{3\ln 2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 775.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Khi đó giá trị của biểu thức $\int_0^4 f'(x-2)dx + \int_0^2 f'(x+2)dx$ bằng bao nhiêu?

A. 6. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 10.



Lời giải.

Xét tích phân $A = \int_0^4 f'(x-2)dx$.

Đặt $t = x - 2 \Rightarrow dt = dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \to t = -2 \\ x = 4 \to t = 2 \end{cases}$

Do đó $A = \int_{-2}^2 f'(t)dt = \int_{-2}^2 f'(x)dx = f(2) - f(-2) = 4$.

Tương tự $B = \int_2^4 f'(t)dt = \int_2^4 f'(x)dx = f(4) - f(2) = 2$.

Vậy $I = A + B = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 776. Cho hàm số $y = f(x) > 0$, $\forall x \geq 0$, thỏa mãn $\begin{cases} f''(x) \cdot f(x) - 2[f'(x)]^2 + xf^3(x) = 0, \\ f'(0) = 0; f(0) = 1. \end{cases}$

Tính $f(1)$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{6}{7}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

$$f''(x)\cdot f(x)-2[f'(x)]^2+xf^3(x)=0\Leftrightarrow f''(x)\cdot f^2(x)-2[f'(x)]^2f(x)=-xf^4(x)$$
$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)\cdot f^2(x)-2[f'(x)]^2\cdot f(x)}{f^4(x)}=-x\Leftrightarrow\left[\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right]'=-x$$
$$\Leftrightarrow \int\left[\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right]'\mathrm{d}x=\int(-x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=-\frac{x^2}{2}+C.$$

Với $f'(0)=0$; $f(0)=1$ suy ra $C=0$ và

$$\int\limits_0^1\frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}(f(x))}{f^2(x)}=-\frac{x^3}{6}\Big|_0^1\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}\Big|_0^1=-\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{f(0)}-\frac{1}{f(1)}=-\frac{1}{6}$$

Suy ra $1-\dfrac{1}{f(1)}=-\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(1)}=\dfrac{7}{6}\Leftrightarrow f(1)=\dfrac{6}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 777. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. $2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}-1}{3}$. **C.** $2\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}$. **D.** $3\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\int\limits_0^1\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}(2x+1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)=\frac{3\sqrt{3}-1}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 778. Cho $\displaystyle\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=1$ và $\displaystyle\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=-2$. Giá trị của $\displaystyle\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải.

$$\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=1+(-2)=-1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 779. Biết $\displaystyle\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\left(\frac{1}{\ln^2 x}-\frac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x=\frac{a\cdot\mathrm{e}^2+b\cdot\mathrm{e}+c}{2}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a^2+b^2+c^2$ bằng bao nhiêu?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải.

$$\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{\ln x}\Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}+\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{\ln^2 x}\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{\ln^2 x}\,\mathrm{d}x-\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x=-\frac{x}{\ln x}\Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}=\frac{-\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}}{2}.$$

Suy ra $a=-1$, $b=2$, $c=0$ nên $a^2+b^2+c^2=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 780. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x$, $y = x^2$, $y = 1$ trên miền $x \geq 0$, $y \leq 1$ bằng

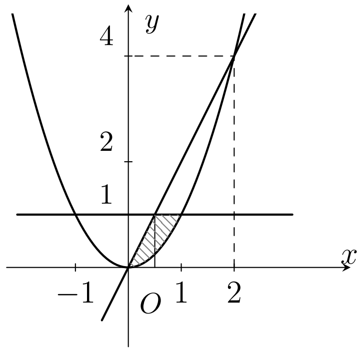
A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5}{12}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} (2x - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1 - x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left(x - x^2\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{5}{24} + \frac{5}{24} = \frac{5}{12}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 781. Cho $\displaystyle\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = m\ln 2 + n\ln 3 + p\ln 5$, với m, n, p là các số hữu tỉ. Tính $S = m^2 + n + p^2$.

A. $S = 6$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 3$. **D.** $S = 5$.

Lời giải.

$$\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = 2\ln 2 + \ln 3 - \ln 5.$$

Suy ra $m = 2$, $n = 1$, $p = -1$ nên $S = m^2 + n + p^2 = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 782. Hàm số $y = \ln x + \frac{1}{x}$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $y = \ln x + 1$. **B.** $y = \frac{1}{2}\ln^2 x - \frac{1}{x^2}$. **C.** $y = \frac{1}{2}\ln^2 x - \frac{1}{x}$. **D.** $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

Lời giải.

$y' = \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)' = (\ln x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

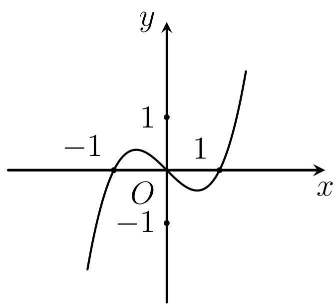
Chọn đáp án D □

Câu 783.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2 - 1)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty; -\sqrt{2})$. **B.** $(-1; 1)$.

C. $(1; \sqrt{2})$. **D.** $(0; 1)$.



Lời giải.

Hàm số $y = f\left(x^2 - 1\right)$ có $y' = 2xf'(x^2 - 1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2 - 1\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 1 = -1 \\ x^2 - 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

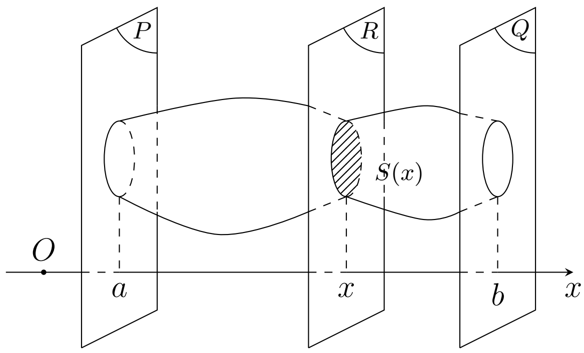
x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(0; 1)$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 784.

Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Một mặt phẳng (R) tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x, $(a \leq x \leq b)$ cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$, với $y = S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$. Thể tích V của vật thể đó được tính theo công thức



A. $V = \displaystyle\int_a^b S^2(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $V = \pi\displaystyle\int_a^b S^2(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $V = \pi\displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $V = \displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo định nghĩa tích phân, thể tích V của vật thể đó được tính theo công thức $V = \displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 785. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\sqrt{x} + x^{2018}$ là

A. $\sqrt{x} + \dfrac{x^{2019}}{673} + C$.

B. $2\sqrt{x^3} + \dfrac{x^{2019}}{2019} + C$.

C. $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{x^{2019}}{673} + C$.

D. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 6054x^{2017} + C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \left(3\sqrt{x}+x^{2018}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= 3\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x+\int x^{2018}\,\mathrm{d}x\\ &= 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{2019}}{2019}+C\\ &= 2\sqrt{x^3}+\frac{x^{2019}}{2019}+C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 786. Tích phân $\int\limits_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\,\mathrm{d}x$ là

A. $1-\sqrt{3}$. **B**. $\sqrt{3}-1$. **C**. $\sqrt{3}+1$. **D**. $-\sqrt{3}-1$.

Lời giải.

Xét tích phân $I=\int\limits_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\sqrt{1-2x}\Rightarrow u^2=1-2x\Rightarrow\ \mathrm{d}x=-u\,\mathrm{d}u$.

Đổi cận: $x=-1\Rightarrow u=\sqrt{3}$; $x=0\Rightarrow u=1$.

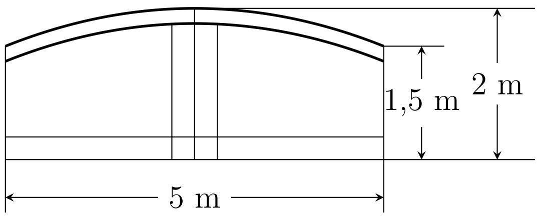
Do đó: $I=-\int\limits_{\sqrt{3}}^{1}\frac{1}{u}\cdot u\,\mathrm{d}u=\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\ \mathrm{d}u=u\big|_1^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 787.

Ba Tí muốn làm cửa sắt được thiết kế như hình bên. Vòm cổng có hình dạng một parabol. Giá $1\mathrm{m}^2$ cửa sắt là 660000 đồng. Cửa sắt có giá (nghìn đồng) là

A. 6500. **B**. $\frac{55}{6}\cdot 10^3$. **C**. 5600. **D**. 6050.

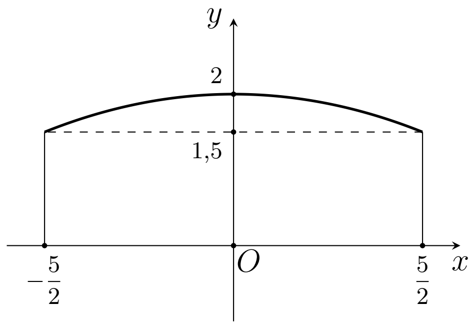


Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó, vòm cửa là một parabol có phương trình dạng $y=ax^2+2$.

Ta có $1{,}5=a\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2+2\Leftrightarrow a=-\frac{2}{25}$.

Như vậy $y=-\frac{2}{25}x^2+2$.



Diện tích của cửa sắt là

$$S=\int\limits_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}}\left(-\frac{2}{25}x^2+2\right)\,\mathrm{d}x=\frac{55}{6}\ \left(\mathrm{m}^2\right).$$

Vậy, giá tiền cửa sắt là

$$\frac{55}{6}\cdot 660000=6050000\ \left(\text{đồng}\right)=6050\ \left(\text{nghìn đồng}\right).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 788. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 12$, $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -12. **B.** 12. **C.** 6. **D.** -6.

Lời giải.

Xét tích phân $I = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 2\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -2\sin x\,\mathrm{d}x$ hay $\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$.
Đổi cận: $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = 1$, $x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t = -1$.
Từ đó:

$$I = -\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 789. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;\pi]\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \tan x, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right)\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $f(0) = 0$, $f(\pi) = 1$. Tỉ số giữa $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. $2\left(\log_2 \mathrm{e} + 1\right)$. **B.** 2. **C.** $\frac{2(1+\ln 2)}{2+\ln 2}$. **D.** $2\left(1 - \log_2 \mathrm{e}\right)$.

Lời giải.

— Trên nửa khoảng $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, ta có:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) &= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\left.\ln\cos x\right|_{0}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\left(\ln\cos\frac{\pi}{4} - \ln\cos 0\right) \\ &= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

Suy ra $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 + f(0) = \frac{1}{2}\ln 2 \quad (1)$.

— Trên nửa khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$, ta có:

$$\begin{aligned} f(\pi)-f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \tan x\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \\ &= -\left(\ln|\cos\pi| - \ln\left|\cos\frac{2\pi}{3}\right|\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2. \end{aligned}$$

Suy ra $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = f(\pi)+\ln 2 = 1+\ln 2 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{f\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{f\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{1+\ln 2}{\frac{1}{2}\ln 2} = 2\left(\dfrac{1}{\ln 2}+1\right) = 2\left(\log_2 \mathrm{e}+1\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 790. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f'(x) = \tan x\cdot f(x)$, $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $f(0)=1$. Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1+\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\ln\frac{1+\pi}{4}$. **D.** 0.

Lời giải.

Từ $f'(x)=\tan x\cdot f(x)$, $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ và $y=f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, nên trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} = \tan x \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \tan x\,\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \quad \ln f(x) = -\ln(\cos x)+C. \end{aligned}$$

Mặt khác $f(0)=1$ nên $\ln f(0) = -\ln(\cos 0)+C \Rightarrow C=0$.

Như vậy $\ln f(x) = -\ln(\cos x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Từ đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 791. Cho hàm số $f(x)=2017^x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2017^x}{\ln 2018}+C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2017^x}{\ln 2017}+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2017^x\ln 2017+C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2017^x}{2017}+C$.

Lời giải.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2017^x}{\ln 2017} + C.$$

Chọn đáp án B □

Câu 792. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ và $f(0) - f(2) = 2$. Tính $\int\limits_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 2. **B**. -2. **C**. $\frac{1}{2}$. **D**. 4.

Lời giải.

$$\int\limits_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(2) - f(0) = -2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 793. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(2x)\,\mathrm{d}x = 2F(2x) + C$. **B**. $\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}F(2x) + C$.

C. $\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}F(x) + C$. **D**. $\int f(2x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

Lời giải.

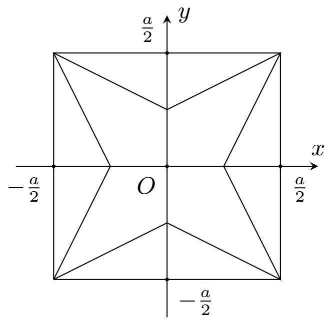
$$\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f(2x)\,\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}F(2x) + C.$$

Chọn đáp án B □

Câu 794.

Bên trong hình vuông cạnh a, dựng hình sao bốn cánh đều như hình vẽ (các kích thước cần thiết cho như ở trong hình). Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục Ox.

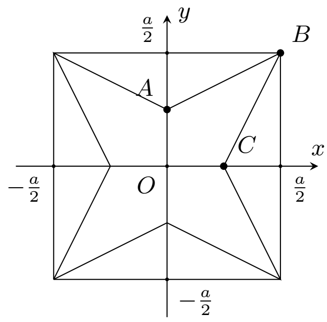
A. $V = \frac{5\pi a^3}{24}$. **B**. $V = \frac{5\pi a^3}{48}$. **C**. $V = \frac{5\pi a^3}{96}$. **D**. $V = \frac{7\pi a^3}{24}$.



Lời giải.

Ta có $AB\colon y = \frac{1}{2}x + \frac{a}{4}$, $BC\colon y = 2x - \frac{a}{2}$.

Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao quanh trục Ox là



$$\begin{aligned} V &= 2\left[\pi\int\limits_0^{\frac{a}{2}}\left(\frac{1}{2}x + \frac{a}{4}\right)^2\mathrm{d}x - \pi\int\limits_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}}\left(2x - \frac{a}{2}\right)^2\mathrm{d}x\right] \\ &= 2\pi\left(\frac{7a^3}{96} - \frac{19a^3}{48}\right) = \frac{5\pi a^3}{48}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 795. Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f(2) = 1$ và $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Khi đó

$\int\limits_0^1 xf'(2x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B**. $\frac{1}{4}$. **C**. $-\frac{1}{4}$. **D**. $\frac{5}{4}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'(2x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2}f(2x). \end{cases}$

Do đó $\int\limits_0^1 xf'(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}f(2x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 796. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f(1) = 2017$ và $\int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = 1$, giá trị của $f(2)$ bằng

A. 2017. **B**. 2019. **C**. 2018. **D**. 2016.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow f(x)\Big|_1^2 = 1 \Leftrightarrow f(2) - f(1) = 1 \Leftrightarrow f(2) = 1 + f(1) \Leftrightarrow f(2) = 2018.$$

Chọn đáp án C □

Câu 797. Tính $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x$.

A. $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = -\sin 2x + C$. **B**. $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

C. $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \sin 2x + C$. **D**. $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Lời giải.

Ta có

$$\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \int \cos 2x\frac{\mathrm{d}(2x)}{2} = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

Chọn đáp án B □

Câu 798. Biết rằng $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \sin 2x}{1 + \sin x}\,\mathrm{d}x = a + \frac{\pi}{b}$, với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 0. **B**. 4. **C**. -4. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \sin 2x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2 x \sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(1-\sin^2 x)\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1-\sin x)\sin x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= -2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{1}{2}\sin 2x - x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 + \frac{\pi}{-2}.\end{aligned}$$

Suy ra $a=2$, $b=-2$. Vậy $a+b=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 799. Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ (với $a<b$). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ có công thức là

A. $\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

B. $\left|\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$.

C. $\int\limits_b^a |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

D. $\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (với $a<b$) là $\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 800. Biết $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$ với a, b là các số hữu tỉ. Hỏi $a+b$ bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

Khi đó

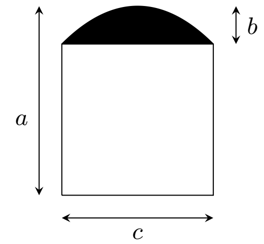
$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \left(\ln|x+1| - \ln|x+2|\right)\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 \\ &= 2\ln 2 - \ln 3.\end{aligned}$$

Vậy $a=2$, $b=-1$. Do đó $a+b=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 801.

Nhà bạn Minh cần làm một cái cửa có dạng như hình vẽ, nửa dưới là hình vuông, phần phía trên (phần tô đen) là một Parabol. Biết các kích thước $a = 2{,}5$ m, $b = 0{,}5$ m, $c = 2$ m. Biết số tiền để làm 1 m^2 cửa là 1 triệu đồng. Số tiền để làm cửa là

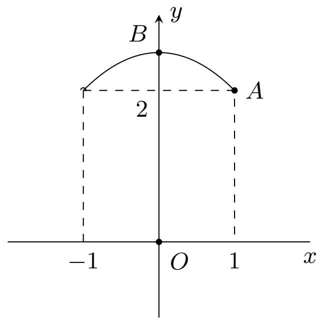


A. $\dfrac{14}{3}$ triệu đồng. **B.** $\dfrac{13}{3}$ triệu đồng.

C. $\dfrac{63}{17}$ triệu đồng. **D.** $\dfrac{17}{3}$ triệu đồng.

Lời giải.

Gọi $(P)\colon y = ax^2+bx+c$ là Parabol đi qua $A(1;2)$ và có đỉnh là $B(0;2{,}5)$.



Khi đó ta có $\begin{cases} a+b+c=2 \\ -\dfrac{b}{2a}=0 \\ c=2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-0{,}5 \\ b=0 \\ c=2{,}5. \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y = -0{,}5x^2+2{,}5$.

Diện tích cái cửa là $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} (-0{,}5x^2+2{,}5)\,\mathrm{d}x = \frac{14}{3}\text{ m}^2$.

Do đó, số tiền để làm cửa là $\dfrac{14}{3}$ triệu đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 802. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$f(1)=0 \text{ và } \int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}.$$

Tính giá trị của $I = \displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$. **B.** $I = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$. **C.** $I = \mathrm{e}-2$. **D.** $I = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{\mathrm{e}^2-1}{4} = \int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow 2\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}.$$

Ta lại có $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ và $\displaystyle\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$.

Khi đó

$$\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 \left[f'(x)+x\mathrm{e}^x\right]^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Vì $[f'(x)+x\mathrm{e}^x]^2 \geq 0$, $\forall x \in [0;1]$ và $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên $\int\limits_0^1 [f'(x)+x\mathrm{e}^x]^2 \,\mathrm{d}x \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi

$$f'(x)+x\mathrm{e}^x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x\mathrm{e}^x \Leftrightarrow f(x) = (1-x)\mathrm{e}^x + C.$$

Lại có $f(1)=0$ nên $C=0$.
Vậy $f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x$.
Do đó

$$\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2-x)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = \mathrm{e}-2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 803. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ là

A. $I=2+\ln 2$. **B.** $I=1-\ln 2$. **C.** $I=2-\ln 2$. **D.** $I=1+\ln 2$.

Lời giải.

$I=\int\limits_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = (x-\ln|x+1|)\Big|_0^1 = 1-\ln 2.$

Chọn đáp án B □

Câu 804. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^{2x+1}$.

A. $(2x+1)3^{2x}+C$. **B.** $\frac{3^{2x+1}}{\ln 3}+C$. **C.** $3^{2x+1}\ln 3 + C$. **D.** $\frac{3^{2x+1}}{\ln 9}+C$.

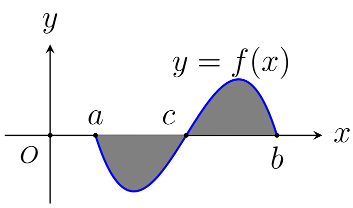
Lời giải.

Áp dụng công thức $\int a^{bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{bx+c}}{b\ln a}+C$ ta được $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3^{2x+1}}{2\ln 3}+C = \frac{3^{2x+1}}{\ln 9}+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 805.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, $x=a$, $x=b$. Khi đó S được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\left|\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Phần đồ thị của $f(x)$ khi $a<x<c$ nằm phía dưới trục hoành nên ta có $S=-\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 806. Biết $I = \displaystyle\int_1^2 (3x^2 + \ln x)\,\mathrm{d}x = a + b\ln 2$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b$.

A. $S = 4$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 8$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 (3x^2 + \ln x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 3x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$.

— $\displaystyle\int_1^2 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3\Big|_1^2 = 7$.

— $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$.

Suy ra $I = 7 + 2\ln 2 - 1 = 6 + 2\ln 2$.

Vậy $S = a + b = 6 + 2 = 8$.

Chọn đáp án D □

Câu 807. Biết $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2} + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $P = a + b + c$.

A. $P = \dfrac{13}{2}$. **B.** $P = \dfrac{16}{3}$. **C.** $P = 5$. **D.** $P = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = \int_1^3 \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3\right]\Bigg|_1^3$.

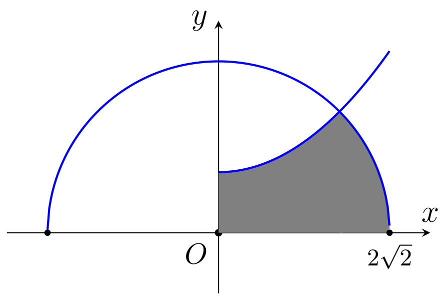
$$= \frac{16}{3} + 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{14}{3}.$$

Vậy $P = a + b + c = 2 - \dfrac{4}{3} + \dfrac{14}{3} = \dfrac{16}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 808.

Cho $(\mathscr{H})$ là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \dfrac{1}{4}x^2 + 1$ (với $0 \le x \le 2\sqrt{2}$), nửa đường tròn $y = \sqrt{8 - x^2}$ và trục hoành, trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của hình $(\mathscr{H})$ bằng



A. $\dfrac{3\pi + 4}{6}$. **B.** $\dfrac{2\pi + 2}{3}$. **C.** $\dfrac{3\pi + 2}{3}$. **D.** $\dfrac{3\pi + 14}{6}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của parapol $y = \dfrac{1}{4}x^2 + 1$ và nửa đường tròn $y = \sqrt{8 - x^2}$ là

$$\sqrt{8 - x^2} = \frac{1}{4}x^2 + 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

Từ đồ thị, ta có diện tích hình phẳng $(\mathscr{H})$ là

$$S = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right)\mathrm{d}x + \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

— $S_1 = \int\limits_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{12} + x\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$.

— $S_2 = \int\limits_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2}\, \mathrm{d}x$.

Đặt $x = 2\sqrt{2}\sin t \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right) \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\cos t\, \mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$; $x = 2\sqrt{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Suy ra $S_2 = 2\sqrt{2} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8 - 8\sin^2 t} \cos t\, \mathrm{d}t = 8 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, \mathrm{d}t = 4 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, \mathrm{d}t$

$$= 4\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2.$$

Vậy $S = S_1 + S_2 = \frac{8}{3} + \pi - 2 = \frac{3\pi + 2}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 809. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $2^{f(x)} + f(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết rằng tích phân $I = \int\limits_0^2 f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{a}{2} + \frac{b}{\ln 2}$ với a, $b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a + b$.

A. $P = 4$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = 3$.

Lời giải.

Thay $x = 0$, $x = 2$ vào biểu thức $2^{f(x)} + f(x) = x + 1$, ta được

— $2^{f(0)} + f(0) = 1 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

— $2^{f(2)} + f(2) = 3 \Leftrightarrow f(2) = 1$.

Đặt $t = f(x)$, ta có $2^t + t = x + 1 \Rightarrow \mathrm{d}x = (2^t \ln 2 + 1)\, \mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 2 \Rightarrow t = 1$.

Vậy $I = \int\limits_0^1 t(2^t \ln 2 + 1)\, \mathrm{d}t = \left(t \cdot 2^t - \frac{1}{\ln 2}2^t + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{\ln 2}$.

Vậy $P = a + b = 5 - 1 = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 810. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Tính tích phân $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{3}{2}$. **B.** $I = \frac{1}{2}$. **C.** $I = \frac{5}{2}$. **D.** $I = \frac{7}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = \frac{1}{x}$, thay vào biểu thức $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$, ta được $f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) = \frac{3}{t}$ hay $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x}$.

Suy ra $f(x) = \frac{2}{x} - x$.

Vậy $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \dfrac{f(x)}{x} \mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\dfrac{2}{x^2} - 1 \right) \mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 811. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3x+1}$ trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $F(x) = \ln(-3x-1) + C$.

B. $F(x) = \dfrac{1}{3}\ln(3x+1) + C$.

C. $F(x) = \dfrac{1}{3}\ln(-3x-1) + C$.

D. $F(x) = \ln|3x+1| + C$.

Lời giải.

Vì $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right)$ nên ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C = \frac{1}{3}\ln(-3x-1) + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 812. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x = 0, x = \pi, y = 0$ và $y = -\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

A. $V = \pi \int\limits_0^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$.

B. $V = \pi \int\limits_0^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

C. $V = \int\limits_0^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

D. $V = \pi \left| \int\limits_0^{\pi} (-\sin x)\,\mathrm{d}x \right|$.

Lời giải.

Ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int\limits_0^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 813. Tích phân $\int\limits_0^1 3^{2x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{27}{\ln 9}$.

B. $\dfrac{9}{\ln 9}$.

C. $\dfrac{4}{\ln 3}$.

D. $\dfrac{12}{\ln 3}$.

Lời giải.

$$\int\limits_0^1 3^{2x+1}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{3^{2x+1}}{2\ln 3}\right|_0^1 = \frac{12}{\ln 3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 814. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Giá trị của $\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{f(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 6.

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_{-2}^{2}\dfrac{f(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\dfrac{f(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}\dfrac{f(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$; $x=-2\Rightarrow t=2; x=0\Rightarrow t=0$

$\Rightarrow \int\limits_{-2}^{0}\dfrac{f(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{2}^{0}\dfrac{f(-t)}{3^{-t}+1}(-\mathrm{d}t)=\int\limits_{0}^{2}\dfrac{3^tf(-t)}{3^t+1}\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{2}\dfrac{3^tf(t)}{3^t+1}\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{2}\dfrac{3^xf(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x.$

$\Rightarrow I=\int\limits_{0}^{2}\dfrac{3^xf(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}\dfrac{f(x)}{3^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x=3.$

Chọn đáp án A □

Câu 815. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2)+F(1)=0$. Giá trị của $F(-1)+F(2)$ bằng

A. $\dfrac{7}{3}\ln 2$. **B.** $\dfrac{2}{3}\ln 2+\dfrac{3}{6}\ln 5$. **C.** $\dfrac{10}{3}\ln 2-\dfrac{5}{6}\ln 5$. **D.** 0.

Lời giải.

$F(x)=\displaystyle\int\dfrac{\ln(x+3)}{x^2}\,\mathrm{d}x,\ (x>-3).$

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+3)\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x\\ v=-\dfrac{1}{x}\end{cases}.$

$$\begin{aligned}F(x)&=-\frac{1}{x}\ln(x+3)+\int\frac{1}{x(x+3)}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{x}\ln(x+3)+\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{x}\ln(x+3)+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C.\end{aligned}$$

Suy ra

$$F(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln(x+3)+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x}{x+3}+C_1\text{ khi } x>0\\ -\dfrac{1}{x}\ln(x+3)+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{-x}{x+3}+C_2\text{ khi } -3<x<0.\end{cases}$$

Khi đó

$F(-2)=\dfrac{1}{3}\ln 2+C_2.$

$F(1)=-\ln 4+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{4}+C_1.$

$F(-2)+F(1)=0\Rightarrow C_1+C_2=\dfrac{7}{3}\ln 2.$

$F(-1)=\ln 2+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}+C_2.$

$F(2)=-\dfrac{1}{2}\ln 5+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{5}+C_1.$

$\Rightarrow F(-1)+F(2)=\ln 2+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln 5+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{5}+C_1+C_2=\dfrac{10}{3}\ln 2-\dfrac{5}{6}\ln 5.$

Chọn đáp án C □

Câu 816. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0$ và $f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}xf'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\cdot\cos x\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Suy ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,\mathrm{d}x\,(*)\,.$$

Đặt $t=\dfrac{\pi}{2}-x\Rightarrow\mathrm{d}t=-\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$; $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$.

Khi đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\,\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Từ $(*)$ ta có: $2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

Do đó $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}xf'(x)\,\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 817. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin 2x$, biết $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

A. $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{\pi}{6}$. **B.** $F(x)=\cos^2 x-\dfrac{1}{4}$.

C. $F(x)=\sin^2 x-\dfrac{1}{4}$. **D.** $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$. Từ $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$, suy ra $-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{3}+C=0\Leftrightarrow C=\dfrac{1}{4}$.

Khi đó $F(x)=-\dfrac{1}{2}(1-2\sin^2 x)+\dfrac{1}{4}=\sin^2 x-\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 818. Cho hình phẳng $(\mathscr{D})$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1,x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay $(\mathscr{D})$ quanh trục hoành.

A. $\dfrac{3\pi}{2}$. **B.** 3π. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{2\pi}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành là $V=\pi\displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}x^2\Big|_1^2=\frac{3\pi}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 819. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$; $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 8$. **B.** $I = 12$. **C.** $I = 36$. **D.** $I = 4$.

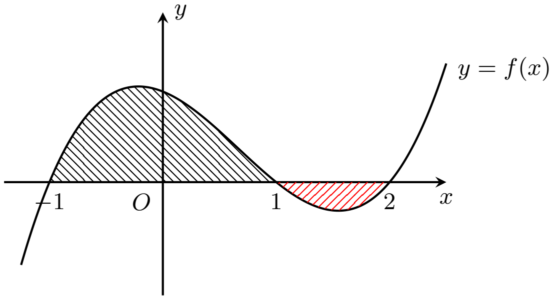
Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + 6 = 8$.

Chọn đáp án A □

Câu 820.

Gọi S là diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Công thức tính S là



A. $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S = -\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ suy ra $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 821. Cho hàm số $f(x) = 4x^3 + 2x + 1$. Tìm $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 12x^4 + 2x^2 + x + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 12x^2 + 2$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^4 + x^2 + x + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 12x^2 + 2 + C$.

Lời giải.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (4x^3 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x = x^4 + x^2 + x + C$. Ta có

Chọn đáp án C □

Câu 822. Cho phương trình: $3^x = \sqrt{a \cdot 3^x \cos(\pi x) - 9}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực?

A. 1. **B.** 2018. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $3^x = \sqrt{a \cdot 3^x \cos(\pi x) - 9} \Leftrightarrow 9^x + 9 = a \cdot 3^x \cdot \cos(\pi x) \Leftrightarrow 3^x + 3^{2-x} = a \cdot \cos(\pi x) \quad (1)$.

Điều kiện cần: Nhận thấy nếu x_0 là một nghiệm của phương trình đã cho thì $2 - x_0$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho. Do đó, để phương trình có đúng một nghiệm thực thì $x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$.

Thay vào (1) ta tìm được $a = -6 \in [-2018; 2018]$.
Điều kiện đủ: Với $a = -6$, phương trình (1) trở thành: $3^x + 3^{2-x} = -6\cos(\pi x)$.
Sử dụng Cauchy ta có: $3^x + 3^{2-x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{2-x}} = 6 \geq -6\cos(\pi x)$.
Dấu bằng xảy ra khi $\left[\begin{array}{l} x = 2 - x \\ \cos(\pi x) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$.
Vậy có đúng một giá trị của tham số thực $a \in [-2018; 2018]$ để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực.
Chọn đáp án A □

Câu 823. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ thỏa mãn $f(1) = -2$ và $x^2f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Tính $I = \displaystyle\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $-\dfrac{\ln 2}{2} - 1$. **B.** $-\ln 2 - \dfrac{1}{2}$. **C.** $-\ln 2 - \dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.
Từ giả thiết ta có $(xf(x) + 1)^2 = f(x) + xf'(x)$.
Đặt $u = xf(x) + 1 \Rightarrow u^2 = u' \Rightarrow \dfrac{u'}{u^2} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{u'}{u^2}\mathrm{d}x = x + C \Rightarrow \dfrac{-1}{u} = x + C$.
Do đó $xf(x) = \dfrac{-1}{x+C} - 1$, mà $f(1) = -2 \Rightarrow C = 0$.
Vậy $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} \Rightarrow \displaystyle\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -\ln 2 - \dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 824. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

B. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int\limits_a^b k\,\mathrm{d}x = k(a-b),\ \forall k \in \mathbb{R}$.

D. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall c \in (a; b)$.

Lời giải.
Ta có $\displaystyle\int\limits_a^b k\,\mathrm{d}x = kx\Big|_a^b = kb - ka = k(b-a)$.
Chọn đáp án C □

Câu 825. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ xác định trên K. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\left(x\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f'(x)$. **B.** $\left(\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$.

C. $\left(\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = F'(x)$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

Lời giải.

Ta có: $F'(x) = f(x)$.

Suy ra $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x) = F'(x)$ và $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 826. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$ quanh trục hoành là

A. $V = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$. **B.** $V = \dfrac{\pi \ln 2}{2}$. **C.** $V = \dfrac{\pi^2}{4}$. **D.** $V = \dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\pi \ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi \ln 2}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 827. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-2)^2 - 1$ và trục hoành bằng

A. $\dfrac{25}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Xét phương trình $(x-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng $S = \displaystyle\int_1^3 \left|(x-2)^2 - 1\right|\,\mathrm{d}x = \left|\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Big|_1^3\right| = \frac{4}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 828. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-3)^2$ thỏa mãn $F(0) = \dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $\log_2[3F(1) - 2F(2)]$ bằng

A. 10. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có:

$$3F(1) - 2F(2) = 3[F(1) - F(2)] + F(2) - F(0) + F(0) = 3\int_2^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3} = 4.$$

$\Rightarrow \log_2[3F(1) - 2F(2)] = \log_2 4 = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 829. Một chiếc ô tô đang chuyển động với vận tốc $v(t) = 2 + \dfrac{t^2 - 4}{t + 4}$ (m/s). Quãng đường ô tô đi được từ thời điểm $t = 5\,\mathrm{s}$ đến thời điểm $t = 10\,\mathrm{s}$ là

A. 12,23 m. **B.** 32,8 m. **C.** 45,03 m. **D.** 10,24 m.

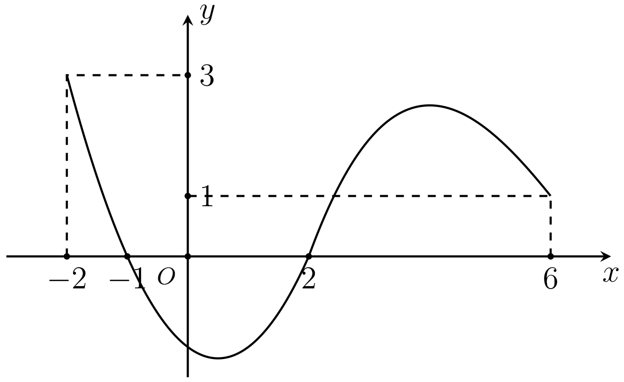
Lời giải.

Quãng đường ô tô đi được là $s = \displaystyle\int_5^{10} \left(2 + \frac{t^2 - 4}{t + 4}\right)\,\mathrm{d}t = 32{,}8\,\mathrm{m}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 830.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình bên dưới. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $f(-2) < f(-1) < f(2) < f(6)$.
B. $f(2) < f(-2) < f(-1) < f(6)$.
C. $f(-2) < f(2) < f(-1) < f(6)$.
D. $f(6) < f(2) < f(-2) < f(-1)$.

Lời giải.

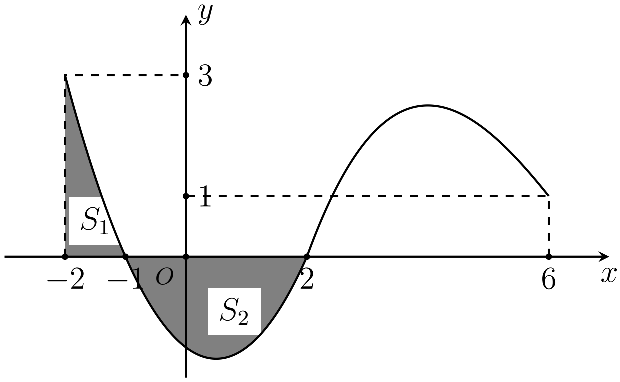
Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như sau:

x	-2		-1		2		6
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-2)$	↗	$f(-1)$	↘	$f(2)$	↗	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(-2) < f(-1) \\ f(2) < f(-1) \\ f(2) < f(6). \end{cases}$

Chỉ cần so sánh $f(-2)$ và $f(2)$ nữa là xong.

Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được tô đậm như trên hình vẽ.



Ta có:

$S_1 = \int\limits_{-2}^{-1} |f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{-1} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(-1) - f(-2)$.

$S_2 = \int\limits_{-1}^{2} |f'(x)|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-1}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(-1) - f(2)$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $S_1 < S_2$ nên $f(-1) - f(-2) < f(-1) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) > f(2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 831. Biết $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2\,\mathrm{d}x = x + \dfrac{a}{b}\cos 4x + C$, với a, b là các số nguyên dương, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 5. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 \, dx = \int (1 - 2\sin 2x \cos 2x) \, dx = \int (1 - \sin 4x) \, dx = x + \frac{1}{4}\cos 4x + C$.

Mà $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 \, dx = x + \frac{a}{b}\cos 4x + C$ nên $\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 832. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1$ thỏa mãn $F(0) = 0$ và $F(3) = 7$. Khi đó, giá trị của tham số m bằng

A. -2. **B**. 3. **C**. -3. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1\right) dx = \sqrt{x+1} + (m-1)x + C$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(3) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C + 1 = 0 \\ C + 3m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -1 \\ m = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 833. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4^x + \sin^2 x$ là

A. $\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$. **B**. $4^x \ln x + \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

C. $4^x \ln x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$. **D**. $\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int f(x)\, dx = \int (4^x + \sin^2 x)\, dx = \int \left(4^x + \frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx$$
$$= \int \left(4^x + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Chọn đáp án D □

Câu 834. Cho M, N là các số thực, xét hàm số $f(x) = M \sin \pi x + N \cos \pi x$ thỏa mãn $f(1) = 3$ và $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx = -\frac{1}{\pi}$. Giá trị của $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ bằng

A. $\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. **B**. $-\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. **C**. $-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **D**. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(1) = 3 \Leftrightarrow M \sin \pi + N \cos \pi = 3 \Leftrightarrow N = -3$.

Mặt khác $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (M \sin \pi x - 3\cos \pi x)\, dx = -\frac{1}{\pi}$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{M}{\pi}\cos \pi x - \frac{3}{\pi}\sin \pi x\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{3}{\pi} + \frac{M}{\pi} = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow M = 2$.

Vậy $f(x) = 2\sin \pi x - 3\cos \pi x$ nên $f'(x) = 2\pi \cos \pi x + 3\pi \sin \pi x \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 835. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_3^5 f(x)\, dx = a$, $(a \in \mathbb{R})$. Tích phân $I =$

$\int\limits_1^2 f(2x+1)\,\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. $I=\frac{1}{2}a+1$. **B.** $I=2a+1$. **C.** $I=2a$. **D.** $I=\frac{1}{2}a$.

Lời giải.

Đặt $t=2x+1\Rightarrow\ \mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=3$; $x=2\Rightarrow t=5$.

$\Rightarrow I=\int\limits_3^5\frac{1}{2}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a.$

Chọn đáp án D ☐

Câu 836. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+x-2$ và trục hoành bằng

A. 9. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2+x-2$ và trục hoành là nghiệm của phương trình $x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=1\\&x=-2.\end{aligned}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int\limits_{-2}^1\left|x^2+x-2\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-2}^1(x^2+x-2)\,\mathrm{d}x=\frac{9}{2}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 837. Goi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0$, $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là

A. $\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^2-1)$. **B.** $\pi(\mathrm{e}^2+1)$. **C.** $\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^2+1)$. **D.** $\pi(\mathrm{e}^2-1)$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay $V=\pi\int\limits_0^1\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^2-1)$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 838. Cho $\int\limits_2^3\frac{x+2}{2x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 3+3\ln 2$ $(a,b\in\mathbb{Q})$. Tính $P=2a-b$.

A. $P=1$. **B.** $P=7$. **C.** $P=-\frac{15}{2}$. **D.** $P=\frac{15}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có }\int\limits_2^3\frac{x+2}{2x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\frac{x+2}{(x-1)(2x-1)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\left(\frac{3}{x-1}-\frac{5}{2x-1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(3\ln|x-1|-\frac{5}{2}\ln|2x-1|\right)\Big|_2^3=-\frac{5}{2}\ln 5+\frac{5}{2}\ln 3+3\ln 2.$$

Suy ra $a=-\frac{5}{2}$ và $b=\frac{5}{2}$. Từ đó $P=2a-b=-\frac{15}{2}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 839. Một vật chuyển động có phương trình $v(t)=t^3-3t+1$ m/s. Quãng đường vật đi được kể từ khi bắt đầu chuyển động đến khi gia tốc bằng 24 $\mathrm{m/s^2}$ là

A. $\dfrac{15}{4}$ m. **B.** 20 m. **C.** 19 m. **D.** $\dfrac{39}{4}$ m.

Lời giải.

Gia tốc của chuyển động là $a(t) = v'(t) = 3t^2 - 3$.

Tại thời điểm vật có gia tốc 24 m/s^2 thì $24 = 3t^2 - 3 \Leftrightarrow t = 3$.

Quãng đường vật đi được kể từ khi bắt đầu chuyển động đến khi gia tốc bằng 24 m/s^2 là quãng đường vật đi từ vị trí $t = 0$ đến vị trí $t = 3$.

Vậy $S(3) = \displaystyle\int_0^3 (t^3 - 3t + 1)\,\mathrm{d}t = \dfrac{39}{4}$ m.

Chọn đáp án D □

Câu 840. Cho a là số thực thỏa mãn $|a| < 2$ và $\displaystyle\int_a^2 (2x+1)\,\mathrm{d}x = 4$. Giá trị biểu thức $1+a^3$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_a^2 (2x+1)\,\mathrm{d}x = \left.(x^2+x)\right|_a^2 = 6 - a^2 - a$.

Theo giả thiết $6 - a^2 - a = 4 \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -2. \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện $|a| < 2 \Rightarrow a = 1$. Vậy $1 + a^3 = 2$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án B □

Câu 841. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x}\ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = \mathrm{e}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là $\dfrac{1}{x}\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Diện tích của hình phẳng là

$$\int_1^{\mathrm{e}} \left|\frac{1}{x}\ln x\right| \mathrm{d}x = \left|\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}(\ln x)\right| = \left|\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^{\mathrm{e}}\right| = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 842. Nếu $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$ thì $\displaystyle\int_0^2 f(3x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 36. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

Đặt $t = 3x \Rightarrow \mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 2 \Rightarrow t = 6$.

Khi đó $\displaystyle\int_0^2 f(3x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}\cdot 12 = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 843. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \tan x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $1 - \frac{\pi}{4}$. **B.** π^2. **C.** $\pi - \frac{\pi^2}{4}$. **D.** $\frac{\pi^2}{4} + \pi$.

Lời giải.

Thể tích của (H) là

$$V = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \mathrm{d}x = \pi \left(\tan x - x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \pi - \frac{\pi^2}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 844. Biết rằng $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} = 2\ln\left(\frac{2 + \sqrt{a}}{1 + \sqrt{b}}\right)$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$.

Đặt $t = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}\right) \Leftrightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{\sqrt{(x+1)(x+3)}} \mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{2\,\mathrm{d}t}{t} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$.

Khi $x = 0$ thì $t = 1 + \sqrt{3}$; khi $x = 1$ thì $t = 2 + \sqrt{2}$.

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} = 2 \int\limits_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 2\ln|t|\Big|_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} = 2\ln\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b = 5.$$

Chọn đáp án B □

Câu 845. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ là

A. $F(x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x - \frac{1}{10}\sin^5 2x + \frac{1}{15}$. **B.** $F(x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x + \frac{1}{10}\sin^5 2x - \frac{1}{15}$.

C. $F(x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x - \frac{1}{10}\sin^5 2x - \frac{1}{15}$. **D.** $F(x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x + \frac{1}{10}\sin^5 2x - \frac{4}{15}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\cos 2x \,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{d}t = \cos 2x \,\mathrm{d}x$.

Ta có $F(x) = \int \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int t^2 \cdot \left(1 - t^2\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \int \left(t^2 - t^4\right) \mathrm{d}t$

$= \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{10}t^5 + C = \frac{1}{6}\sin^3 2x - \frac{1}{10}\sin^5 2x + C$.

Mà từ giả thiết ta được $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\sin^3\frac{\pi}{2} - \frac{1}{10}\sin^5\frac{\pi}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{15}$.

Vậy $F(x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x - \frac{1}{10}\sin^5 2x - \frac{1}{15}$.

Chọn đáp án C □

Câu 846. Cho $\int 2x\,(3x - 2)^6 \,\mathrm{d}x = A\,(3x - 2)^8 + B\,(3x - 2)^7 + C$ với $A, B \in \mathbb{Q}$ và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A + 7B$ bằng

A. $\frac{23}{252}$. **B.** $\frac{241}{252}$. **C.** $\frac{52}{9}$. **D.** $\frac{7}{9}$.

Lời giải.

Đặt $t = 3x - 2 \Rightarrow x = \dfrac{t+2}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Ta có $\displaystyle\int 2x\,(3x-2)^6\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{t+2}{3}\cdot t^6\,\mathrm{d}t = \frac{2}{9}\int \left(t^7 + 2t^6\right)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{9}\cdot\frac{t^8}{8} + \frac{4}{9}\cdot\frac{t^7}{7} + C$

$= \dfrac{1}{36}\cdot(3x-2)^8 + \dfrac{4}{63}\cdot(3x-2)^7 + C$.

Suy ra $A = \dfrac{1}{36}$, $B = \dfrac{4}{63}$.

Giá trị của biểu thức $12A + 7B = 12\cdot\dfrac{1}{36} + 7\cdot\dfrac{4}{63} = \dfrac{7}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 847. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)\cdot f(x) = 2x\sqrt{[f(x)]^2+1}$ và $f(0) = 0$. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ lần lượt là

A. $M = 20; m = 2$.
B. $M = 4\sqrt{11}; m = \sqrt{3}$.
C. $M = 20; m = \sqrt{2}$.
D. $M = 3\sqrt{11}; m = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x)\cdot f(x) = 2x\sqrt{[f(x)]^2+1} \Leftrightarrow \frac{f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2+1}} = 2x \quad (1).$$

Lấy nguyên hàm hai vế (1) ta có $\sqrt{[f(x)]^2+1} = x^2 + C$, do $f(0) = 0$ nên $C = 1$.

Vậy $f(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2}$ trên đoạn $[1;3]$. Ta có

$$f'(x) = \sqrt{x^2+2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} > 0$$

với mọi $x \in [1;3]$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[1;3]$. Vậy $M = f(3) = 3\sqrt{11}$; $m = f(1) = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 848. Cho $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, $\displaystyle\int_{-1}^{7} f(t)\,\mathrm{d}t = 9$. Giá trị của $\displaystyle\int_{2}^{7} f(z)\,\mathrm{d}z$ là

A. 7. **B.** 3. **C.** 11. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có

$$\int_2^7 f(z)\,\mathrm{d}z = \int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^7 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^7 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 9 - 2 = 7.$$

Chọn đáp án A □

Câu 849. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ là

A. $\sin x - \cos x + C$. **B.** $\sin x + \cot x + C$. **C.** $\cos x - \sin x + C$. **D.** $\sin x + \cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x = -\cos x + \sin x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 850. Tìm hàm số $f(x)$, biết rằng $f'(x) = 4\sqrt{x} - x$ và $f(4) = 0$.

A. $f(x) = \dfrac{8x\sqrt{x}}{3} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{40}{3}$. **B.** $f(x) = \dfrac{8x\sqrt{x}}{3} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{88}{3}$.

C. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{x^2}{2} + 1$. **D.** $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 1$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int (4\sqrt{x} - x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{8x\sqrt{x}}{3} - \dfrac{x^2}{2} + C$.

Do $f(4) = 0$ nên ta có $\dfrac{64}{3} - 8 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\dfrac{40}{3}$. Vậy $f(x) = \dfrac{8x\sqrt{x}}{3} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{40}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 851. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 6t + 12t^2$ (m/s^2). Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

A. $\dfrac{4300}{3}$ m. **B.** 4300 m. **C.** $\dfrac{98}{3}$ m. **D.** 11100 m .

Lời giải.

Ta có công thức chuyển động của vật theo thời gian kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}x = \int (6t + 12t^2)\,\mathrm{d}x = 4t^3 + 3t^2 + C.$$

Do $v(0) = 10$ nên ta có $C = 10$. Suy ra $v(t) = 4t^3 + 3t^2 + 10$. Từ đó ta có quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

$$s = \int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} (4t^3 + 3t^2 + 10)\,\mathrm{d}x = 11100.$$

Chọn đáp án D □

Câu 852. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\forall x \in [0;\,2018]$, ta có $f(x) > 0$ và $f(x) \cdot f(2018 - x) = 1$. Giá trị của tích phân $I = \displaystyle\int_0^{2018} \dfrac{1}{1 + f(x)}\,\mathrm{d}x$ là

A. 2018. **B.** 4016. **C.** 0. **D.** 1009.

Lời giải.

Đặt $t = 2018 - x$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Khi đó

$$I = -\int_{2018}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{1 + f(2018 - t)} = \int_0^{2018} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \dfrac{1}{f(t)}} = \int_0^{2018} \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{1 + f(t)} = \int_0^{2018} \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{1 + f(x)}.$$

Do đó

$$2I = I + I = \int_0^{2018} \frac{1}{1 + f(x)}\,\mathrm{d}x + \int_0^{2018} \frac{f(x)}{1 + f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2018} 1\,\mathrm{d}x = 2018.$$

Vậy $I = 1019$.

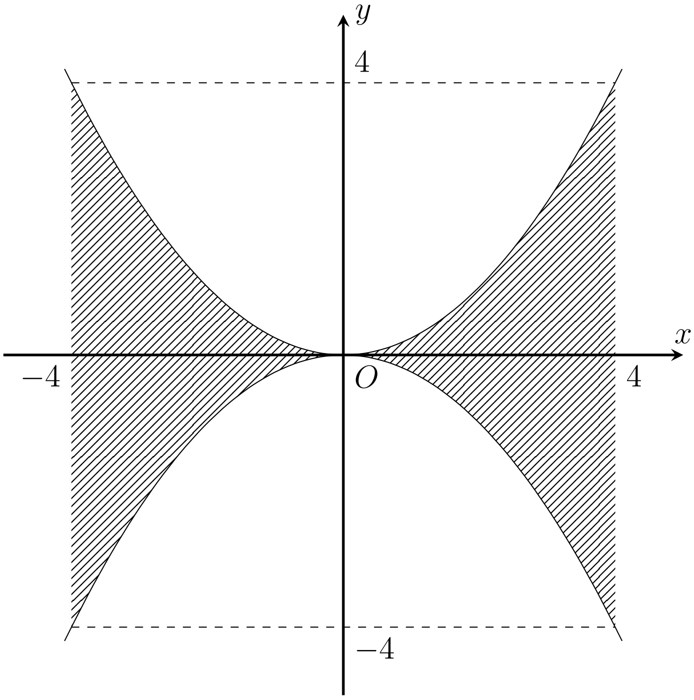
Chọn đáp án D □

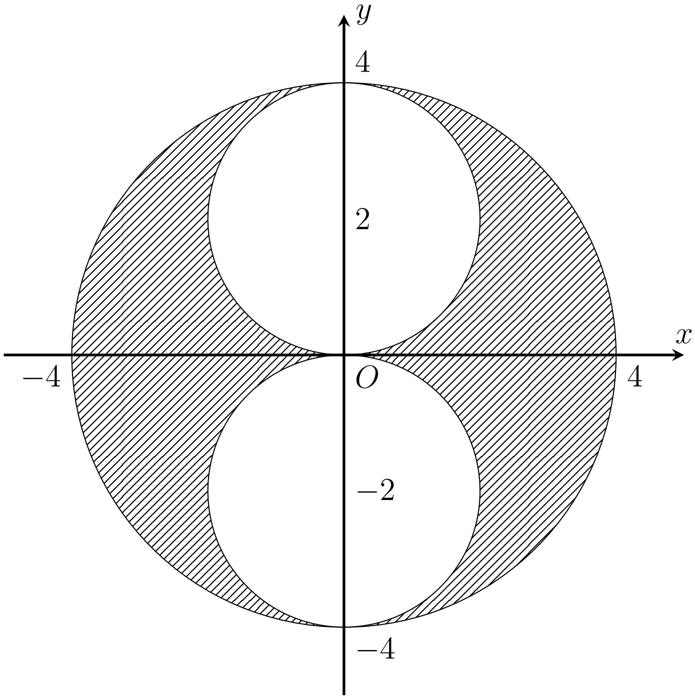
Câu 853. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi $(\mathcal{H}_1)$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{-x^2}{4}, \quad x = -4, \quad x = 4$$

và $(\mathcal{H}_2)$ là hình gồm tất cả các điểm $(x; y)$ thoả:

$$x^2 + y^2 \leqslant 16, \quad x^2 + (y-2)^2 \geqslant 4, \quad x^2 + (y+2)^2 \geqslant 4.$$





Cho $(\mathcal{H}_1)$ và $(\mathcal{H}_2)$ quay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $V_1 = \frac{1}{2}V_2$. **B**. $V_1 = \frac{2}{3}V_2$. **C**. $V_1 = V_2$. **D**. $V_1 = 2V_2$.

Lời giải.

— V_1 bằng thể tích khối trụ có bán kính đáy bằng 4 và chiều cao bằng 8 trừ bốn lần thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi vật thể giới hạn bởi các đường $x = 2\sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$ quay quanh trục Oy.

$$V_1 = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 - 4\pi \int\limits_0^4 2y\,\mathrm{d}y = 64\pi.$$

— Thể tích $V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(4^3 - 2^3 - 2^3\right) = 64\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 854. Cho hàm số $y = \dfrac{x - m^2}{x+1}$ (với m là tham số khác 0) có đồ thị là $(\mathcal{C})$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(\mathcal{C})$ và hai trục toạ độ. Có bao nhiêu giá trị thực của m thoả mãn $S = 1$?

A. Không. **B**. Một. **C**. Hai. **D**. Ba.

Lời giải.

— Ta có $y' = \dfrac{m^2+1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq 1$, nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định với mọi m.

— $(\mathcal{C})$ cắt trục hoành tại $A(m^2; 0)$ và cắt trục tung $B(0; -m^2)$.

— $S = -\displaystyle\int\limits_0^{m^2} \dfrac{x - m^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left(m^2+1\right)\ln\left(m^2+1\right) - m^2$.

— $S = 1 \Leftrightarrow \left(m^2+1\right) \cdot \left[\ln\left(m^2+1\right) - 1\right] = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\mathrm{e} - 1}$.

Chọn đáp án C □

Câu 855. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + \cos x$ là

A. $\dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{x+1} + \sin x + C$. **B.** $\mathrm{e}^x - \sin x + C$. **C.** $\mathrm{e}^x + \sin x + C$. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1} - \sin x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (\mathrm{e}^x + \cos x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \sin x + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 856. Cắt một vật thể ϑ bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại các điểm $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$ cắt ϑ theo thiết diện có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó phần vật thể ϑ giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) có thể tích bằng

A. $V = \pi\displaystyle\int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V = \displaystyle\int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V = \pi\displaystyle\int\limits_a^b S^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V = \displaystyle\int\limits_a^b S^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo định nghĩa SGK.

Chọn đáp án B □

Câu 857. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathscr{K}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathscr{K}$.

B. Nếu $f(x)$ liên tục trên $\mathscr{K}$ thì nó có nguyên hàm trên $\mathscr{K}$.

C. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$.

D. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ thì hàm số $F(-x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$.

Lời giải.

Khẳng định "Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ thì hàm số $F(-x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$" là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án D □

Câu 858. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = \pi$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \cos x$ và trục hoành là nghiệm phương trình $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Xét trên $[0; \pi]$ suy ra $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Diện tích hình phẳng cần tính là $S = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 859. Tính $I = \displaystyle\int\limits_0^{2018} \dfrac{\ln(1+2^x)}{(1+2^{-x})\log_4 e}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \ln^2(1+2^{2018}) - \ln^2 2$. **B.** $I = \ln^2(1+2^{2018}) - \ln 4$.

C. $I = \ln(1+2^{2018}) - \ln 2$. **D.** $I = \ln^2(1+2^{-2018}) - \ln^2 2$.

Lời giải.

Đặt $t = \ln(1+2^x)$, ta có $\mathrm{d}t = \dfrac{2^x \ln 2}{1+2^x} = \dfrac{\ln 2}{1+2^{-x}}\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \ln 2$; $x = 2018 \Rightarrow t = \ln\left(1+2^{2018}\right)$.

Khi đó $I = \displaystyle\int\limits_{\ln 2}^{\ln\left(1+2^{2018}\right)} \frac{t}{\ln 2.\log_4 e}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{\log_4 2}\cdot\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{\ln 2}^{\ln\left(1+2^{2018}\right)} = \ln^2\left(1+2^{2018}\right) - \ln^2 2.$

Chọn đáp án A □

Câu 860. Xét (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = a\sin x + b\cos x$ (với a, b là các hằng số thực dương), trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = \pi$. Nếu vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox có thể tích bằng $\dfrac{5\pi^2}{2}$ và $f'(0) = 2$ thì $2a + 5b$ bằng

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = a\cos x - b\sin x$; $f'(0) = 2 \Rightarrow a = 2$.
$f(x) = a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$ với $\alpha = \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int\limits_0^{\pi}(a^2+b^2)\sin^2(x+\alpha)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\pi(a^2+b^2)}{2}\int\limits_0^{\pi}\left[1-\cos(2x+2\alpha)\right]\mathrm{d}x\\
&= \frac{\pi(a^2+b^2)}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin(2x+2\alpha)\right]\Bigg|_0^{\pi}\\
&= \frac{\pi(a^2+b^2)}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin(2x+2\alpha)\right]\Bigg|_0^{\pi}\\
&= \frac{\pi^2(a^2+b^2)}{2}\\
&= \frac{\pi^2(4+b^2)}{2}.
\end{aligned}$$

Lại có: $V = \dfrac{5\pi^2}{2} \Rightarrow 4 + b^2 = 5 \Rightarrow b = 1$ (vì $b > 0$) Vậy $2a + 5b = 9$.

Chọn đáp án B □

Câu 861. Tính $I = \displaystyle\int\limits_1^2\left(2019\log_2 x + \frac{1}{\ln 2}\right)x^{2018}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 2^{2018}$. **B.** $I = 2^{2017}$. **C.** $I = 2^{2020}$. **D.** $I = 2^{2019}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = 2019\log_2 x + \dfrac{1}{\ln 2}\\ \mathrm{d}v = x^{2018}\,\mathrm{d}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u = \dfrac{2019}{x\ln 2}dx\\ v = \dfrac{x^{2019}}{2019}\end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned}
I &= \left(2019\log_2 x + \frac{1}{\ln 2}\right)\frac{x^{2019}}{2019}\Bigg|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{x^{2018}}{\ln 2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2^{2019} + \frac{2^{2019}}{2019\ln 2} - \frac{1}{2019\ln 2} - \frac{x^{2019}}{2019\ln 2}\Bigg|_1^2 \\
&= 2^{2019} + \frac{2^{2019}}{2019\ln 2} - \frac{1}{2019\ln 2} - \frac{2^{2019}}{2019\ln 2} + \frac{1}{2019\ln 2} \\
&= 2^{2019}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 862. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $y = 4\cos^4 x - 3\cos^2 x$. $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $F(x) = \dfrac{\cos 4x}{8} + \dfrac{\cos 2x}{4} + C$. **B.** $F(x) = \sin^3 x\cos x + C$.

C. $F(x) = -\sin x\cos^3 x + C$. **D.** $F(x) = \dfrac{\sin 4x}{8} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$.

Lời giải.

Ta có $4\cos^4 x - 3\cos^2 x = \dfrac{\cos 4x}{2} + 2\cos 2x + \dfrac{3}{2} - \dfrac{3(\cos 2x + 1)}{2} = \dfrac{\cos 4x}{2} + \dfrac{\cos 2x}{2}$.

$F(x) = \displaystyle\int \left(\frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 863. Cho $I = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x + \cos x)^2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I \in (-1; 3)$. **B.** $I \in (-2; 0)$. **C.** $I \in (-7; -5)$. **D.** $I \in [3; 8]$.

Lời giải.

$I = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x + \cos x)^2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 864. Có bao nhiêu số thực a để $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x}{a + x^2}\,\mathrm{d}x = 1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

$a + x^2 \neq 0$ với mọi $x \in [0; 1] \Rightarrow a > 0$ hoặc $a < -1$.

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{a + x^2}\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|a + x^2\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+1}{a}\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2 - 1} \\ a = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2 + 1} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Chọn đáp án B □

Câu 865. Cho $f(x)$ là một hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 2018$, $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2017$.

Giá trị của $I = \displaystyle\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 2$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = -1$.

Lời giải.

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ nên

$$\int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2018 \Rightarrow \int\limits_{2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -2018$$

Khi đó, $I = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 2017 - 2018 = -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 866. Tập hợp nào dưới đây chứa số thực a để $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{x}{\cos^2(ax)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{\pi} - \dfrac{8}{\pi^2}\ln 2$?

A. $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$. **C.** $(-1; 0)$. **D.** $(0; 1)$.

Lời giải.

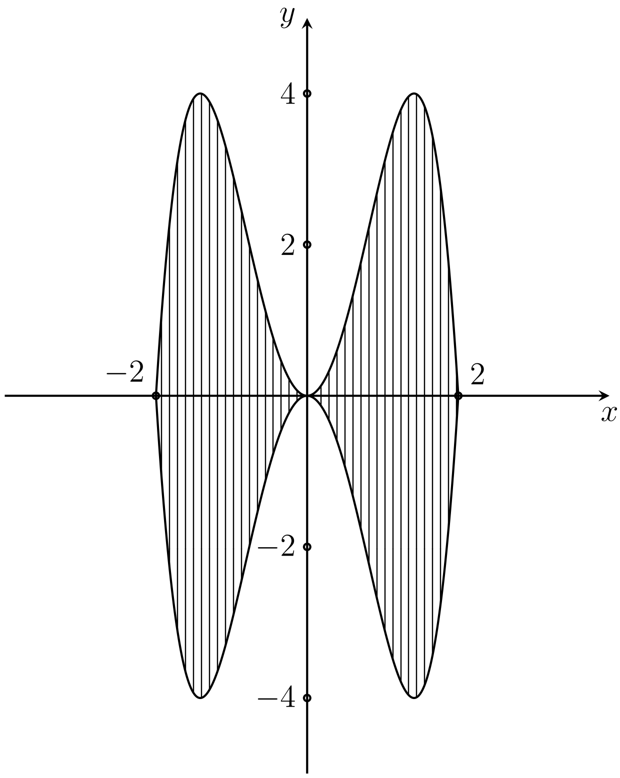
Đặt $u = x$, $\mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2(ax)}$, ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{\cos^2(ax)}\,\mathrm{d}x &= \left.\frac{x\tan(ax)}{a}\right|_0^1 - \int\limits_{0}^{1} \frac{\tan(ax)}{a}\,\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{x\tan(ax)}{a}\right|_0^1 + \left.\frac{\ln|\cos(ax)|}{a^2}\right|_0^1 \\ &= \frac{\tan a}{a} + \frac{\ln|\cos a|}{a^2}\end{aligned}$$

Suy ra $a = \dfrac{\pi}{4} \in (0; 1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 867. Ông Rich muốn gắn những viên kim cương nhỏ vào một mô hình như cánh bướm theo hình vẽ bên dưới. Để tính diện tích đó ông đưa vào một hệ trục tọa độ như hình vẽ thì nhận thấy rằng diện tích mô hình đó là phần giao (tô) giữa hai hàm số trùng phương $y = f(x)$, $y = g(x)$ đối xứng nhau qua trục hoành. Hỏi ông Rich đã gắn bao nhiêu viên kim cương trên mô hình đó biết rằng mỗi đơn vị vuông trên mô hình đó mất 15 viên kim cương?



A. 256. **B**. 128. **C**. 64. **D**. 265.

Lời giải.

Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại $(2;0)$, $(-2;0)$ có giá trị cực đại bằng 4, giá trị cực tiểu bằng 0, dễ thấy $a = -1, b = 4, c = 0$, $f(x) = -x^4 + 4x^2$, $g(x) = x^4 - 4x^2$. Ta có

$$S = \int\limits_{-2}^{2} \left(-x^4 + 4x^2 - (x^4 - 4x^2)\right)\, \mathrm{d}x = \frac{256}{15}$$

Vậy ông Rich đã gắn $15 \cdot \dfrac{256}{15} = 256$ viên kim cương.

Chọn đáp án A □

Câu 868. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{2abx + a + b}{(1 + ax)(1 + bx)}\, \mathrm{d}x = 0$. Giá trị của $S = ab + a + b$ bằng

A. $S = 0, S = 1$. **B**. $S = -2, S = 0$. **C**. $S = 1, S = -2$. **D**. $S = -2, S = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_0^1 \frac{2abx + a + b}{(1 + ax)(1 + bx)}\, \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\frac{a}{ax + 1} + \frac{b}{bx + 1}\right) \mathrm{d}x = \ln|ax+1|\Big|_0^1 + \ln|bx+1|\Big|_0^1 = \ln|(a+1)(b+1)| = 0.$$

Suy ra $|ab + a + b + 1| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ab + a + b = 0 \\ ab + a + b = -2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án B □

Câu 869. Tập hợp nào dưới đây có chứa số thực m để diện tích giới hạn bởi đường cong $(C)\colon y = x^3 - 3x$ và đường thẳng $(d)\colon y = mx$ có diện tích bằng 8(đvdt)?

A. $(-8;0)$. **B**. $(-8;3)$. **C**. $(1;7)$. **D**. $(-3;0)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3-3x=mx \Leftrightarrow x(x^2-m-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m+3} \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ có tâm đối xứng là gốc tọa độ và đường thẳng $y=mx$ cũng đi qua gốc tọa độ nên diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và đường thẳng (d) là

$$S=2\int\limits_0^{\sqrt{m+3}}\left|x^3-(m+3)x\right|\,\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{\sqrt{m+3}}\left[(m+3)x-x^3\right]\,\mathrm{d}x=8$$

$$\Leftrightarrow (m+3)^2=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-7 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Chọn đáp án B □

Câu 870. Cho hàm số $y=x^3-2x^2-(m-1)x+m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số và hai trục Ox, Oy có diện tích không lớn hơn 1 (đvdt)?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

$y'=3x^2-4x-(m-1)$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $3x^2-4x-(m-1)\geqslant 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m\leqslant -\dfrac{1}{3}$.

$y=x^3-2x^2-(m-1)x+m=(x-1)(x^2-x-m)$ cho nên hàm số cắt trục hoành tại điểm $x=1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và các trục tọa độ là

$$S=\int\limits_0^1\left|x^3-2x^2-(m-1)x+m\right|\,\mathrm{d}x=-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{(m-1)x^2}{2}+mx\right)\Big|_0^1=-\frac{6m+1}{12}$$

Theo giả thiết $S\leqslant 1 \Leftrightarrow -\dfrac{13}{6}\leqslant m \Rightarrow m=-1, m=-2$.

Chọn đáp án B □

Câu 871. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y=3\mathrm{e}^{-x}+x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=\ln 2$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho (H) quay quanh trục hoành được tính bằng công thức nào sau đây?

A. $\pi^2\int\limits_0^{\ln 2}\left(3\mathrm{e}^{-x}+x\right)^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_0^{\ln 2}\left|3e^{-x}+x\right|\,\mathrm{d}x$.

C. $\pi\int\limits_0^{\ln 2}\left(3\mathrm{e}^{-x}+x\right)^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\int\limits_0^{\ln 2}\left|3e^{-x}+x\right|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo lý thuyết, thể tích khối tròn xoay sinh ra là $V=\pi\int\limits_0^{\ln 2}\left(3\mathrm{e}^{-x}+x\right)^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 872. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{x^2}$ là

A. $\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{x} + C$. **B.** $\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{x} + C$. **C.** $e^{2x} + \frac{1}{x} + C$. **D.** $e^{2x} - \frac{1}{x} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,dx = \int \left(e^{2x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{x} + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 873. Tích phân $I = \int\limits_0^2 (x+2)^3\,dx$ bằng

A. $I = 56$. **B.** $I = 60$. **C.** $I = 240$. **D.** $I = 120$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^2 (x+2)^3\,dx = \left.\frac{(x+2)^4}{4}\right|_0^2 = \frac{4^4 - 2^4}{4} = 60$.

Chọn đáp án B □

Câu 874. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_{\ln 2}^{1+\ln 2} f(x)\,dx = 2018$. Tính $I = \int\limits_1^e \frac{1}{x} f(\ln 2x)\,dx$.

A. $I = 2018$. **B.** $I = 4036$. **C.** $I = \frac{1009}{2}$. **D.** $I = 1009$.

Lời giải.

Đặt $t = \ln 2x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$, với $x = 1 \Rightarrow t = \ln 2$, $x = e \Rightarrow t = 1 + \ln 2$.

Ta có $I = \int\limits_{\ln 2}^{1+\ln 2} f(t)\,dt = \int\limits_{\ln 2}^{1+\ln 2} f(x)\,dx = 2018$.

Chọn đáp án A □

Câu 875. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = 2x^2$, tiếp tuyến của (P) tại $M(1;2)$ và trục Oy là

A. $S = 1$. **B.** $S = \frac{2}{3}$. **C.** $S = \frac{1}{3}$. **D.** $S = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Có $y' = 4x$, suy ra $y'(1) = 4$.

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại M là $y = y'(1)(x-1) + 2 = 4(x-1) + 2 = 4x - 2$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int\limits_0^1 \left|2x^2 - 4x + 2\right|\,dx = \int\limits_0^1 2(x-1)^2\,dx = \left.\frac{2(x-1)^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 876. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[4;8]$ và $f(x) \neq 0$, $\forall x \in [4;8]$. Biết rằng $\int\limits_4^8 \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4}\,dx = 1$ và $f(4) = \frac{1}{4}$, $f(8) = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của $f(6)$.

A. $f(6) = \frac{5}{8}$. **B.** $f(6) = \frac{2}{3}$. **C.** $f(6) = \frac{3}{8}$. **D.** $f(6) = \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Xét $A = \int\limits_4^8 \dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}\,\mathrm{d}x$, đặt $t = f(x) \Rightarrow \mathrm{d}t = f'(x)\,\mathrm{d}x$, suy ra

$$A = \int\limits_{f(4)}^{f(8)} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\dfrac{1}{t}\Big|_{f(4)}^{f(8)} = -\dfrac{1}{f(8)} + \dfrac{1}{f(4)} = 2.$$

Ta có $\int\limits_4^8 \left[\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2} - \dfrac{1}{2}\right]^2 \mathrm{d}x = \int\limits_4^8 \dfrac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4}\,\mathrm{d}x - \int\limits_4^8 \dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_4^8 \dfrac{1}{4}\,\mathrm{d}x = 1 - 2 + 1 = 0.$

Mặt khác, do $\left[\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2} - \dfrac{1}{2}\right]^2 \geq 0$ nên suy ra $\left[\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2} - \dfrac{1}{2}\right]^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{x}{2} + C.$

Do $f(4) = \dfrac{1}{4} \Rightarrow C = -6$. Vậy $f(x) = -\dfrac{1}{\frac{x}{2} - 6} = \dfrac{2}{12 - x}$, suy ra $f(6) = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 877. Cho tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \dfrac{\cos 2x}{1 - \cos x}\,\mathrm{d}x = a\pi + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = 1 - a^3 - b^2$.

A. $P = 9$. **B.** $P = -29$. **C.** $P = -7$. **D.** $P = -27$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \dfrac{\cos 2x}{1 - \cos x}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \dfrac{2\cos^2 x - 1}{1 - \cos x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-2\cos x - 2 + \dfrac{1}{1 - \cos x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-2\cos x - 2 + \dfrac{1}{2\sin^2 \frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(-2x - 2\sin x - \cot\dfrac{x}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 3 - \pi.\end{aligned}$$

Vậy ta có $a = -1$, $b = 3$, nên suy ra $P = 1 - a^3 - b^2 = 1 + 1 - 9 = -7$.

Chọn đáp án C □

Câu 878. Cho hai hàm số $F(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x}$ và $f(x) = (-x^2 + 3x + 6)e^{-x}$. Tìm a và b để $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

A. $a = 1, b = -7$. **B.** $a = -1, b = -7$. **C.** $a = -1, b = 7$. **D.** $a = 1, b = 7$.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = (-x^2 + (2 - a)x + a - b)e^{-x} = f(x)$ nên $2 - a = 3$ và $a - b = 6$.

Vậy $a = -1$ và $b = -7$.

Chọn đáp án B □

Câu 879. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)dx = 2$; $\int\limits_0^3 f(x)dx = 6$. Tính $I = \int\limits_{-1}^1 f(|2x - 1|)dx$.

A. $I = \dfrac{2}{3}$. **B.** $I = 4$. **C.** $I = \dfrac{3}{2}$. **D.** $I = 6$.

Câu 880. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

A. $S = \dfrac{343}{12}$. **B.** $S = \dfrac{793}{4}$. **C.** $S = \dfrac{397}{4}$. **D.** $S = \dfrac{937}{12}$.

Câu 881. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để có $\displaystyle\int_1^k (2x-1)dx = 4\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

A. $\left[\begin{array}{l}k=1\\k=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}k=1\\k=-2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}k=-1\\k=-2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}k=-1\\k=2\end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^k (2x-1)dx = \frac{1}{2}\int_1^k (2x-1)d(2x-1) = \left.\frac{(2x-1)^2}{4}\right|_k^1 = \frac{(2k-1)^2}{4} = \frac{1}{4}$.

Mà $\displaystyle 4\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = 4\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = 4\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = 2.$

Khi đó $\displaystyle\int_1^k (2x-1)dx = 4\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \Leftrightarrow \frac{(2k-1)^2-1}{4} = 2 \Leftrightarrow (2k-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k=2\\k=-1\end{array}\right.$

Chọn đáp án D □

Câu 882. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x).f(a-x)=1\\ f(x)>0, \forall x\in[0;a]\end{cases}$ và $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{ba}{c}$, trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(11;22)$. **B.** $(0;9)$. **C.** $(7;21)$. **D.** $(2017;2020)$.

Lời giải.

Đặt $t = a - x \Rightarrow dt = -dx$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = 0$.

Lúc đó $\displaystyle I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \int_a^0 \frac{-dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{dx}{1+f(a-x)} = \int_0^a \frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}} = \int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$.

Suy ra $\displaystyle 2I = I + I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^a 1dx = a.$

Do đó $I = \dfrac{1}{2}a \Rightarrow b = 1; c = 2 \Rightarrow b + c = 3.$

Chọn đáp án B □

Câu 883. Cho $\displaystyle I = \int_2^5 f(x)\,dx = 10$. Kết quả $\displaystyle J = \int_5^2 [2-4f(x)]\,dx$ là

A. 34. **B.** 36. **C.** 40. **D.** 32.

Lời giải.

Xét $\displaystyle J = \int_5^2 [2-4f(x)]\,dx = 2x\Big|_5^2 - 4\int_5^2 f(x)\,dx = -6 + 40 = 34.$

Chọn đáp án A □

Câu 884. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $K(2;4;6)$, gọi K' là hình chiếu vuông góc của điểm K lên trục Oz, khi đó trung điểm OK' có tọa độ là

A. $(0;0;3)$. **B.** $(1;0;0)$. **C.** $(1;2;3)$. **D.** $(0;2;0)$.

Lời giải.

Tọa độ hình chiếu $K'(0;0;6) \Rightarrow$ trung điểm của đoạn OK' có tọa độ là $(0;0;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 885. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$?

A. $3x-2y+z+12=0$. **B.** $3x-2y+z-12=0$.

C. $3x+2y+z-8=0$. **D.** $x-2y+3z+3=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng vuông góc với Δ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3;-2;1)$, khi đó phương trình mặt phẳng là: $3x-2y+z-12=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 886. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$. Gọi $\mathscr{D}$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

A. $V = \pi \displaystyle\int_1^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V = 2\pi \displaystyle\int_1^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $V = \pi^2 \displaystyle\int_1^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi^2 \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là $V = \pi \displaystyle\int_1^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 887. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π và có thiết diện qua trục là hình vuông. Diện tích toàn phần của hình trụ bằng

A. 6π. **B.** 10π. **C.** 8π. **D.** 12π.

Lời giải.

Thiết diện qua trục hình trụ là hình vuông $\Rightarrow l = 2r$. Ta có $S_{\text{xq}} = 2\pi\cdot r\cdot l = 4\pi\cdot r^2 = 4\pi \Leftrightarrow r = 1$.

Khi đó diện tích toàn phần hình trụ là $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2\pi r^2 = 6\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 888. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 2x\,\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=3$. **C.** $I=1$. **D.** $I=4$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 2x\,\mathrm{d}x = x^2\Big|_1^2 = 4-1=3$.

Chọn đáp án B □

Câu 889. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số có ba điểm cực trị.
B. Hàm số có hai điểm cực tiểu.
C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.
D. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có giá trị cực đại bằng 3.

Chọn đáp án D □

Câu 890. Cho hàm số $y = 2x^3 + 6x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = 2x^3 + 6x + 2$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Có $y' = 6x^2 + 6 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định.

Chọn đáp án C □

Câu 891. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 5x$.

A. $\displaystyle\int \cos 5x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin 5x}{5} + C$.
B. $\displaystyle\int \cos 5x \,\mathrm{d}x = -\frac{\sin 5x}{5} + C$.
C. $\displaystyle\int \cos 5x \,\mathrm{d}x = 5\sin 5x + C$.
D. $\displaystyle\int \cos 5x \,\mathrm{d}x = \sin 5x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \cos 5x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin 5x}{5} + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 892. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $f(2) = 16$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 x \cdot f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 12$.
B. $I = 7$.
C. $I = 13$.
D. $I = 20$.

Lời giải.

• Đặt $t = 2x$. Ta có

$$I = \frac{1}{4}\int_0^2 tf'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(tf(t)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{4}(32 - 4) = 7.$$

Chọn đáp án B □

Câu 893. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0) = 9$ và $9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9$. Tính $T = f(1) - f(0)$.

A. $T = 2 + 9\ln 2$. **B.** $T = 9$. **C.** $T = \frac{1}{2} + 9\ln 2$. **D.** $T = 2 - 9\ln 2$.

Lời giải.

Ta có $9f''(x) + [f'(x) - x]^2 = 9 \Leftrightarrow [f'(x) - x]^2 = -9[f''(x) - 1] \Leftrightarrow \dfrac{f''(x) - 1}{[f'(x) - x]^2} = -\dfrac{1}{9}$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được $-\dfrac{1}{f'(x) - x} = -\dfrac{x}{9} + c$,

Do $f'(0) = 9 \Rightarrow -\dfrac{1}{9} = c \Rightarrow -\dfrac{1}{f'(x) - x} = -\dfrac{x}{9} - \dfrac{1}{9}$

$\Rightarrow f'(x) - x = \dfrac{9}{x+1} \Rightarrow f'(x) = x + \dfrac{9}{x+1}$, lấy tích phân 2 vế ta được

$f(1) - f(0) = \displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x + \frac{9}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + 9\ln|x+1|\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 9\ln 2.$

Chọn đáp án C □

Câu 894. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x + \cos x$ là

A. $-\cos 2x + \sin x + C$. **B.** $\cos^2 x - \sin x + C$.
C. $\sin^2 x + \sin x + C$. **D.** $\cos 2x - \sin x + C$.

Lời giải.

Do $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (\sin 2x + \cos x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + \sin x + C = \sin^2 x + \sin x + C - \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 895. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0) = 2$. Hãy tính $F(-1)$.

A. $6 - \frac{15}{\mathrm{e}}$. **B.** $4 - \frac{10}{\mathrm{e}}$. **C.** $\frac{15}{\mathrm{e}} - 4$. **D.** $\frac{10}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Xét $I = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt[3]{x}$ suy ra $t^3 = x$ nên $3t^2\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ khi đó $I = \displaystyle\int 3t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

Theo công thức tích phân từng phần

$$I = 3t^2\mathrm{e}^t - 3\int 2t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 3t^2\mathrm{e}^t - 3\left(2t\mathrm{e}^t - \int 2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right) = 3t^2\mathrm{e}^t - 3\left(2t\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^t\right) + C$$

Suy ra $I = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\sqrt[3]{x^2}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}} - 3\left(2\sqrt[3]{x}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}} - 2\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\right) + C$

hay $F(x) = 3\sqrt[3]{x^2}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}} - 3\left(2\sqrt[3]{x}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}} - 2\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\right) + C$.

Do $F(0) = 2$ suy ra $6 + C = 2 \Leftrightarrow C = -4$. Khi đó $F(-1) = \dfrac{3}{\mathrm{e}} - 3\left(-\dfrac{2}{\mathrm{e}} - \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right) - 4 = \dfrac{15}{\mathrm{e}} - 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 896. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 6x + 12$ và các tiếp tuyến tại các điểm $A(1;7)$ và $B(-1;19)$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 2.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^2 - 6x + 12$ trên $\mathbb{R}$.

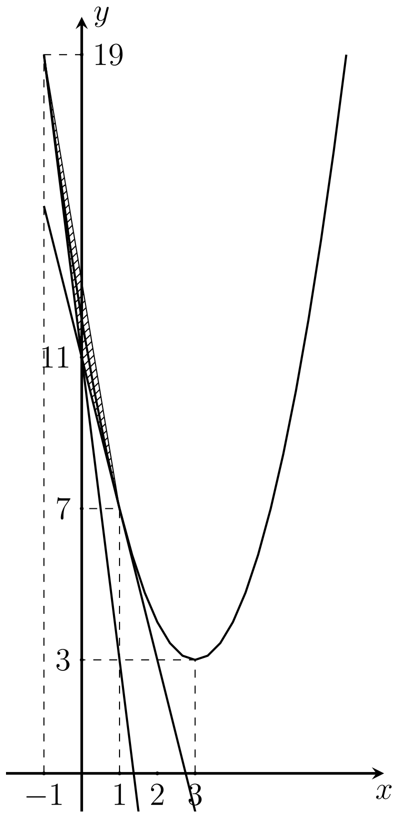
Ta có $y' = 2x - 6$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm A là $y - 7 = y'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = -4x + 11$.

Tương tự phương trình tiếp tuyến tại điểm B là $y - 19 = y'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y = -8x + 11$.

Hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị là phần gạch chéo hình bên.

Do đó diện tích là



$$\begin{aligned}
S &= \int\limits_{-1}^{0} \left(x^2 - 6x + 12 + 8x - 11\right)\,\mathrm{d}x + \\
&+ \int\limits_{0}^{1} \left(x^2 - 6x + 12 + 4x - 11\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-1}^{0} \left(x^2 + 2x + 1\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \left(x^2 - 2x + 1\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}(x+1)^3\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 897. Giả sử số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn $\mathrm{C}_{2n}^{0} + \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{2}}{3} + \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{4}}{5} + \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{6}}{7} + \cdots + \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1} = \dfrac{8192}{15}$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $6 < n < 9$. **B**. $9 < n < 12$. **C**. $n < 6$. **D**. Không tồn tại n.

Lời giải.

Ta có $(1+x)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^{0} + \mathrm{C}_{2n}^{1}x + \mathrm{C}_{2n}^{2}x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1}x^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}$ (1)

và

$(1-x)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^{0} - \mathrm{C}_{2n}^{1}x + \mathrm{C}_{2n}^{2}x^2 - \cdots - \mathrm{C}_{2n}^{2n-1}x^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$2\left(\mathrm{C}_{2n}^{0} + \mathrm{C}_{2n}^{2}x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-2}x^{2n-2} + \mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}\right) = (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n} \quad (*)$$

Lấy tích phân hai vế của $(*)$ ta có

$$2\int\limits_{0}^{1} \left(\mathrm{C}_{2n}^{0} + \mathrm{C}_{2n}^{2}x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-2}x^{2n-2} + \mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} \left[(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}\right]\mathrm{d}x \quad (**)$$

Mà

$$\begin{aligned}
&2\int\limits_{0}^{1} \left(\mathrm{C}_{2n}^{0} + \mathrm{C}_{2n}^{2}x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-2}x^{2n-2} + \mathrm{C}_{2n}^{2n}x^{2n}\right)\mathrm{d}x \\
=&2\left(\mathrm{C}_{2n}^{0}x + \mathrm{C}_{2n}^{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-2}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\Bigg|_{0}^{1} \\
=&2\left(\mathrm{C}_{2n}^{0} + \frac{\mathrm{C}_{2n}^{2}}{3} + \frac{\mathrm{C}_{2n}^{4}}{5} + \frac{\mathrm{C}_{2n}^{6}}{7} + \cdots + \frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\int\limits_0^1 \left[(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}\right]\,\mathrm{d}x=\left[\frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}-\frac{(1-x)^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_0^1=\frac{2^{2n+1}}{2n+1}.$$

Từ (∗∗) ta suy ra

$$2\left(\mathrm{C}_{2n}^0+\frac{\mathrm{C}_{2n}^2}{3}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^4}{5}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^6}{7}+\cdots+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1}\right)=\frac{2^{2n+1}}{2n+1}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{C}_{2n}^0+\frac{\mathrm{C}_{2n}^2}{3}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^4}{5}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^6}{7}+\cdots+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}}{2n-1}+\frac{\mathrm{C}_{2n}^{2n}}{2n+1}=\frac{2^{2n}}{2n+1}.$$

Do đó $\dfrac{2^{2n}}{2n+1}=\dfrac{8192}{15}\Leftrightarrow\dfrac{2^{2n}}{2n+1}=\dfrac{2^{13}}{15}\Leftrightarrow 15\cdot 2^{2n-13}=2n+1.$

- Nếu $n\geq 7$ suy ra $15\cdot 2^{2n-13}$ là một số chẵn và $2n+1$ là một số lẻ. Do đó không có giá trị thỏa mãn.
- Nếu $n\leq 6$ suy ra $15\cdot 2^{2n-13}$ là một số hữu tỉ dạng $\dfrac{p}{q}$ với $(p,q)=1$ và $2n+1$ là một số lẻ. Dó đó không có giá trị nào thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 898. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x)-2f(x)=\tan^2 x$. Tính $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $1-\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}-1$. **C.** $1+\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $2-\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Đặt $x=-t$ suy ra $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Khi $x=\dfrac{\pi}{4}$ suy ra $t=-\dfrac{\pi}{4}$; khi $x=-\dfrac{\pi}{4}$ suy ra $t=\dfrac{\pi}{4}$.

Đặt $I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ suy ra $I=-\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} f(-t)\,\mathrm{d}t=\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(-t)\,\mathrm{d}t$.

Do giá trị tích phân không phụ thuộc vào biến lấy tích phân nên $I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(-x)\,\mathrm{d}x$.

Do giả thiết ta có

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}[3f(-x)-2f(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=(\tan x-x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2-\frac{\pi}{2}$$

Từ chứng minh trên suy ra $3I-2I=2-\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow I=2-\dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 899. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)\cdot[f(x)]^{2018}=x\cdot\mathrm{e}^x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Hỏi phương trình $f(x)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ có bao nhiêu nghiệm

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Do giả thiết ta có $\displaystyle\int f'(x)\cdot[f(x)]^{2018}\,\mathrm{d}x=\int x\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\quad(*)$.

Theo công thức tích phân từng phần

$\displaystyle\int x\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\cdot\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\cdot \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C.$

Từ $(*)$ ta suy ra $\dfrac{1}{2019}\left[f(x)\right]^{2019} = x\cdot\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$. Do $f(1) = 1$ suy ra $C = \dfrac{1}{2019}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}\frac{1}{2019}\left[f(x)\right]^{2019} &= x\cdot\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \frac{1}{2019}\\ \Leftrightarrow \left[f(x)\right]^{2019} &= 2019\left(x\cdot\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right) + 1\\ \Leftrightarrow f(x) &= \sqrt[2019]{2019\left(x\cdot\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right)+1}\end{aligned}$$

Xét phương trình

$$\begin{aligned} f(x) = -\frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow \sqrt[2019]{2019\left(x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right)+1} &= -\frac{1}{\mathrm{e}}\\ \Leftrightarrow 2019\left(x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right)+1 &= \left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{2019}\\ \Leftrightarrow 2019\left(x\cdot\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right)+1+\frac{1}{\mathrm{e}^{2019}} &= 0 \quad (**)\end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x) = 2019\left(x\cdot\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right) + 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2019}}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = 2019\left(x\cdot\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right) = 2019x\cdot\mathrm{e}^x$

Xét $g'(x) = 0$ suy ra $2019x\cdot\mathrm{e}^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2019}}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2019}}$	$\searrow$	$-2018+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2019}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $(**)$ có hai nghiêm.

Chọn đáp án D □

Câu 900. Có bao nhiêu giá trị của tham số m trong khoảng $(0; 6\pi)$ thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^m \frac{\sin x}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$?

A. 6. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^m \frac{\sin x}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{4}\int\limits_0^m \frac{5+4\cos x}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{4}\ln\left|5+4\cos x\right|\Big|_0^m = -\frac{1}{4}\left(\ln\left|5+4\cos m\right| - \ln 9\right)\\ &= -\frac{1}{4}\ln\frac{\left|5+4\cos m\right|}{9}\end{aligned}$$

Vì $-1 \leq \cos m \leq 1$,$\forall m$ nên $-4 \leq 4\cos m \leq 4$, $\forall m$ suy ra $5+4\cos m > 0$, $\forall m$ do đó

$$-\frac{1}{4}\ln\frac{|5+4\cos m|}{9} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{5+4\cos m}{9}\right) = -2$$
$$\Leftrightarrow \frac{5+4\cos m}{9} = \mathrm{e}^{-2} \Leftrightarrow \cos m = \frac{9}{\mathrm{e}^2} - 5 \simeq -0{,}945$$

Dễ thấy trong một chu kì 2π có 2 giá trị m thỏa mãn $\cos m = \dfrac{9}{\mathrm{e}^2} - 5$. Do đó trong khoảng $(0; 6\pi)$ sẽ có 6 nghiệm thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 901. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \displaystyle\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S = \displaystyle\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \displaystyle\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,\mathrm{d}x$.

D. $S = \left|\displaystyle\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Theo lý thuyết.

Chọn đáp án C □

Câu 902. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + \sin x$ là

A. $\sin x - \cos x + C$.

B. $\sin x + \cos x + C$.

C. $-\sin x + \cos x + C$.

D. $-\sin x - \cos x + C$.

Lời giải.

$\displaystyle\int (\cos x + \sin x)\,\mathrm{d}x = \sin x - \cos x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 903. Tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\ln 3$.

B. $1 - \ln 2$.

C. $\ln 2$.

D. $1 - \ln 3$.

Lời giải.

$$I = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = x\Big|_0^1 - \ln|x+1|\Big|_0^1 = 1 - \ln 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 904. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $(P)\colon y = |x^2 - 4x + 3|$, $d\colon y = x + 3$.

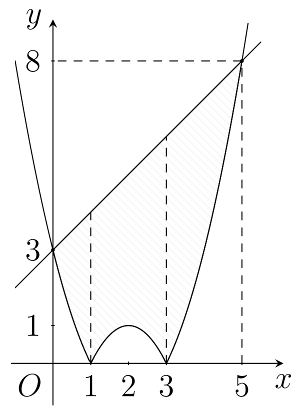
A. $\dfrac{109}{3}$.

B. $\dfrac{109}{6}$.

C. $\dfrac{125}{6}$.

D. $\dfrac{125}{3}$.

Lời giải.



- $|x^2-4x+3| = x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=5. \end{array}\right.$
- Từ đồ thị ta có $S = S_1 + S_2 + S_3$ trong đó

$S_1 = \int\limits_0^1 \left((x+3)-(x^2-4x+3)\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(-x^2+5x\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{13}{6}$.

$S_2 = \int\limits_1^3 \left((x+3)+(x^2-4x+3)\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \left(x^2-3x+6\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{26}{3}$.

$S_3 = \int\limits_3^5 \left((x+3)-(x^2-4x+3)\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^5 \left(-x^2+5x\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{22}{3}$.

- Vậy $S = \dfrac{109}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 905. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2)=2$, $\int\limits_0^2 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = \dfrac{512}{9}$ và $\int\limits_0^{16} f(\sqrt[4]{x})\,\mathrm{d}x = -\dfrac{224}{9}$. Tính tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -\dfrac{20}{3}$. **B.** $I = \dfrac{32}{9}$. **C.** $I = -\dfrac{32}{15}$. **D.** $I = \dfrac{108}{5}$.

Lời giải.

- Đặt $t = \sqrt[4]{x} \Rightarrow x = t^4 \Rightarrow \mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}x$.
- Ta có

$$\begin{aligned}
& \int\limits_0^{16} f\left(\sqrt[4]{x}\right)\,\mathrm{d}x && = -\frac{224}{9}\\
\Rightarrow\ & \int\limits_0^{2} f\left(t\right)4t^3\,\mathrm{d}t && = -\frac{224}{9}\\
\Rightarrow\ & t^4f(t)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 t^4f'\left(t\right)\,\mathrm{d}t && = -\frac{224}{9}\\
\Rightarrow\ & 16f(2) - \int\limits_0^2 t^4f'\left(t\right)\,\mathrm{d}t && = -\frac{224}{9}\\
\Rightarrow\ & \int\limits_0^2 t^4f'\left(t\right)\,\mathrm{d}t && = \frac{512}{9}.
\end{aligned}$$

- Suy ra $\int\limits_0^2 \left[f'(t)-t^4\right]^2\mathrm{d}t = \int\limits_0^2 \left[f'(t)\right]^2\mathrm{d}t - 2\int\limits_0^2 t^4f'\left(t\right)\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^2 t^8\,\mathrm{d}t = \dfrac{512}{9} - 2\cdot\dfrac{512}{9} + \dfrac{512}{9} = 0$.

Mặt khác $\left[f'(t)-t^4\right]^2 \geq 0$ với mọi x nên $f'(t) = t^4 \Rightarrow f(t) = \dfrac{1}{5}t^5 + C$. Do $f(2)=2$ nên $C = -\dfrac{22}{5}$.

- Vậy $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(\dfrac{1}{5}t^5 - \dfrac{22}{5}\right)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{20}{3}$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 906. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = \mathrm{e}^{-f(x)}(2x+3)$, $f(0) = \ln 2$. Tính $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $6\ln 2 + 2$. **B.** $6\ln 2 - 2$. **C.** $6\ln 2 - 3$. **D.** $6\ln 2 + 3$.

Lời giải.

- Ta có $f'(x)\mathrm{e}^{f(x)} = 2x+3 \Rightarrow \int \mathrm{e}^{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x = \int (2x+3)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{e}^{f(x)} = x^2+3x+C$.
- Do $f(0) = \ln 2$ nên $\mathrm{e}^{\ln 2} = 0^2 + 3\cdot 0 + C \Rightarrow C = 2$. Suy ra $f(x) = \ln(x^2+3x+2)$.
-

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \ln(x^2+3x+2)\,\mathrm{d}x \\
&= x\ln(x^2+3x+2)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{x(2x+3)}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x \\
&= x\ln(x^2+3x+2)\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \left(2 - \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= x\ln(x^2+3x+2)\Big|_1^2 - 2x\Big|_1^2 + 2\ln|x+2|\Big|_1^2 + \ln|x+1|\Big|_1^2 \\
&= 6\ln 2 - 2.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 907. Biết $I = \int\limits_0^1 x\ln(2+x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\ln 3 + b\ln 2 + \frac{c}{2}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính tổng $a+b+c$.

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

- Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2+2) \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$
- Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^1 x\ln(2+x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+2)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^2+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+2)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \left(x - \frac{2x}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+2)\Big|_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \ln(x^2+2)\Big|_0^1 \\
&= \frac{3}{2}\ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

• Suy ra $a = 3, b = -1, c = -1$. Vậy $a + b + c = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 908. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-1)^3$.

A. $3(x-1) + C$. **B.** $\frac{1}{4}(x-1)^4 + C$. **C.** $4(x-1)^4 + C$. **D.** $\frac{1}{4}(x-1)^3 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (x-1)^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(x-1)^4 + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 909. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a,\ x = b\ (a < b)$. Diện tích của D được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \int\limits_b^a |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích của D được tính theo công thức

$$S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án B □

Câu 910. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. **B.** $I = 1 - \sqrt{2}$. **C.** $I = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$. **D.** $I = \sqrt{2} - 1$.

Lời giải.

Ta có

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 911. Biết $\int\limits_1^2 \frac{3x+1}{3x^2 + x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(a + \frac{\ln b}{c}\right)$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên dương và $c \leq 4$. Tính tổng $T = a + b + c$.

A. $T = 7$. **B.** $T = 6$. **C.** $T = 8$. **D.** $T = 9$.

Lời giải.

Đặt $u = \ln x \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ x = \mathrm{e}^u. \end{cases}$

Với $x = 1 \Rightarrow u = 0$ và $x = 2 \Rightarrow u = \ln 2$.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_1^2 \frac{3x+1}{3x^2+x\ln x}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^{\ln 2} \frac{3\mathrm{e}^u+1}{3\mathrm{e}^u+u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int\limits_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}\left(3\mathrm{e}^u+u\right)}{3\mathrm{e}^u+u} = \ln x\Big|_3^{6+\ln 2}\\ &= \ln\left(6+\ln 2\right)-\ln 3 = \ln\left(2+\frac{\ln 2}{3}\right).\end{aligned}$$

Khi đó $a=2;\ b=2;\ c=3$. Vậy $T=a+b+c=7$.

Chọn đáp án A □

Câu 912. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết $f(3)+f(-3)=4$ và $f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $T=f(-5)+f(0)+f(2)$.

A. $T=5-\dfrac{1}{2}\ln 2$. **B**. $T=6-\dfrac{1}{2}\ln 2$. **C**. $T=5+\dfrac{1}{2}\ln 2$. **D**. $T=6+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

Do hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;-1),\ (-1;1),\ (1;+\infty)$ nên

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_1 & \text{khi } x\in(1;+\infty),\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_2 & \text{khi } x\in(-\infty;-1),\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_3 & \text{khi } x\in(-1;1).\end{cases}$$

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned}f(-3)&=\frac{1}{2}\ln 2+C_2,\\ f(3)&=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+C_1.\end{aligned}$$

Mà

$$f(3)+f(-3)=4\Leftrightarrow C_1+C_2=4.\qquad (1)$$

Tương tự

$$f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(-\frac{1}{3}\right)=2\Leftrightarrow 2C_3=2\Leftrightarrow C_3=1.$$

Ta có $\begin{cases}f(-5)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}+C_2\\ f(0)=1\\ f(2)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{3}+C_1\end{cases}\Rightarrow f(-5)+f(0)+f(2)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}+1+C_1+C_2.$

Từ (1) suy ra $f(-5)+f(0)+f(2)=-\dfrac{1}{2}\ln 2+1+C_1+C_2=-\dfrac{1}{2}\ln 2+5$.

Chọn đáp án A □

Câu 913. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = 0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{9}{2}$ và $\int\limits_0^1 f'(x)\cos\dfrac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{3\pi}{4}$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{1}{\pi}$. **B.** $I = \dfrac{4}{\pi}$. **C.** $I = \dfrac{6}{\pi}$. **D.** $I = \dfrac{2}{\pi}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \cos\dfrac{\pi x}{2} \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} & \int\limits_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4} \\ \Leftrightarrow\ & f(x)\cos\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 \frac{\pi}{2}\cdot f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4} \\ \Leftrightarrow\ & \int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\int\limits_0^1 \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{1-\cos\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{\pi}\sin\pi x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} & \int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 f(x)\cdot 3\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x + 9\int\limits_0^1 \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \int\limits_0^1 \left(f(x) - 3\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & f(x) = 3\sin\frac{\pi x}{2}. \end{aligned}$$

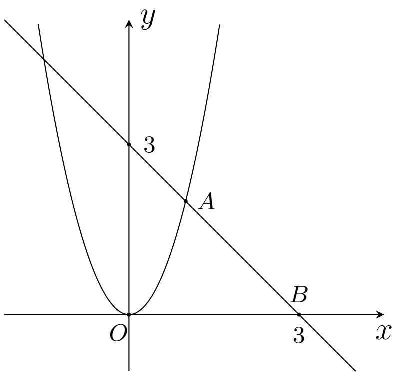
Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 3\sin\dfrac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{6}{\pi}\cos\dfrac{\pi x}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{6}{\pi}$.

Chọn đáp án C □

Câu 914.

Gọi tam giác cong (OAB) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = 2x^2$, $y = 3 - x$, $y = 0$ (hình vẽ bên). Tính diện tích S của (OAB).

A. $S = \dfrac{8}{3}$. **B.** $S = \dfrac{4}{3}$. **C.** $S = \dfrac{5}{3}$. **D.** $S = \dfrac{10}{3}$.

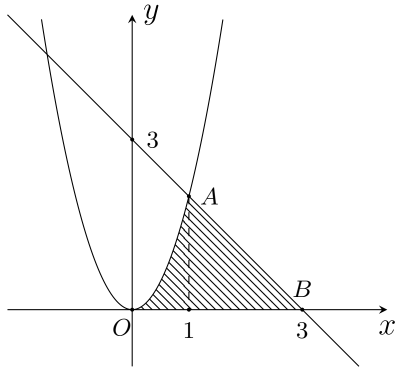


Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$2x^2 = 3 - x \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Ta có $S_{OAB} = \int\limits_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 (3-x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 + \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^3 = \frac{8}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

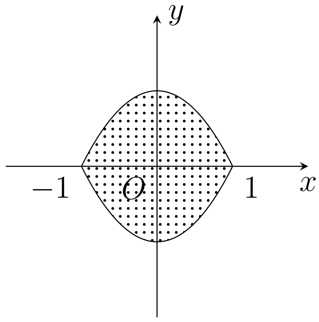
Câu 915. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $|y| = 1 - x^2$ là

A. $\frac{4}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 1.

Lời giải.

Hình phẳng đã cho được giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y = 1 - x^2 & \text{, với } -1 \le x \le 1 \\ y = -1 + x^2 & \text{, với } -1 \le x \le 1 \end{cases}$ nên có diện tích là

$$S = \int\limits_{-1}^1 2(1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(2x - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{8}{3}.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 916. Đặt $I = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,\mathrm{d}x$. Khi đó

A. $I = \frac{1}{2}$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \cos x\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{0} - \cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 917. Gọi D là phần mặt phẳng giới hạn bởi các đường $x = -1, y = 0, y = x^3$. Thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\frac{2\pi}{7}$. **B.** $\frac{\pi}{8}$. **C.** $\frac{\pi}{7}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Ta có $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, nên thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int\limits_{-1}^{0} x^6\,\mathrm{d}x = \frac{\pi x^7}{7}\Big|_{-1}^{0} = \frac{\pi}{7}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 918. Tính $I = \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{\pi}{4}$. **B.** $I = \frac{1}{2}$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = 1$.

Lời giải.

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x = -\frac{\pi}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{2}$ và khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = -\frac{\pi}{2}$.

Suy ra $I = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}} \frac{-\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -I$, dẫn tới $I = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 919. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ thoả mãn $a < c < b$. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

B. Thể tích vật thể tròn xoay tạo nên khi quay phần mặt phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quanh trục Ox là $V = \int\limits_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}(\pi x)$.

C. $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

D. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Chọn $f(x) = 2x, a = -1, b = 1$ thì ta có

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} |2x|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-1}^{0} 2x\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 2x\,\mathrm{d}x = -x^2\Big|_{-1}^{0} + x^2\Big|_0^1 = 2$$

$$\text{và} \quad \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} 2x\,\mathrm{d}x = x^2\Big|_{-1}^{1} = 0 \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = 0.$$

Khi đó $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \neq \left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Chọn đáp án C □

Câu 920. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{1-4x}$.

A. $y = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{1-4x}$. **B.** $y = -4\mathrm{e}^{1-4x}$. **C.** $y = \mathrm{e}^{1-4x}$. **D.** $y = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{1-4x}$.

Lời giải.

Ta có $\int \mathrm{e}^{1-4x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{1-4x} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 921. Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Diện tích hình phẳng (H) được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S = \pi \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$.

B. $S = \pi \displaystyle\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| \, dx$.

C. $S = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$.

D. $S = \displaystyle\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| \, dx$.

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 922. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$.

A. $I = 1$. **B.** $I = 2\ln 2 - \frac{1}{2}$. **C.** $I = 2\ln 2 + \frac{1}{2}$. **D.** $I = 2\mathrm{e} - \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(2\ln|x| + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 923. Biết $\displaystyle\int \frac{2x+2}{(2x+1)^2} dx = \frac{1}{mx+n} + p\ln|2x+1| + C$ với m, n, p là các số hữu tỉ. Tổng $m + n + p$ bằng

A. $-\frac{11}{2}$. **B.** $\frac{11}{2}$. **C.** $\frac{13}{2}$. **D.** $-\frac{13}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{2x+2}{(2x+1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2}\right) dx = -\frac{1}{4x+2} + \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$.

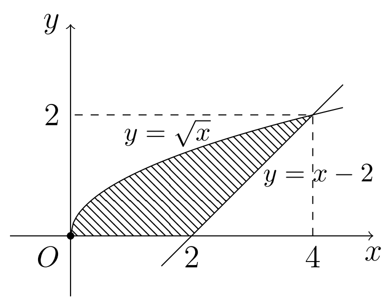
Vậy suy ra $m = -4, m = -2, p = \frac{1}{2}$ nên $m + n + p = -\frac{11}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 924.

Diện tích hình phẳng được tô đậm ở hình bên bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{11}{3}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{10}{3}$.



Lời giải.

Ta có diện tích phần tô đậm bằng $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\, dx - \int_2^4 (x-2)\, dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4 - 2 = \frac{10}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 925. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{với } x \le 1 \\ 4 - x & \text{với } x > 1 \end{cases}$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 2$

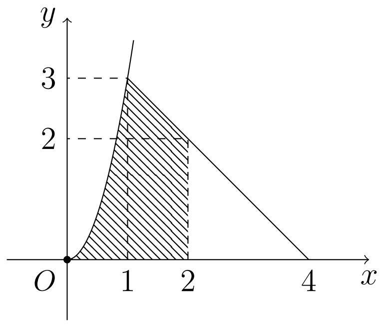
quanh trục hoành bằng

A. $\dfrac{29}{4}$. **B.** $\dfrac{29\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{122}{15}$. **D.** $\dfrac{122\pi}{15}$.

Lời giải.

Hình phẳng chính là phần tô đậm trong hình bên. Từ đó suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V=\pi\int_0^1 9x^4\,\mathrm{d}x+\pi\int_1^2(4-x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{122\pi}{15}$$



Chọn đáp án D □

Câu 926. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thoả mãn $\cot x\cdot f'(x)+f(x)=2cos^3x$ với mọi $x\neq k\pi$ và $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\in(1;4)$. **B.** $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\in(6;10)$. **C.** $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\in(3;5)$. **D.** $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\in(4;8)$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}&\cos x\cdot f'(x)+\sin x\cdot f(x)=2\cos^3 x\cdot\sin x\\ \Rightarrow\ &\frac{\cos x\cdot f'(x)+\sin x\cdot f(x)}{\cos^2 x}=2\sin x\cdot\cos x\\ \Rightarrow\ &\left(\frac{f(x)}{\cos x}\right)'=\sin 2x\\ \Rightarrow\ &\frac{f(x)}{\cos x}=\int\sin 2x\,\mathrm{d}x\\ \Rightarrow\ &f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x\cdot\cos x+C\cdot\cos x.\end{aligned}$$

Do $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$ nên ta có $C=\dfrac{9}{2}$ và $f(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x\cdot\cos x+\dfrac{9}{2}\cdot\cos x$.

Từ đó ta có $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{19}{8}=2,375\in(1;4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 927. Cho phần vật thể $(\Im)$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể $(\Im)$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể $(\Im)$.

A. $V=\dfrac{4}{3}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=4\sqrt{3}$. **D.** $V=\sqrt{3}$.

Lời giải.

Diện tích thiết diện: $S_\triangle=\dfrac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

$$V_\Im=\int_0^2\frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2 x^2(2-x)\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 928. Cho bốn mệnh đề sau

I. $\displaystyle\int \cos^2 x \, dx = \frac{\cos^3 x}{3} + C$.

II. $\displaystyle\int 3^x \, dx = 3^x \cdot \ln 3 + C$.

III. $\displaystyle\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

IV. Nếu $F(x), G(x)$ là các nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) = G(x)$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề **sai**?

A. 3. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 2.

Lời giải.

Ta lần lượt xét 4 mệnh đề đã cho

— Mệnh đề (I) sai vì $\displaystyle\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C$.

— Mệnh đề (II) sai vì $\displaystyle\int 3^x \, dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$.

— Mệnh đề (III) sai vì thiếu điều kiện $\alpha \neq -1$.

— Mệnh đề (IV) sai vì nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là có một họ nguyên hàm, chúng sai khác nhau một hằng số.

Vậy có 4 mệnh đề SAI.

Chọn đáp án C □

Câu 929. Cho hàm số $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$. Xét các mệnh đề:

I. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x . f(\sin x) \, dx = 2\int_0^1 x f(x) \, dx$.

II. $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(e^x)}{e^x} \, dx = \int_1^e \frac{f(x)}{x^2} \, dx$.

Mệnh đề đúng là

A. Chỉ I đúng. **B**. Cả I, II đúng. **C**. Cả I, II sai. **D**. Chỉ II đúng.

Lời giải.

Xét mệnh đề I. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x . f(\sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x \cos x . f(\sin x) \, dx$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \, dt = \cos x \, dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$. Từ đó:

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x . f(\sin x) \, dx = 2\int_0^1 t f(t) \, dt = 2\int_0^1 x f(x) \, dx$. Vậy I đúng.

Xét mệnh đề II. $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(e^x)}{e^x} \, dx$.

Đặt $t = e^x \Rightarrow \, dt = e^x \, dx \Rightarrow \, dx = \dfrac{dt}{t}$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = e$. Từ đó:

$\displaystyle\int_0^1 \frac{f(e^x)}{e^x} \, dx = \int_1^e \frac{f(t)}{t^2} \, dt = \int_1^e \frac{f(x)}{x^2} \, dx$. Vậy II đúng.

Do đó cả I, II đều đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 930. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6;6]$. Biết rằng $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 8$ và $\int\limits_{1}^{3} f(-2x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $\int\limits_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 11$. **B.** $I = 5$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 14$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ chẵn trên $[-6;6]$ nên $f(-2x) = f(2x)$, do đó $\int\limits_{1}^{3} f(2x)\,\mathrm{d}x = 3$.

Đặt $u = 2x \Rightarrow du = 2dx$, đổi cận: $x = 1 \Rightarrow u = 2, x = 2 \Rightarrow u = 6$; lúc này được

$$\int\limits_{1}^{3} f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{2}^{6} f(u)\,\mathrm{d}u = 3.$$

Vậy $\int\limits_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 14$.

Chọn đáp án D □

Câu 931. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $(f(x))^4 \cdot (f'(x))^2 \cdot (x^2 + 1) = 1 + (f(x))^3$ và $f(x) > 0$, $\forall x \in [0;1]$. Biết $f(0) = 2$, hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây.

A. $2 < f(1) < \frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{2} < f(1) < 3$. **C.** $\frac{3}{2} < f(1) < 2$. **D.** $3 < f(1) < \frac{7}{2}$.

Lời giải.

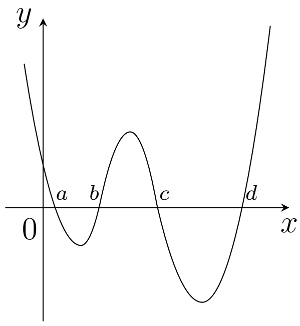
Ta có:

$$\begin{aligned}
& (f(x))^4 \cdot (f'(x))^2 \cdot (x^2+1) = 1 + (f(x))^3 \\
\Leftrightarrow\ & (f(x))^2 \cdot f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} = \sqrt{1 + (f(x))^3} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(f(x))^2 \cdot f'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^3}} \\
\Leftrightarrow\ & \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}\left(1+(f(x))^3\right)}{2\sqrt{1+(f(x))^3}} \\
\Leftrightarrow\ & \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} \times \left(\sqrt{1+(f(x))^3}\right)\Big|_0^1 \\
\Leftrightarrow\ & \ln\left(1+\sqrt{2}\right) = \frac{2}{3} \times \left(\sqrt{1+(f(1))^3} - 3\right) \\
\Leftrightarrow\ & f(1) \approx 2{,}605.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 932.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm a, b, c, d (hình bên). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.



A. $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$. **B.** $f(a) > f(c) > f(d) > f(b)$.

C. $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$. **D.** $f(c) > f(a) > f(d) > f(b)$.

Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có dấu của $f'(x)$ và bảng biến thiên như hình sau.

x	$-\infty$		a		b		c		d		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	$f(d)$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $f(a)$ và $f(c)$ cùng lớn hơn $f(b)$ và $f(d)$.

Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$.

S_2 là diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = 0, x = b, x = c$.

S_3 là diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = 0, x = c, x = d$.

Từ đồ thị ta thấy

— $S_1 < S_2 \Rightarrow \displaystyle\int\limits_b^a f'(x)\,\mathrm{d}x < \int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow f(a) - f(b) < f(c) - f(b) \Rightarrow f(a) < f(c)$.

— $S_2 < S_3 \Rightarrow \displaystyle\int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x < \int\limits_d^c f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow f(c) - f(b) < f(c) - f(d) \Rightarrow f(b) > f(d)$.

Vậy ta có $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$.

Chọn đáp án A □

Câu 933. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)$.

A. $x(x+1) + C$. **B.** $2x + 1 + C$. **C.** $x^3 + x^2 + C$. **D.** $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int x(x+1)\,\mathrm{d}x = \int (x^2 + x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 934. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, x = 0, x = 1$ và trục hoành Ox. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh bởi hình (H) quay quanh trục Ox.

A. $\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** π. **D.** $\sqrt{\pi}$.

Lời giải.

Thể tích $V = \pi \displaystyle\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 935. Tính $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

A. $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}+1$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **D.** $-1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1 = -\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^0 = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}+1$.

Chọn đáp án A □

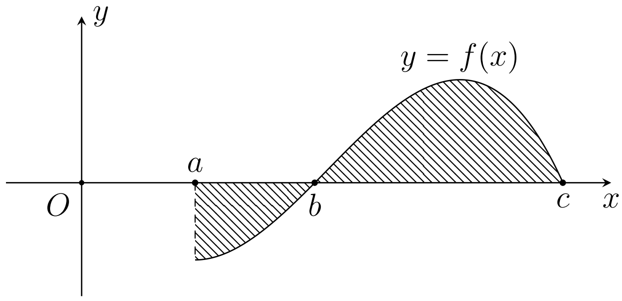
Câu 936. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích S của miền hình phẳng (miền gạch chéo trong hình vẽ bên) được tính bởi công thức

A. $S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.



Lời giải.

Nhận thấy, $f(x)\leqslant 0, \forall x\in[a;b]$ và $f(x)\geqslant 0, \forall x\in[b;c]$. Do đó, diện tích miền gạch chéo là

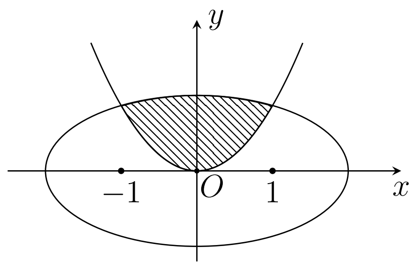
$$S=\int\limits_a^c \left|f(x)\right|\mathrm{d}x = -\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án D □

Câu 937.

Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và đường elip có phương trình $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ (phần gạch chéo trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

A. $\dfrac{2\pi+\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi+\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{3\pi}{4}$.



Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của nửa trên elip và parabol là

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x^2=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \Leftrightarrow 3x^4+x^2-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=-\dfrac{4}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Vì hình phẳng (H) đối xứng qua trục tung nên diện tích (H) là

$$S=2\int\limits_0^1\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\,\mathrm{d}x.$$

— Ta có $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{6}x^3\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

— Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t$. Khi đó,

$$\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{4-4\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = (2t+\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $S = \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{2\pi+\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 938. Cho $\int\limits_0^1 x\left[\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}\right]\mathrm{d}x = \frac{a^2\ln 2 - bc\ln 3 + c}{4}$, với $a,b,c\in\mathbb{N}$. Tính $T = a+b+c$.

A. $T = 13$. **B.** $T = 15$. **C.** $T = 17$. **D.** $T = 11$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^1 x\left[\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x\ln(x+2)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \frac{x}{x+2}\,\mathrm{d}x$.

— Tích phân thứ 2, $\int\limits_0^1 \frac{x}{x+2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1\left(1-\frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x = (x-2\ln|x+2|)\Big|_0^1 = 1-2\ln 3+2\ln 2$.

— Tích phân thứ 1, đặt $\begin{cases} u = \ln(x+2) \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ v = \frac{x^2}{2}-2 \end{cases}$.

Ta có

$$\int\limits_0^1 x\ln(x+2)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2-4}{2}\cdot\ln(x+2)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x-2}{2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{x^2-4}{2}\cdot\ln(x+2) - \frac{x^2}{4}+x\right]\Big|_0^1 = -\frac{3}{2}\ln 3 + 2\ln 2 + \frac{3}{4}.$$

Suy ra, $I = -\frac{7}{2}\ln 3 + 4\ln 2 + \frac{7}{4} = \frac{16\ln 2 - 14\ln 3 + 7}{4} \Rightarrow a = 4, b = 2, c = 7$. Vậy $T = 13$.

Chọn đáp án A □

Câu 939. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = \mathrm{e}$ và $(x+2)f(x) = xf'(x) - x^3, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $f(2)$.

A. $4\mathrm{e}^2+4\mathrm{e}-4$. **B.** $4\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}+1$. **C.** $2\mathrm{e}^3-2\mathrm{e}+2$. **D.** $4\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}+2$.

Lời giải.

Ta có

$$(x+2)f(x) = xf'(x) - x^3 \Leftrightarrow f'(x) - \frac{x+2}{x}f(x) = x^2. \tag{1}$$

Đặt $\frac{g'(x)}{g(x)} = -\frac{x+2}{x} \Rightarrow \ln g(x) = -x-2\ln x \Rightarrow g(x) = e^{-x-2\ln x} = \frac{1}{e^x\cdot x^2}$.

Từ (1), suy ra

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{\mathrm{e}^x\cdot x^2}\right]' = \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\mathrm{e}^x\cdot x^2} = -\mathrm{e}^{-x}+C.$$

Mà $f(1)=\mathrm{e} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=-\mathrm{e}^{-1}+C \Leftrightarrow C=1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Vậy, $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}-e^{-x}\right)\mathrm{e}^x\cdot x^2 \Rightarrow f(2)=4\mathrm{e}^2+4\mathrm{e}-4$.

Chọn đáp án A □

Câu 940. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=0$; $\displaystyle\int\limits_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. Tính $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$. **D.** $2-\mathrm{e}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=(x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x\\ v=x\mathrm{e}^x\end{cases}$.

Khi đó $\dfrac{e^2-1}{4}=x.\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1-\displaystyle\int\limits_0^1 x.e^x f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_0^1 x.e^x f'(x)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{e^2-1}{4}$.

Xét $\displaystyle\int\limits_0^1[f'(x)+x\mathrm{e}^x]^2\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x+2\int\limits_0^1 x\cdot\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=0$.

$\Rightarrow f'(x)=-x\mathrm{e}^x \Rightarrow f(x)=-\displaystyle\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(1-x)\mathrm{e}^x+C$.

Mà $f(1)=0$ nên $C=0$.

Do đó $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(1-x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(2-x)\mathrm{e}^x\Big|_0^1=2-\mathrm{e}$.

Chọn đáp án D □

Câu 941. Một ô tô đang chuyển động đều với vận tốc 15 m/s thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái xe đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-a\,(\mathrm{m/s^2}),(a>0)$. Biết ô tô chuyển động được 20m nữa thì dừng hẳn. Hỏi a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(3;4)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(6;7)$.

Lời giải.

Chọn gốc thời gian $t=0$ tại lúc ôtô bắt đầu đạp phanh.

Vận tốc $v(t)-v(0)=\displaystyle\int\limits_0^t -a\,\mathrm{d}t \Rightarrow v(t)=-at+15$.

Quãng đường $s(t)=\displaystyle\int\limits_0^t(-at+15)\,\mathrm{d}t=\dfrac{-at^2}{2}+15t$.

Ta có $\begin{cases}v(t)=0\\ s(t)=20\end{cases}. \Rightarrow \begin{cases}-at+15=0\\ \dfrac{-at^2}{2}+15t=20\end{cases} \Rightarrow t=\dfrac{8}{3} \Rightarrow a=\dfrac{15.3}{8}=\dfrac{45}{8}\in(5;6)$.

Chọn đáp án C □

Câu 942. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x\mathrm{e}^x$, trục hoành, hai đường thẳng $x=-2;x=3$ có công thức tính là

A. $S = \int\limits_{-2}^{3} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. **B**. $S = \int\limits_{-2}^{3} |x\mathrm{e}^x|\,\mathrm{d}x$. **C**. $S = \left|\int\limits_{-2}^{3} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right|$. **D**. $S = \pi\int\limits_{-2}^{3} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo công thức tính diện tích hình phẳng ta có $S = \int\limits_{-2}^{3} |x\mathrm{e}^x|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 943. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ và $f(-x) + 2018f(x) = \mathrm{e}^x$ $\forall x \in [-1;1]$. Tính $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2018\mathrm{e}}$. **B**. $\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}}$. **C**. $\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2019\mathrm{e}}$. **D**. 0.

Lời giải.

Ta có $f(-x) + 2018f(x) = \mathrm{e}^x$

$\Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} [f(-x) + 2018f(x)]dx = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{e}^x dx$

$\Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(-x)dx + 2018\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{e}^x dx$.

Đặt $t = -x \Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(-x)dx = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$.

Do đó ta có $2019\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \mathrm{e} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \dfrac{e^2-1}{2019\cdot\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 944. Tìm họ nguyên $F(x)$ của hàm số $y = f(x) = \sin 2x + 2x$.

A. $F(x) = \dfrac{\cos 2x}{2} + x^2 + C$. **B**. $F(x) = -\dfrac{\cos 2x}{2} + x^2 + C$.
C. $F(x) = \cos 2x + 2 + C$. **D**. $F(x) = -\cos 2x + x^2 + C$.

Lời giải.

$\int (\sin 2x + 2x)\,\mathrm{d}x = \int \sin 2x\,\mathrm{d}x + \int 2x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\cos 2x}{2} + x^2 + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 945. Cho $\int\limits_{0}^{2} x\ln(x+1)^{2017}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a}{b}\ln 3$, ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, $b > 0$). Tính $S = a - b$.

A. 6049. **B**. 6053. **C**. 1. **D**. 5.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{0}^{2} x\ln(x+1)^{2017}\,\mathrm{d}x = 2017\int\limits_{0}^{2} x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = 2017\cdot I$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2}\ln(x+1)\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x+1)\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 (x-1+\frac{1}{x+1})\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right)\right]\Big|_0^2 \\ &= \frac{3}{2}\ln 3. \end{aligned}$$

Do đó $\int\limits_0^2 x\ln(x+1)^{2017}\,\mathrm{d}x = 2017\cdot\frac{3}{2}\ln 3 = \frac{6051}{2}\ln 3 \Rightarrow a = 6051; b = 2; a - b = 6049.$

Chọn đáp án A □

Câu 946. Cho $\int\limits_1^3 \frac{(x+6)^{2017}}{x^{2019}}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{2018} - 3^{2018}}{6\cdot 2018}$. Tính a.

A. 7. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_1^3 \frac{(x+6)^{2017}}{x^{2019}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \frac{(x+6)^{2017}}{x^{2017}}\cdot\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \left(1+\frac{6}{x}\right)^{2017}\cdot\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = 1 + \frac{6}{x} \Rightarrow$ nếu $x = 1$ thì $t = 7$; nếu $x = 3$ thì $t = 3$; $\mathrm{d}t = -\frac{1}{6x^2}\,\mathrm{d}x.$

Khi đó $I = \frac{1}{6}\int\limits_3^7 t^{2017}\,\mathrm{d}t = \frac{7^{2018} - 3^{2018}}{6\cdot 2018} \Rightarrow a = 7.$

Chọn đáp án A □

Câu 947. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = (m-3)\,x^4 + (m+3)\,x^2 + \sqrt{m} + 1$ có 3 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải.

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 4x^3\,(m-3) + 2x\,(m+3) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có: $4x^3\,(m-3) + 2x\,(m+3) = 0\ \ (1).$

$\Leftrightarrow x\left[4x^2\,(m-3) + 2\,(m+3)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4x^2\,(m-3) + 2\,(m+3) = 0\ \ (2) \end{array}\right.$

(1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \dfrac{-2\,(m+3)}{4\,(m-3)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 3.$

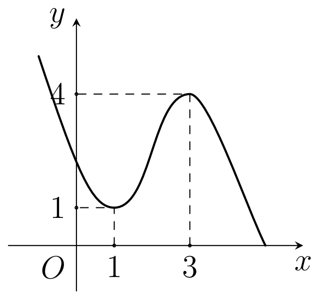
Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Cách tính nhanh: Hàm số bậc 4 có 3 cực trị $\Leftrightarrow a\cdot b < 0 \Leftrightarrow (m-3)\,(m+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3.$

Chọn đáp án A □

Câu 948.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số thực, có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\mathrm{e}^{x^2}) = m$ có ba nghiệm phân biệt ?



A. 3. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Đặt $u = \mathrm{e}^{x^2}$, vì $x^2 \geq 0$ nên $u \geq 1$.

Khi đó phương trình: $f(\mathrm{e}^{x^2}) = m$ trở thành phương trình $f(u) = m$ với $u \geq 1$.

Nhận xét: phương trình $u = \mathrm{e}^{x^2}$ có hai nghiệm phân biệt nếu $u > 1$, có 1 nghiệm nếu $u = 1$ và vô nghiệm nếu $u < 1$.

Vậy để phương trình $f(\mathrm{e}^{x^2}) = m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(u) = m$ có một nghiệm bằng 1 và một nghiệm lớn hơn 1.

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra chỉ có $m = 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 949. Một cốc đựng nước dạng hình trụ có chiều cao 15 cm đường kính đáy 8 cm và có mực nước trong cốc là 12 cm. Thả vào cốc nước 3 viên bi có cùng bán kính bằng 2 cm. Hỏi nước dâng cao cách mép cốc bao nhiêu ?

A. 1,5. **B.** 15. **C.** 1. **D.** 12,5.

Lời giải.

Tổng thể tích của 3 viên bi là $V = 3 \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = 32\pi \text{ cm}^3$.

Gọi h là chiều cao tăng thêm của mực nước khi cho 3 viên bi vào.

Ta có: $\pi \cdot 4^2 \cdot h = 32\pi \Leftrightarrow h = 2$ cm.

Do đó nước dâng cao cách mép cốc là $15 - (12 + 2) = 1$ cm.

Chọn đáp án C □

Câu 950. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx + 9}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{m^2 - 9}{(x + m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ -m \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9 < 0 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$.

Do đó có 4 giá trị nguyên của m là $-1; 0; 1; 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 951. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\dfrac{4}{9}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** $-\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Cách 1:

Từ điều kiện bài toán ta có: $f'(x) = x^3 f^2(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3$.

Khi đó ta có $\displaystyle\int\limits_1^2 \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 x^3\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)\Bigg|_1^2 = \left(\dfrac{x^4}{4}\right)\Bigg|_1^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(1)} - \dfrac{1}{f(2)} = \dfrac{15}{4}$.

Do $f(2) = -\dfrac{4}{9} \Rightarrow \dfrac{1}{f(1)} = \dfrac{15}{4} - \dfrac{19}{4} = -1 \Rightarrow f(1) = -1$.

Vậy $f(1) = -1$.

Cách 2:

Từ điều kiện bài toán ta có: $f'(x) = x^3 f^2(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3$.

Ta có $\displaystyle\int \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{-1}{f(x)} = \dfrac{x^4}{4} + C$.

Vì $f(2) = -\dfrac{4}{9} \Rightarrow C = \dfrac{3}{4} \Rightarrow f(x) = \dfrac{-4}{x^4+3}$.

Vậy $f(1) = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 952. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{cases}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{2}$. Gọi d là đường thẳng qua $A(-1;0;-1)$ cắt đường thẳng Δ_1 và tạo với đường thẳng Δ_2 một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$.
B. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$.
C. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{2}$.
D. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$.

Lời giải.

Gọi $M = d \cap \Delta_1 \Rightarrow$ tọa độ $M(1+2t; 2+t; -2-t)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (2+2t; 2+t; -1-t)$. Đường thẳng Δ_2 có véc tơ chỉ phương là $\vec{a} = (-1;2;2)$.

Khi đó $\cos(d;\Delta_2) = \dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{a}|}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\vec{a}|} = \dfrac{|-2t|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}}$.

Dễ nhận thấy d tạo với Δ_2 một góc lớn nhất $\Leftrightarrow t = 0$.

Khi đó d đi qua $A(-1;0;-1)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AM} = (2;2;-2)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 953. Với a, b là hai số thực khác 0 tùy ý, $\ln\left(a^2b^4\right)$ bằng

A. $2\ln|a| + 4\ln|b|$. **B.** $4(\ln|a| + \ln|b|)$. **C.** $2\ln a + 4\ln b$. **D.** $4\ln a + 2\ln b$.

Lời giải.

Ta có: $\ln\left(a^2b^4\right) = \ln a^2 + \ln b^4 = 2\ln|a| + 4\ln|b|$.

Chọn đáp án A □

Câu 954. Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \le n$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. **B.** $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{k!}$. **C.** $\mathrm{A}_n^k = n!$. **D.** $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n+k)!}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Chọn đáp án A □

Câu 955. Cho hình nón có bán kính đáy bằng a và diện tích toàn phần bằng $3\pi a^2$. Độ dài đường sinh l của hình nón bằng:

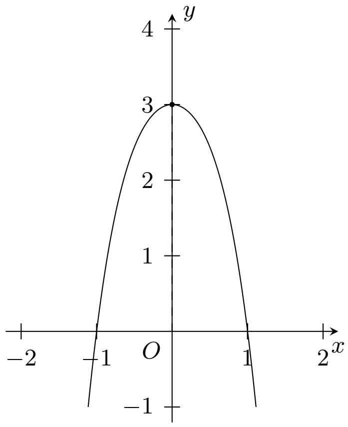
A. $l = 4a$. **B.** $l = a\sqrt{3}$. **C.** $l = 2a$. **D.** $l = a$.

Lời giải.

Ta có: $S_{\text{tp}} = \pi rl + \pi r^2 \Leftrightarrow 3\pi a^2 = \pi \cdot al + \pi a^2 \Leftrightarrow 2\pi a^2 = \pi al \Leftrightarrow l = 2a$.

Chọn đáp án C □

Câu 956. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$. **B.** $y = x^4 + 2x^2 - 3$. **C.** $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. **D.** $y = -x^2 + 3$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $\lim_{x\to+\infty} y = -\infty \Rightarrow$ Loại đáp án B.
Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ 1 và -1 nên chọn đáp án A vì:
Phương trình hoành độ giao điểm $-x^4 - 2x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 957. Mặt cầu bán kính a có diện tích bằng.

A. $\dfrac{4}{3}\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

Lời giải.

Diện tích mặt cầu bán kính a là $S = 4\pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 958. Cho khối lăng trụ $ABCA'B'C'$ có diện tích đáy ABC bằng S và chiều cao bằng h. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng:

A. $2Sh$. **B.** $\dfrac{1}{3}Sh$. **C.** $\dfrac{2}{3}Sh$. **D.** Sh.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ có chiều cao h và diện tích đáy bằng S là $V = S \cdot h$.

Chọn đáp án D □

Câu 959. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực trị tại điểm x_0

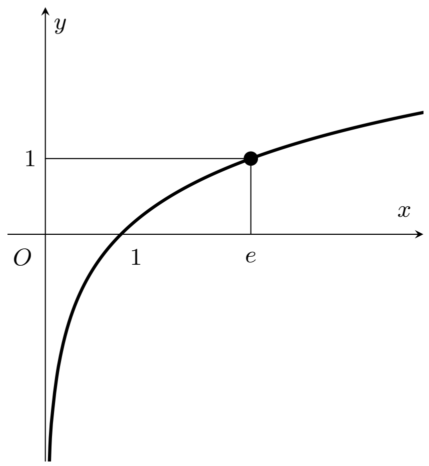
A. 0. **B**. -4. **C**. 1. **D**. -3.

Lời giải.

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 0$.
Chú ý: Không kết luận hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -3$.

Chọn đáp án A □

Câu 960. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây.



A. $y = \ln x$. **B**. $y = -e^x$. **C**. $y = |\ln x|$. **D**. $y = e^x$.

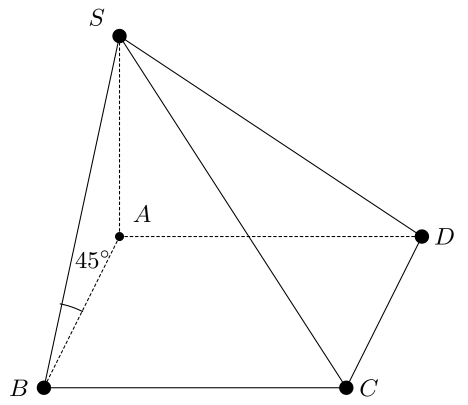
Lời giải.

Hàm số $\psi = |\ln x|$ và $y = e^x$ luôn nằm phía trên trục Ox, hàm số $y = -e^x$ luôn nằm phía dưới trục Ox, do đó loại các đáp án B, C, D.

Chọn đáp án A □

Câu 961. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và cạnh bên SB tạo với đáy một góc $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B**. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C**. $\dfrac{a^3}{3}$. **D**. a^3.



Lời giải.

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB lên $(ABCD)$.
$\Rightarrow \angle(SB;(ABCD)) = \angle(SB;AB) = \angle SBA = 45^\circ$ (Do $\angle SBA < 90^\circ$)
Xét tam giác vuông SAB ta có: $SA = AB \cdot \tan 45^\circ = a$ Vậy $V_{S\cdot ABCD} = \dfrac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 = \dfrac{a^3}{3}$
Chọn đáp án C □

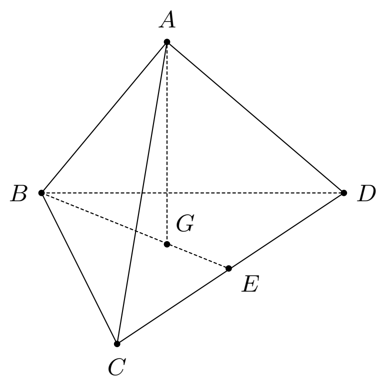
Câu 962. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{2}} \sqrt[8]{x}$

A. x^4. **B.** $x^{\frac{5}{16}}$. **C.** $x^{\frac{5}{8}}$. **D.** $x^{\frac{1}{16}}$.

Lời giải.
Ta có: $P = x^{\frac{1}{2}} \sqrt[8]{x} = x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}} = x^{\frac{5}{8}}$.
Chọn đáp án C □

Câu 963. Cho khối tứ diện đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích khối tứ diện đã cho bằng:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.



Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác $BCD \Rightarrow AG \perp (BCD)$.
Gọi E là trung điểm của CD. Do đó tam giác BCD đều có cạnh $2a$.
$\Rightarrow BE = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow BG = \dfrac{2}{3} BE = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$
Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông ABG ta có $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$
Tam giác BCD đều cạnh $2a \Rightarrow S_{BCD} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{A} = a^2\sqrt{3}$

Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}AG \cdot S_{BCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2a\sqrt{6}}{3} \cdot a^2\sqrt{3} = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$

Chọn đáp án D □

Câu 964. Tập hợp các điểm M trong không gian cách đường thẳng Δ cố định một khoảng R không đổi $(R > 0)$ là

A. Hai đường thẳng song song. **B**. Một mặt cầu.

C. Một mặt nón. **D**. Một mặt trụ.

Lời giải.

Tập hợp các điểm M trong không gian cách đường thẳng Δ cố định một khoảng R không đổi $(R > 0)$ là một mặt trụ.

Chọn đáp án D □

Câu 965. Số nghiệm thực của phương trình $\log_3(x^2 - 3x + 9) = 2$ bằng

A. 3. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có: $\log_3(x^2 - 3x + 9) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 9 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án D □

Câu 966. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $(u_1 = 3)$ và công sai $d = 2$.Giá trị của u_7 bằng

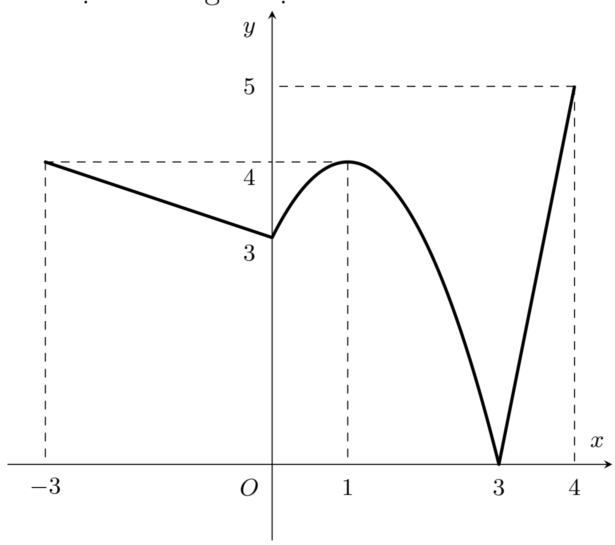
A. 15. **B**. 17. **C**. 19. **D**. 13.

Lời giải.

Ta có: $u_7 = u_1 + 6d = 3 + 6 \cdot 2 = 15$

Chọn đáp án A □

Câu 967. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3; 4]$. Tính $M + m$.



A. 5. **B**. 8. **C**. 7. **D**. 1.

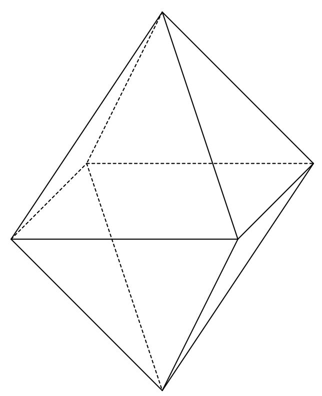
Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta dễ dàng suy ra được $M = \max_{[-3;4]} f(x) = 5; m = \min_{[-3;4]} f(x) = 0$

Vậy $M + m = 5 + 0 = 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 968. Hình bát diện đều có bao nhiêu đỉnh?



A. 10. **B**. 8. **C**. 12. **D**. 6.

Lời giải.

Hình bát diện đều có 6 đỉnh.

Chọn đáp án D □

Câu 969. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{2x-3}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có hệ số góc bằng

A. 5. **B**. $-\dfrac{1}{5}$. **C**. -5. **D**. $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ .Ta có:$y' = \dfrac{1.(-3) - 1.2}{(2x-3)^2} = \dfrac{-5}{(2x-3)^2}$

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là $y'(-1) = \dfrac{-5}{[2(-1)-3]^2} = -\dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 970. Cho đường thẳng Δ. Xét một đường thẳng l cắt Δ tại một điểm. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh đường thẳng Δ được gọi là:

A. Mặt trụ. **B**. Mặt nón. **C**. Hình trụ. **D**. Hình nón.

Lời giải.

Cho đường thẳng Δ. Xét một đường thẳng l cắt Δ tại một điểm. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh đường thẳng Δ được gọi là mặt nón.

Chọn đáp án B □

Câu 971. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Tồn tại một hình đa diện có số đỉnh bằng số mặt.

B. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh gấp đôi số mặt.

C. Số đỉnh của một hình đa diện bất kì luôn lớn hơn hoặc bằng 4.

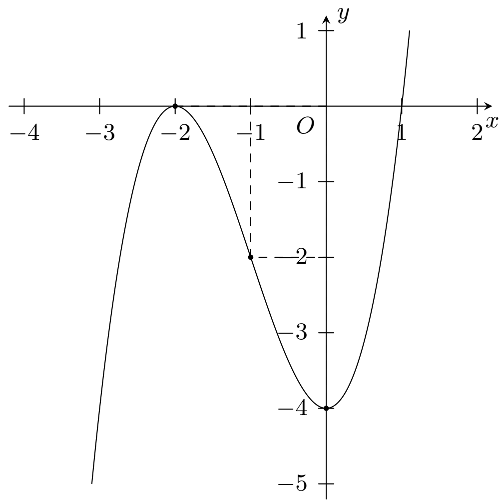
D. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số mặt.

Lời giải.

Đáp án A đúng vì tứ diện có 4 đỉnh và 4 mặt. Đáp án B đúng vì hình lập phương có 12 cạnh và 6 mặt. Đáp án C đúng, khối đa diện có ít đỉnh nhất là khối tứ diện, có 4 đỉnh.

Chọn đáp án D □

Câu 972. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; +\infty)$. **B.** $0; +\infty$. **C.** $(-2; 0)$. **D.** $(-4; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 973. Giá trị còn lại của một chiếc xe ô tô loại M thuộc hàng xe Toyota sau r năm kể từ khi mua được các nhà kinh tế nghiên cứu và ước lượng bằng công thức $G(t) = 600 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12t}$ (triệu đồng). Ông A mua một chiếc xe ô tô loại X thuộc hãng xe đó từ khi xe mới xuất xưởng và muốn bán sau một thời gian sử dụng với giá từ 300 triệu đến 400 triệu đồng. Hỏi ông A phải bán trong khoảng thời gian nào gần nhất với kết quả dưới đây kể từ khi mua?

A. Từ 2,4 năm đến 3,2 năm. **B.** Từ 3,4 năm đến 5,8 năm.

C. Từ 3 năm đến 4 năm. **D.** Từ 4,2 năm đến 6,6 năm.

Lời giải.

Theo đề bài ta có: $300 \le G(t) = 600\mathrm{e}^{-012t} \le 400 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le e^{-0.12t} \le \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \ln\dfrac{1}{2} \le -0,12t \le \ln\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow$ $3,4 \le t \le 5,8$

Vậy ông A phải bán trong khoảng thời gian từ 3,4 năm đến 5,8 năm.

Chọn đáp án B □

Câu 974. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [0; 2018]$ để bất phương trình $m + e^{\frac{\pi}{2}} \ge \sqrt[4]{\mathrm{e}^{2z} + 1}$ có nghiệm với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 2016. **B.** 2017. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải.

Để bất phương trình $m + e^{\frac{\pi}{2}} \ge \sqrt[4]{\mathrm{e}^{2x} + 1} = f(x)$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m + e^{\frac{\pi}{2}} \ge \max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[4]{\mathrm{e}^{2x} + 1}$ta có$f'(x) = \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} + 1\right)^{\frac{-3}{4}} \cdot 2\mathrm{e}^{2x} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

BDT:

t	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(t)$	$+$
$f(t)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy BPT nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m + e^{\frac{\pi}{2}} > 1 \Leftrightarrow m > 1 - e^{\frac{\pi}{2}} \approx -3,81$

Kết hợp với điều kiện đề bài $\Rightarrow \begin{cases} m \in [0; 2018] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ có 2019 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 975. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ bằng

A. 5. **B.** 35. **C.** 45. **D.** 7.

Lời giải.

Ta có $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 = \sum\limits_{k=0}^{7} \mathrm{C}_7^k (\sqrt[3]{x})^{7-k} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{7} \mathrm{C}_7^k x^{\frac{7-k}{3}} x^{-\frac{k}{4}} = \sum\limits_{k=0}^{7} \mathrm{C}_7^k x^{\frac{7-k}{3} - \frac{k}{4}}$

Số hạng không chứa x trong khải triển ứng với $\dfrac{7-k}{3} - \dfrac{k}{4} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{28 - 4k - 3k}{12} = 0 \Leftrightarrow k = 4$
Vậy số hạng không chứa x trong khai triển trên là $\mathrm{C}_7^4 = 35$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 976. Cho hàm số $y = 7^{\frac{x}{2}}$ có đồ thị(C) . Hàm số nào sau đây có đồ thị đối xứng với (C) qua đường thẳng có phương trình $y = x$.

A. $\log_7 x^2$. **B.** $\log_7 \dfrac{x}{2}$. **C.** $y = \dfrac{1}{2} \log_7 x$. **D.** $y = \log_{\sqrt{7}} x$.

Lời giải.

Ta có $y = 7^{\frac{x}{2}} = (\sqrt{7})^x$. Do đó hàm số có đồ thị đối xứng với (C) qua đường thẳng có phương trình $y = x$ là $y = \log_{\sqrt{7}} x$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 977. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_5 (6 - 5^x) = 1 - x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có:$\log_5 (6 - 5^x) = 1 - x \Leftrightarrow 6 - 5^x = 5^{1-x} = \dfrac{5}{5^x} \Leftrightarrow (5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = 5 \\ 5^x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $S = \{0; 1\}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 978. Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\tan \dfrac{\pi}{7}\right)^{x^2 - x - 9} \leq \left(\tan \dfrac{\pi}{7}\right)^{x-1}$ là:

A. $S = [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$. **B.** $S = (-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$.
C. $[-2; 4]$. **D.** $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $\left(\tan \dfrac{\pi}{7}\right)^{x^2 - x - 9} \leq \left(\tan \dfrac{\pi}{7}\right)^{x-1} \Leftrightarrow x^2 - x - 9 \geq x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ x \leq 2 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$
Chọn đáp án (D) □

Câu 979. Cho hàm số $y = f()$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x+2)^3(2-x)\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

A. 7. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Xét phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x+2)^3(2-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = 0$ vì đó là nghiệm bội hai của phương trình $f'(x) = 0$. Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 980. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6mx - 8$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$ để (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân?

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$x^3 - 3mx^2 + 6mx - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right) - 3mx(x-2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[x^2 + (2-3m)x + 4\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ g(x) = x^2 + (2-3m)x + 4 = 0 \end{array}\right. \qquad (1)$$

Để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2-3m)^2 - 16 > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 12m - 12 > 0 \\ 4 + 4 - 6m + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < \frac{-2}{3} \end{array}\right. \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < \frac{-2}{3} \end{array}\right.$$

Giả sử $x_1, x_2\,(x_1 < x_2)$ là 2 nghiệm phân biệt của phương trình $(*)$. Áp dụng định lí Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m - 2 \\ x_1x_2 = 4 \end{cases}$$

TH1: x_1,x_2,2 theo thứ tự lập thành cấp số nhân khi đó $2x_1 = x_2^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_2^2}{2} + x_2 = 3m - 2 \\ \dfrac{x_2^2}{2}x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ 4 = 3m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \text{ (không thỏa mãn)}$$

TH2: 2,x_1,x_2 theo thứ tự lập thành cấp số nhân, tương tự TH1 ta tìm được $m = 2$ (Không thỏa mãn).

Vậy kết hợp điều kiện đầu bài khi $m \in \left[-5; \dfrac{-2}{3}\right) \cup (2;5]$ thì có 8 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 981. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 4$ bằng

A. 4. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 4$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 4$ song song với trục hoành.

Dựa vào BBT ta thấy đường thẳng $y = 4$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt.

Vậy phương trình $f(x) = 4$ có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 982. Cho $\log_3 a = 5$ và $\log 3b = \dfrac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $I = 2\log_6\left[\log_5(5a)\right] + \log_{\frac{1}{9}} b^3$

A. $I = 3$. **B**. $I = -2$. **C**. $I = 1$. **D**. $I = log_6 5 + 1$.

Lời giải.

Ta có: $I = 2\log_6\left[\log_5(5a)\right] + \log_{\frac{1}{9}} b^3 = 2\log_6\left[1 + \log_5 a\right] - \dfrac{3}{2}\log_3 b = 2\log_6 6 - \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

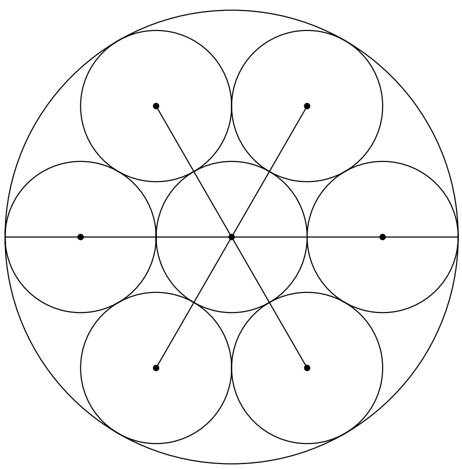
Chọn đáp án C □

Câu 983. Người ta xếp bảy viên bi là các khối cầu có cùng bán kính R vào một cái lọ hình trụ. Biết rằng các viên bi đều tiếp xúc với hai đáy, viên bi nằm chính giữa tiếp xúc với sáu viên bi xung quanh và mỗi viên bi xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Tính theo R thể tích lượng nước cần dùng để đổ đầy vào lọ sau khi đã xếp bi.

A. $6\pi R^3$. **B**. $\dfrac{26\pi R^3}{3}$. **C**. $18\pi R^3$. **D**. $\dfrac{28\pi R^3}{3}$.

Lời giải.

Ta mô phỏng hình vẽ đáy của hình trụ như sau:



Khi đó ta có $R_{ht} = 3R$ và chiều cao hình trụ chính bằng đường kính viên bi và $h = 2 \cdot R$ $\Rightarrow V_{kt} = \pi R_{kt}^2 h = \pi \cdot (3R)^2.2R = 18\pi R^3$

Thể tích 7 viên bi là $7 \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{28\pi R^3}{3}$. Vậy thể tích lượng nước cần dùng để đổ đầy vào lọ sau khi đã xếp bi là $18\pi R^3 - \dfrac{28\pi R^3}{3} = \dfrac{26\pi R^3}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 984. Hàm số $f(x) = \log_3(sinx)$ có đạo hàm là

A. $f'(x) = \dfrac{\cot x}{\ln 3}$. **B.** $f'(x) = \dfrac{\tan x}{\ln 3}$. **C.** $f'(x) = \cot x \ln 3$. **D.** $f'(x) = \dfrac{1}{\sin x \ln 3}$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{(\sin x)'}{\sin x \ln 3} = \dfrac{\cos x}{\sin x \ln 3} = \dfrac{\cot x}{\ln 3}$

Chọn đáp án A □

Câu 985. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\cos 2x) - 2m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{4}\right)$ là

A. $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$. **B.** $\left(0; \dfrac{1}{2}\right]$. **C.** $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(\dfrac{-2+\sqrt{2}}{4}; \dfrac{1}{4}\right)$.

Lời giải.

Đặt $t = \cos 2x$ vì $x \in \left(-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2x \in \left(-\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos 2x \in [-1; 0)$

Phương trình trở thành $f(t) = 2m + 1$ có nghiệm thuộc $\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right]$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 2m + 1$ song song với trục hoành.

Dựa vào BBT ta có để phương trình trở thành $f(t) = 2m + 1$ có nghiệm thuộc $\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right]$ thì $1 \leq 2m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \dfrac{1}{2}$

Vậy $m \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

Chọn đáp án A □

Câu 986. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) có tung độ nguyên dương sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng 3 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của đồ thị (C) .

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \backslash \{1\}$.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có tiệm cận đứng là $x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0\,(d_1)$ và tiệm cận ngang

$y = 2 \Leftrightarrow y - 2 = 0\,(d_2)$.

Gọi $M\left(m; \dfrac{2m+1}{m-1}\right) \in (C)$ ta có: $d\,(M; d_1) = |m-1|; d\,(M; (d_2)) = \left|\dfrac{2m+1}{m-1} - 2\right| = \dfrac{3}{|m-1|}$

Vì khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng 3lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang nên

$d\,(M; d_1) = 3d\,(M; (d_2)) \Leftrightarrow |m-1| = \dfrac{9}{|m-1|} \Leftrightarrow (m-1)^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \Rightarrow M(4;3)(tm) \\ m = -2 \Rightarrow M(-2;1)(tm) \end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 987. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $(d): y = -x+m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB \leq 2\sqrt{2}$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. -6. **B.** 0. **C.** 9. **D.** -27.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$-x + m = \dfrac{-2x+1}{x+1}(x \neq -1) \Leftrightarrow -x^2 - x + mx + m = -2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x - m + 1 = 0$

Để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 4(-m+1) > 0 \\ 1 + m + 1 - m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m - 3 > 0 \\ 3 \neq 0 (\text{luon dung}) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > -3 + 2\sqrt{3} \\ m < -3 - 2\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Gọi $A\,(x_A; -x_A + m)\,; B\,(x_B; -x_B + m)$ khi đó x_A, x_B là hai nghiệm phân biệt của phương trình $(*)$.

Áp dụng định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_A + x_B = m + 1 \\ x_A x_B = -m + 1 \end{cases}$

Ta có: $AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (-x_A + m + x_B - m)^2 = 2\,(x_A - x_B)^2 = 2\left[(x_A + x_B)^2 - 4x_1x_2\right]$

$= 2\,[(m+1)^2 - 4(-m+1)] = 2\,(m^2 + 6m - 3) \leq 8 \Leftrightarrow m^2 + 6m - 3 \leq 4 \Leftrightarrow -7 \leq m \leq 1$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-7; -3 - 2\sqrt{3}) \cup (-3 + 2\sqrt{3}; 1] \Leftrightarrow S = \{-7; 1\} \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 988. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. Giá trị $(\min\limits_{x \in [2;3]} y)^2 + (\max\limits_{x \in [2;3]} y)^2$.

A. 16. **B.** $\dfrac{45}{4}$. **C.** $\dfrac{25}{4}$. **D.** $\dfrac{89}{4}$.

Lời giải.

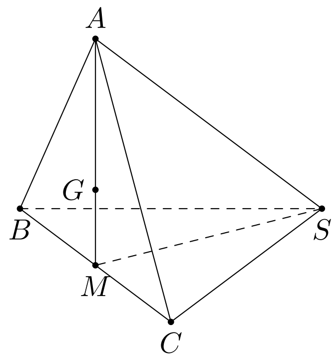
TXĐ: $D = \mathbb{R} \backslash \{1\}$ Ta có: $y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2} < 0 \forall x \in D \Rightarrow$ Hàm số đã cho nghịch biến trên $[2;3]$.

$\Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{x \in [2;3]} y = y(3) = \dfrac{5}{2} \\ \max\limits_{x \in [2;3]} y = 4 \end{cases} \Rightarrow (\min\limits_{x \in [2;3]} y)^2 + (\max\limits_{x \in [2;3]} y)^2 = (\dfrac{5}{2})^2 + 4^2 = \dfrac{89}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 989. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Mặt bên (SBC) vuông góc với đáy và $\widehat{CSB} = 90^o$. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$?

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.



Lời giải.

Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow GA = GB = GC$ (1) .

Gọi M là trung điểm của BC ta có :

$$\begin{cases}(ABC) \cap (SBC) = BC \\ (ABC) \perp (SBC) \\ AM \subset (ABC), AM \perp BC\end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp (SBC)$$

Ta lại có $\triangle SBC$ vuông tại $S \Rightarrow M$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSBC.

$\Rightarrow SM$ là trục của ΔSBC.

Chọn đáp án C □

Câu 990. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - x + 1)^{\frac{1}{3}}$

A. $y' = \dfrac{2x-1}{3\sqrt[3]{x^2-x+1}}$.

B. $y' = \dfrac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$.

C. $y' = \dfrac{2x-1}{\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$.

D. $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \dfrac{1}{3}(x^2-x+1)^{\frac{-2}{3}}(2x-1) = \dfrac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 991. Xét các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 \geq 4$ và $\log_{x^2+y^2}(4x - 2y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 3x + 4y - 5$ là $a + b\sqrt{5}$ với a, b là các số nguyên. Tính $T = a^3 + b^3$

A. $T = 0$. **B.** $T = 250$. **C.** $T = 152$. **D.** $T = 98$.

Lời giải.

Chọn D.

Chọn đáp án D □

Câu 992. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên $(1; 5)$ là

A. $m < 2$. **B.** $1 < m < 2$. **C.** $m \leq 2$. **D.** $1 \leq m \leq 2$.

Lời giải.

Ta có : $y' = 4x^3 - 4(m-1)x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m - 1 \end{array}\right.$

TH1: $m \leq 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(1; 5)$ thõa mãn.

TH2: $m > 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{m-1} \\ x = -\sqrt{m-1} \end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy để hàm số đồng biến trên $(1;5) \Leftrightarrow \sqrt{m-1} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 2$

$\Rightarrow 1 < m \leq 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 993. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
y	5	$\searrow$	$-\infty$ ‖ 4	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Dựa vào BBT ta thấy:

$\lim_{x\to-\infty} y = 5 \Rightarrow y = 5$ là TCN của đồ thị hàm số.

$\lim_{x\to 2^-} y = -\infty \Rightarrow x = 2$ là TCĐ của đồ thị hàm số.

$\lim_{x\to 3^-} y = -\infty; \lim_{x\to 3^+} y = +\infty \Rightarrow x = 3$ TCĐ của đồ thị hàm số.

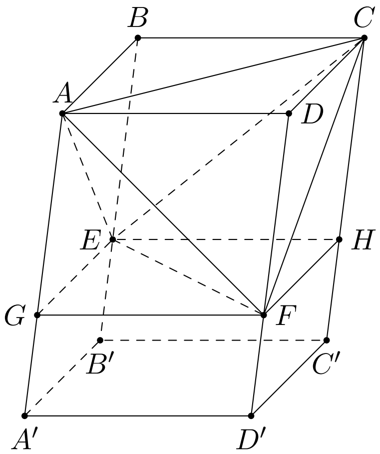
Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 994. Cho khối hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1. Gọi E, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh BB' và DD' sao cho $BE = 2EB'$,$DF = 2FD'$. Tính thể tích khối tứ diện $ACEF$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{2}{9}$. **C.** $\frac{1}{9}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải.



Lấy $G \in AA', H \in CC'$ sao cho $AG = 2GA', CH = 2HC'$, dễ thấy $(EGFH)//(ABCD)$ và $V_{ABCD \cdot EGFH} = \dfrac{2}{3} V_{ABCD \cdot A'C'D'} = \dfrac{2}{3}$.

Ta có: $V_{ABCD \cdot EGFH} = V_{AGEF} + V_{C \cdot EFH} + V_{FACD} + V_{EABC} + V_{ACEF}$

$\Rightarrow V_{ACEF} = V_{ABCD \cdot EGFH} - (V_{A \cdot GEF} + V_{C \cdot EFH} + V_{F \cdot ACD} + V_{E \cdot ABC})$

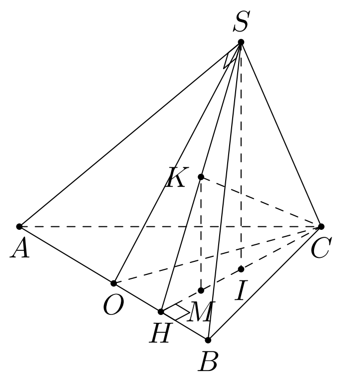
$= \dfrac{2}{3} - 4 \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$

Chọn đáp án B □

Câu 995. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C, CH vuông góc với AB tại H, I là trung điểm của đoạn HC. Biết SI vuông góc với mặt phẳng đáy, $\widehat{ASB} = 90^o$. Gọi O là trung điểm của đoạn AB, O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABSI$, α là góc giữa OO' và mặt phẳng (ABC). Tính $cosa$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Ta có: $SI \perp (ABC) \Rightarrow SI \perp HC$. Xét ΔSHC có SI là đường trung tuyến đồng thời là đường cao $\Rightarrow \Delta SHC$ cân tại $S \Rightarrow SH = SC \quad (1)$

Ta có: $\begin{cases} AB \perp HC \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHC) \Rightarrow AB \perp SH.$

Do ΔABC vuông tại C và ΔSAB vuông tại S, lại có O là trung điểm của $AB \Rightarrow OA = OB = OS = OC$.

Xét tam giác OSH và tam giác vuông OCH có: $OS = OC$ và OH cạnh chung.

$\Rightarrow \Delta OSH = \Delta OCH$ (Cạnh huỳnh - cạnh góc vuông) $\Rightarrow SH = CH \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta SHC$ đều.

Gọi K là trung điểm của SH ta có $CK \perp SH$.

Do $AB \perp (SHC)$ (Cmt) $\Rightarrow AB \perp CK \Rightarrow CK \perp (SAB)(3)$

Vì tam giác SAB vuông tại $S \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB. O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABSI \Rightarrow OO'$ là trục của $\Delta SAB \Rightarrow OO' \perp (SAB)$ (4).

Từ (3) và (4) $\Rightarrow CK//OO' \Rightarrow \angle(OO'; (ABC)) = \angle(CK; (ABC))$

Trong (SHC) kẻ $KM//SI(M \in CH) \Rightarrow CM$ là hình chiếu của CK trên $(ABC) \Rightarrow \angle(CK, (ABC)) = \angle(CK, CM) = \angle KCM = \angle KCH$

Do tam giác SHC là tam giác đều (cmt) $\Rightarrow$ Đường cao CK đồng thời là phân giác $\Rightarrow \angle KCH = 30°$.

Vậy $\angle(OO'; (ABC)) = 30° \Rightarrow \alpha = 30° \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 996. Gọi n là số các giá trị của tham số m để bất phương trình $(2m-4)\left(x^3+2x^2\right)+\left(m^2-3m+2\right)\left(x^2+2x\right)-\left(m^3-m^2-2m\right)(x+2)<0$ vô nghiệm. Giá trị của n bằng

A. $n=5$. **B**. $n=1$. **C**. $n=4$. **D**. $n=2$.

Lời giải.

Ta có: $(2m-4)\left(x^3+2x^2\right)+\left(m^2-3m+2\right)\left(x^2+2x\right)-\left(m^3-m^2-2m\right)(x+2)<0$

$\Leftrightarrow 2x^2(m-2)(x+2)+x(m-1)(m-2)(x+2)-m(m+1)(m-2)(x+2)<0$

$\Leftrightarrow (m-2)(x+2)\left[2x^2+(m-1)x-m(m+1)\right]<0$

$\Leftrightarrow (m-2)(x+2)(x+m)(2x-m-1)<0$

TH1: $m=2 \Rightarrow 0<0 \Rightarrow$ Bất phương trình vô nghiệm $\Rightarrow m=2$ (Thỏa mãn).

TH2: $m\neq 2$, vế trái của (*) $f(x)=(m-2)(x+2)(x+m)(2x-m-1)$ là đa thức bậc ba, do đó luôn tồn tại $x_0\in\mathbb{R}$ để $f\left(x_0\right)<0 \Rightarrow$ Bất phương trình luôn có nghiệm $\forall m\neq 2$.

Vậy tồn tại duy nhất $m=2$ để bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 997. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-6		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $f(2x-2)-2\mathrm{e}^x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B**. $(1;+\infty)$. **C**. $(-\infty;-1)$. **D**. $(-2;0)$.

Lời giải.

Đặt $g(x)=f(2x-2)-2e^x$ Ta có: $g'(x)=2f'(2x-2)-2\mathrm{e}^x=2\left[f'(2x-2)-\mathrm{e}^x\right]$

Với $x\in(0;1)$ ta có $\begin{cases}2x-2\in(-2;0)\Rightarrow f'(2x-2)<0\\ x\in(0;1)\Rightarrow e^x\in(1;e)>0\end{cases}$

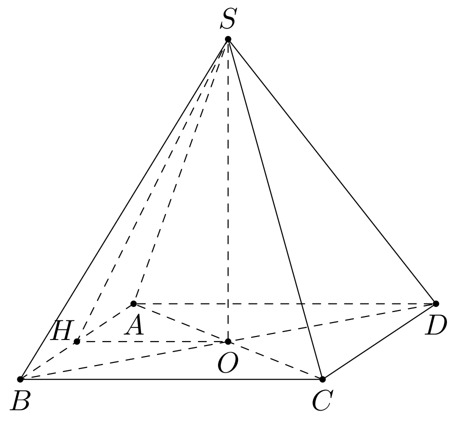
$\Rightarrow g'(x)=2\left[f'(2x-2)-\mathrm{e}^x\right]<0 \forall x\in(0;1)\Rightarrow$ Hàm số $f(2x-2)-2\mathrm{e}^x$ nghịch biến trên $(0;1)$

Chọn đáp án (A) □

Câu 998. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm của đáy và chiều cao $SO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$. Tính góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy

A. 90°. **B**. 60°. **C**. 30°. **D**. 45°.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB. Tam giác SAB cân tại $S \Rightarrow SH \perp AB$.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHO) \Rightarrow AB \perp OH$

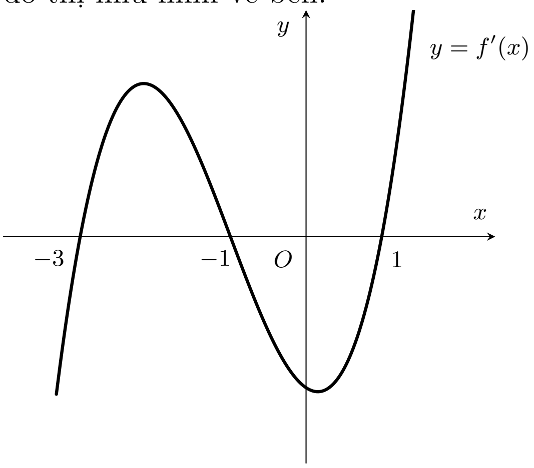
$\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \supset SH \perp AB \\ (ABCD) \supset OH \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow \angle((SAB);(ABCD)) = \angle(SH, OH) = \angle SHO$

Xét tam giác vuông SHO có $\tan \angle SHO = \dfrac{SH}{OH} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}AB}{\frac{AB}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle SHO = 60°$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 999. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + 2bx^3 - 3cx^2 - 4dx + 5h (a, b, c, d, h \in \mathbb{Z})$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tập nghiệm thực của phương trình $f(x) = 5h$ có số phần tử bằng

A. 3. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Ta có BBT của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘	$5h$	↘		↗	$+\infty$
									$y = 5h$		

Ta có: $f(0) = 5h$.

Số nghiệm của phương trình $f(0) = 5h$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 5h$ song song với trục hoành.

Dựa vào BBT ta thấy phương trình $f(x) = 5h$ có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 1000. Một đề kiểm tra trắc nghiệm 45 phút môn Tiếng Anh của lớp 10 là một đề gồm 25 câu hỏi độc lập, mỗi câu có 4 đáp án trả lời trong đó chỉ có một đáp án đúng. Mỗi câu trả lời đúng được 0,4 điểm, câu trả lời sai không được điểm. Bạn Bình vì học kém môn Tiếng Anh nên làm bài theo cách chọn ngẫu nhiên câu trả lời cho tất cả 25 câu. Gọi A là biến cố "Bình làm đúng k câu", biết xác suất của biến cố A đạt giá trị lớn nhất. Tính k.

A. $k = 5$. **B.** $k = 1$. **C.** $k = 25$. **D.** $k = 6$.

Lời giải.

Do mỗi câu có 4 đáp án trong đó chỉ có 1 đáp án đúng nên xác suất để trả lời đúng 1 câu là $\frac{1}{4}$ và xác suất để trả lời sai 1 câu là $\frac{3}{4}$. Gọi A là biến cố "Bình làm đúng k câu", xác suất của biến cố A là $P(A) = C_{25}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{25-k}$. Xét khai triển $1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)^{25} = \sum\limits_{k=0}^{25} C_{25}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{25-k}$

Giả sử $A_k = C_{25}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{25-k}$ là số hạng lớn nhất trong khai triển trên ta có

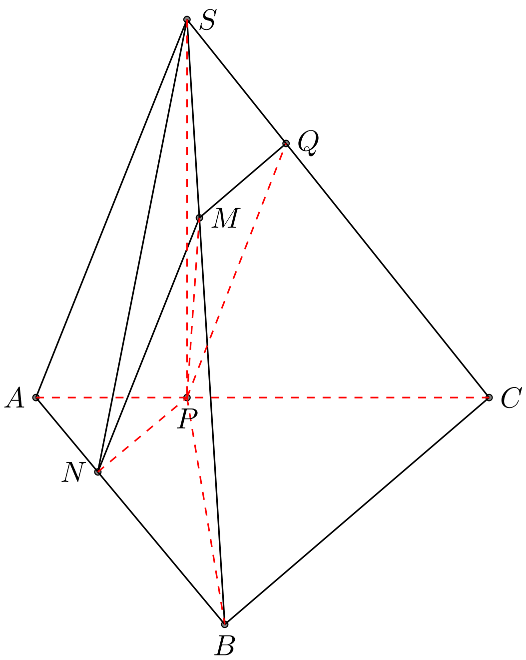
$$\begin{cases} A_k > A_{k-1} \\ A_k > A_{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{25}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{25-k} > C_{25}^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{26-k} \\ C_{25}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{25-k} > C_{25}^{k+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \left(\frac{3}{4}\right)^{24-k} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{26-k-3k}{k(26-k)} > 0 \\ \dfrac{3k+3-25+k}{(25-k)(k+1)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < \dfrac{26}{4} \\ k > \dfrac{22}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{22}{4} < k < \frac{26}{4}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 6$$

Chọn đáp án D □

Câu 1001. Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích V. M là một điểm trên cạnh SB. Thiết diện qua$M$ song song với đường thẳng SA và BC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích phần khối chóp $S.ABC$ chứa cạnh SA. Biết $\frac{V_1}{V} = \frac{20}{27}$. Tính tỉ số $\frac{SM}{SB}$.

A. $\frac{4}{4}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.



Lời giải.

Dựng $MN \parallel SA (N \in AB), NP \parallel BC (P \in AC); PQ \parallel SA (Q \in SC)$

Khi đó thiết diện cần tìm là $MNPQ$

Ta có $V_1 = V_{S \cdot \text{ANP}} + V_{S \cdot NPM} + V_{S \cdot PMQ}$

Đặt $\dfrac{SM}{SB} = x \Rightarrow \dfrac{SQ}{SC} = \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{AN}{AB} = x$

Ta có: $\dfrac{V_{S\cdot ANP}}{V_{SABC}} = \dfrac{S_{ANP}}{S_{ABC}} = \dfrac{AN}{AB} \cdot \dfrac{AP}{AC} = x^2 \Rightarrow V_{S\cdot ANP} = x^2V$

$\dfrac{V_{S,NPM}}{V_{S\cdot NPB}} = \dfrac{SM}{SB} = x(x<1) \Rightarrow V_{SNPM} = xV_{S\cdot NPB}$

$\dfrac{S_{BNP}}{S_{BAP}} = \dfrac{BN}{BA} = 1-x; \dfrac{S_{BAP}}{S_{ABC}} = \dfrac{AP}{AC} = x$

$\Rightarrow \dfrac{S_{BVP}}{S_{BAP}} \cdot \dfrac{S_{BAP}}{S_{ABC}} = (1-x)x \Rightarrow \dfrac{S_{BVP}}{S_{ABC}} = (1-x)x$

$\Rightarrow \dfrac{V_{SNPB}}{V_{S\cdot ABC}} = \dfrac{S_{BNP}}{S_{ABC}} = (1-x)x \Rightarrow V_{SNPB} = (1-x)xV$

$\Rightarrow V_{S\cdot NPM} = x^2(1-x)V$

$\dfrac{V_{S\cdot PMQ}}{V_{SPBC}} = \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SQ}{SC} = x^2$

$\dfrac{V_{S\cdot PBC}}{V_{S\cdot ABC}} = \dfrac{S_{PBC}}{S_{ABC}} = \dfrac{PC}{AC} = 1-x$

$\Rightarrow \dfrac{V_{S\cdot PMQ}}{V_{S\cdot ABC}} = x^2(1-x) \Rightarrow V_{S.PMQ} = x^2(1-x)V$

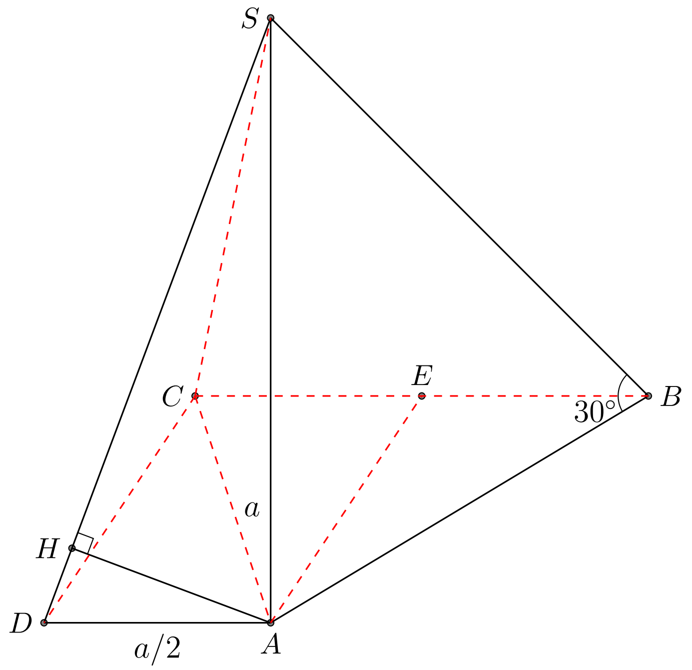
$\Rightarrow V_1 = V_{S\cdot ANP} + V_{S\cdot NPM} + V_{SPMQ} = \left(x^2 + 2x^2(1-x)\right)V \Rightarrow \dfrac{V_1}{V} = x^2 + 2x^2(1-x) = 3x^2 - 2x^3$

Mà $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{20}{27} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x^3 = \dfrac{20}{27} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 1002. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại C và $D, \widehat{ABC} = 30^o$. Biết $AC = a, CD = \dfrac{a}{2}, SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng.

A. $a\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Lời giải.

Kẻ $AE \perp BC (E \in BC)$ ta có: $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = CE$

$BE = AE \cdot \cot 30^\circ = \dfrac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow E$ là trung điểm của BC

$\Rightarrow d(B;(SCD)) = 2d(E;(SCD)) = d(A;(SCD))$

Trong (SAD) kẻ $AH \perp SD (H \in SD)$ ta có:

$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$

$\begin{cases} AH \perp CD \\ AH \perp SD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A;(SCD)) = AH$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAD ta có:

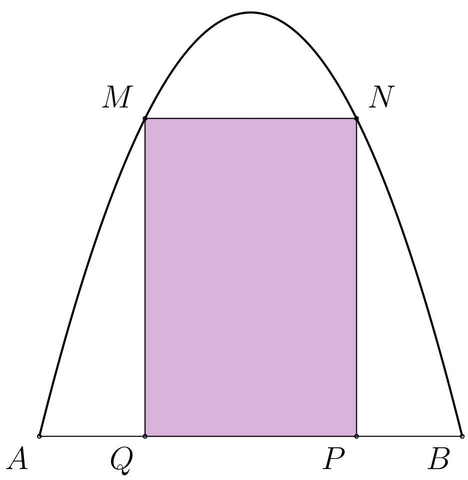
$$AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Vậy: $d(B;(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Chọn đáp án B □

Câu 1003 (2D3K3-2).

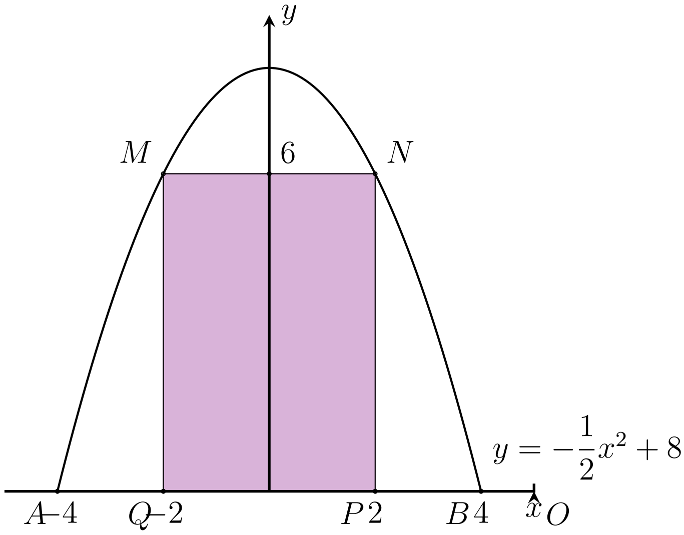
Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol có khoảng cách hai chân cổng là $AB = 5$ m. Người ta treo một tấm phông hình chữ nhật có hai đỉnh M, N nằm trên Parabol và hai đỉnh P, Q nằm trên mặt đất (như hình vẽ). Ở phần ngoài phông (phần không tô đen) người ta mua hoa để trang trí với chi phí cho 1 m^2 cần số tiền mua hoa là 200000 đồng cho 1 m^2. Biết $MN = 4$ m, $MQ = 6$ m. Hỏi số tiền dùng để mua hoa trang trí chiếc cổng gần với số tiền nào sau đây?



A. 3735300 đồng. **B**. 3437300 đồng. **C**. 3734300 đồng. **D**. 3733300 đồng.

Lời giải.

— Tính diện tích hình Parabol: Chọn hệ trục Oxy sao cho gốc O là trung điểm của AB như hình vẽ.



Khi đó $A(-4;0)$, $B(4;0)$, $M(-2;6)$ và $N(2;6)$. Khi đó phương trình Parabol có dạng $y = ax^2+c$ đi qua A và M nên có hệ $\begin{cases} 16a + c = 0 \\ 4a + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ c = 8 \end{cases}$. Diện tích Parabol là

$$S_1 \int_{-4}^{4} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 8\right) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{128}{3}.$$

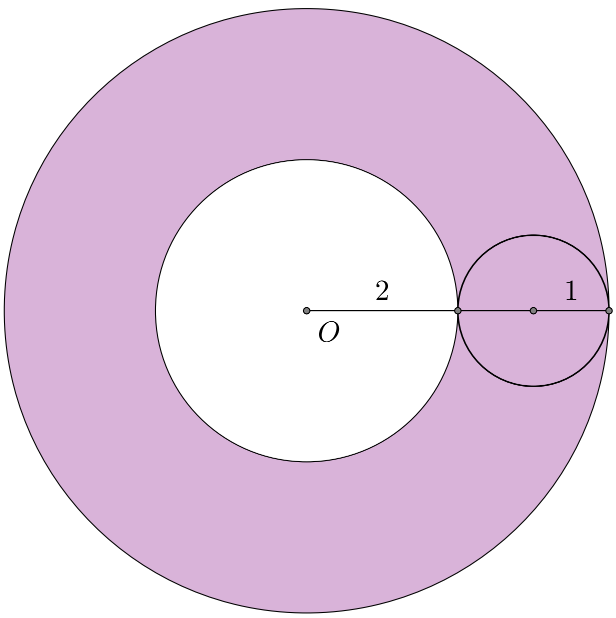
- Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là: $S_2 = MN \cdot MQ = 4 \cdot 6 = 24$.
- Diện tích phần trang trí hoa là $S = S_1 - S_2 = \dfrac{56}{3}$.
- Số tiền trang trí hoa là $S \cdot 200000 \approx 3733300$ đồng.

Chọn đáp án D □

Câu 1004 (2D4G1-2). Cho hai số phức z ,ω thay đổi sao cho $|z| = 3$, $|z - \omega| = 1$. Biết tập hợp điểm của số phức ω là hình phẳng H. Tính diện tích S của hình H.

A. $S = 20\pi$. **B.** $S = 12\pi$. **C.** $S = 4\pi$. **D.** $S =$.

Lời giải.



- Tập hợp số phức z là đường tròn (C) tâm O bán kính là 3.

— Bằng cách suy luận, với mỗi điểm trên (C) thì vẽ đường tròn bán kính 1, ta nhận thấy rằng tất cả các đường tròn tạo ra các vành khuyên như hình vẽ sau, đây chính là tập hợp biểu diễn số phức ω. Hình vành khuyên được giới hạn bởi đường tròn bán kính 4 và đường tròn bán kính 2 tâm O

— Diện tích hình vành khuyên đó là $\pi 4^2 - \pi 2^2 = 12\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 1005 (2D1K1-3). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx+1}{4x+m}$ luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định của hàm số?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** vô số.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{m}{4}\right\}$.

Ta có $y' = \dfrac{m^2-4}{(4x+m)^2}$. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi chỉ khi

$$m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Vì m chỉ nhận các giá trị nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Câu 1006. Đặt $\log_2 3 = a;\ \log_3 5 = b$. Khi đó $\log_6 15$ bằng

A. $\dfrac{a(b+1)}{a+1}$. **B.** ab. **C.** $\dfrac{a+b}{a+1}$. **D.** $\dfrac{a^2+b}{a(a+1)}$.

Lời giải.

Ta có $\log_6 15 = \dfrac{\log_2 15}{\log_2 6} = \dfrac{\log_2(5\cdot 3)}{\log_2(2\cdot 3)} = \dfrac{\log_2 5 + \log_2 3}{1+\log_2 3} = \dfrac{\log_2 3\cdot\log_3 5 + \log_2 3 + \log_2 3}{1+\log_2 3}$

$= \dfrac{ab+a}{a+1} = \dfrac{a(b+1)}{a+1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 1007. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;-3)$ và $B(1;0;-2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $3\sqrt{3}$. **B.** 11. **C.** $\sqrt{11}$. **D.** 27.

Lời giải.

$AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-0)^2 + (-3-(-2))^2} = \sqrt{11}$.

Chọn đáp án C □

Câu 1008. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (4m-3)x + 2017$. Tìm giá trị lớn nhất của tham số thực m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 2$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 1$.

Lời giải.

Tập xác định$\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = x^2 - 2mx + 4m - 3$. Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ có hữu hạn nghiệm). Điều này tương đương với $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = m^2 - 4m + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3$.

Suy ra giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 1009. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(x^2-5x+4)\sqrt{x-m}=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Phương pháp

Giải phương trình tích

Cách giải:

Điều kiện xác định $x-m\geq 0 \Leftrightarrow x\geq m$

$$(x^2-5x+4)\sqrt{x-m}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+4=0 \\ x-m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=1 \\ x=m \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x=m$ vô nghiệm hoặc có nghiệm có nghiệm $x=1, x=4 \Leftrightarrow 1\leq m<4$

Chọn đáp án C □

Câu 1010. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) biết cả hai đường thẳng $d_1: y=a_1x+b_1$,$d_2: y=a_2x+b_2$ đi qua điểm $I(1;1)$ và cắt đồ thị (C) tại 4 điểm tạo thành một hình chữ nhật. Khi $a_1+a_2=\dfrac{5}{2}$,giá trị biểu thức $P=b_1b_2$ bằng:

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

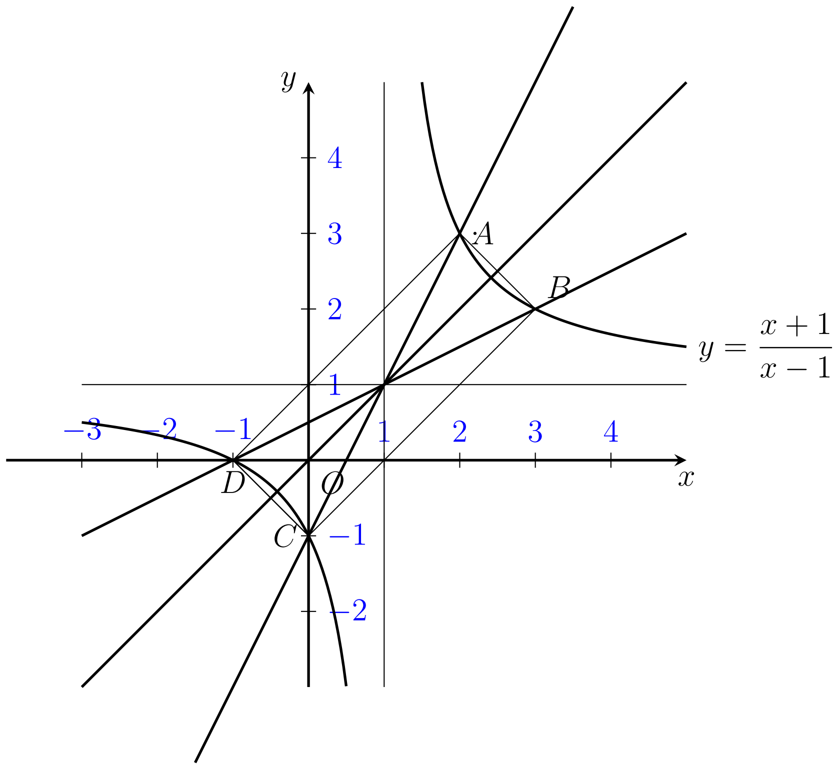
Gọi α,β lần lượt là các góc tạo bởi tia Ox và phần đồ thị phía trên trục Ox của d_1,d_2.

Khi đó ta có: $a_1=\tan\alpha$,$a_2=\tan\beta$
.

Cách giải:

Gọi α,β lần lượt là các góc tạo bởi tia Ox và phần đồ thị phía trên trục Ox của d_1,d_2.

Khi đó ta có: $a_1=\tan\alpha$,$a_2=\tan\beta$
.



Vẽ đồ thị như hình vẽ bên.

Theo tính chất đối xứng của đồ thị hàm số ta có: $\alpha+\beta=90^\circ$

$\Rightarrow a_1=\dfrac{1}{a_2}$

Lại có: $a_1+a_2=\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1=2 \\ a_2=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1=-1 \\ b_2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

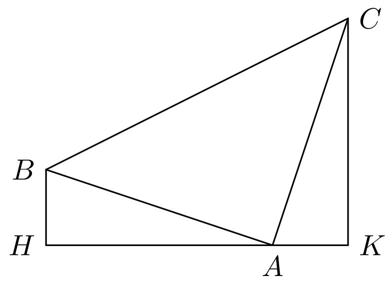
$\Rightarrow P=b_1.b_2=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 1011. Biết hai điểm $B(a;b)$, $C(c;d)$ thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh $A(2;0)$, khi đó giá trị biểu thức $T=ab+cd$ bằng:

A. 6. **B.** 0. **C.** -9. **D.** 8.

Lời giải.



Phương pháp

Sử dụng các tính chất của tam giác vuông cân.

Cách giải:

Gọi $B\left(a;2+\dfrac{2}{a-1}\right);C\left(c;2+\dfrac{2}{c-1}\right)\quad(a<1<c)$

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của B,C trên trục Ox $\Rightarrow H(a;0),K(c;0)$

$\triangle ABC$ vuông cân $\Rightarrow\begin{cases}AB=AC\\ \widehat{BAC}=90^\circ\end{cases}$

Ta có: $\widehat{BCA}=\widehat{CAK}+\widehat{ACK}=\widehat{BAH}+\widehat{ABH}$

Mà: $\widehat{BAH}+\widehat{CAK}=90^\circ$

$\Rightarrow\widehat{BAH}=\widehat{ACK}$

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAK$ ta có:

$\widehat{BAH}=\widehat{ACK}\quad(cmt)$

$AC=AB\quad(gt)$

$\triangle ABH=\triangle CAK\quad(ch-gn)$

$AH=CK;HB=AK$(các cạnh tương ứng bằng nhau)

Ta có: $AH\,|a-2|=2-1;\ AK=|c-2|;\quad(a<1)$

$BH=\left|2+\dfrac{2}{a+1}\right|;\ CK=\left|2++\dfrac{2}{c-1}\right|=2+\dfrac{2}{c-1}\quad(c>1)$

$\begin{cases}AH=CK\\HB=AK\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-a=2+\dfrac{2}{c-1}\\ \left|2+\dfrac{2}{a-1}\right|=|c-2|\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{1-c}\\ \left[\begin{array}{l}2+\dfrac{2}{a-1}=c-2\\2+\dfrac{2}{a-1}=2-c\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{1-c}\\ \left[\begin{array}{l}2+\dfrac{2}{\dfrac{2}{1-c}-1}=c-2\\2+\dfrac{2}{a-1}=\dfrac{2}{1-\dfrac{2}{1-c}}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$\begin{cases}b=-1\quad(tm)\\c=3\quad(tm)\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}B(-1;1)\\C(3;3)\end{cases}\Rightarrow T=(-1).1+3.3=8$

Chọn đáp án D □

Câu 1012. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(a;b)$. Phát biểu nào sau đây là **sai?**

A. $f'(x)<0,\forall x\in(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ gọi là nghịch biến trên $(a;b)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ gọi là nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)\le 0,\forall x\in(a;b)$ và $f'(x)=0$ tại hữu hạn giá trị $x\in(a;b)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $\forall x_1, x_2 \in (a;b) : x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a;b)$.

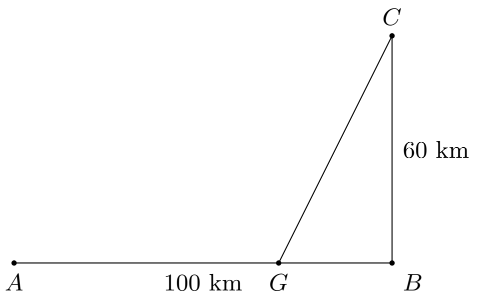
Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a;b)$ và $f'(x) = 0$ tại hữu hạn giá trị $x \in (a;b)$ nên D sai.

Chọn đáp án D □

Câu 1013.

Đường dây điện 110 KV kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra đảo (điểm C). Biết khoảng cách từ C đến B là 60 km, khoảng cách từ A đến B là 100 km. Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là 100 triệu đồng, chi phí mỗi km dây điện trên bờ là 60 triệu đồng. Hỏi điểm G cách điểm A bao nhiêu km để mắc dây điện từ A đến G, rồi từ G đến C chi phí thấp nhất? (Đoạn AB trên bờ, đoạn GC dưới nước).

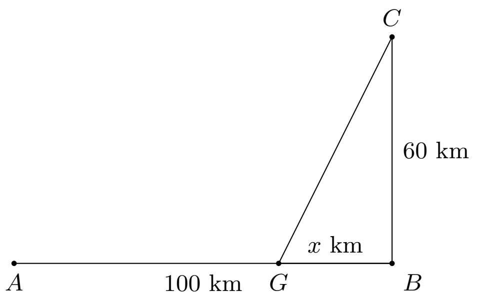


A. 50 km. **B**. 60 km. **C**. 55 km. **D**. 45 km.

Lời giải.

Đặt $GB = x$ km, $0 < x < 100$. Khi đó $GC = \sqrt{x^2 + 3600}$ km.
Số tiền để mắc dây điện từ A đến G và từ G đến C là

$$f(x) = 60(100 - x) + 100\sqrt{x^2 + 3600} \text{ triệu đồng.}$$



Ta có $f'(x) = \dfrac{100x}{\sqrt{x^2 + 3600}} - 60$ và

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{100x}{\sqrt{x^2+3600}} - 60 = 0 \\ &\Leftrightarrow 100x = 60\sqrt{x^2+3600} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 100 \\ 25x^2 = 9(x^2+3600) \end{cases} \Leftrightarrow x = 45. \end{aligned}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	0		45		100
y'		$-$	0	$+$	
y		↘	10800	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 45$ km, khi đó $AG = 100 - 45 = 55$ km.

Chọn đáp án C □

Câu 1014.]Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$.
Đường thẳng đi qua M, vuông góc với d và cắt Oz có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$.

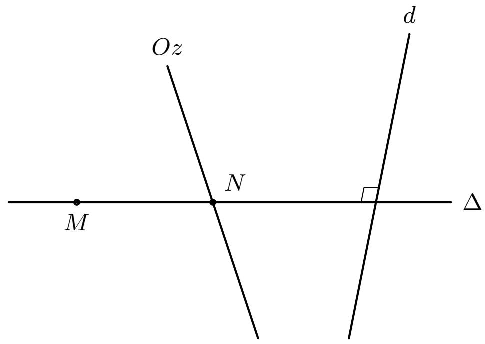
Lời giải.

— Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, N là giao điểm của Δ và Oz. Ta có $N(0; 0; z)$.

— Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1; 0; z - 1)$, $\vec{u}_d = (1; 2; 3)$.

— $\Delta \perp d \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow -1 + 3(z - 1) = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{4}{3} \Rightarrow N\left(0; 0; \dfrac{4}{3}\right)$.

— $\vec{u}_\Delta = \overrightarrow{MN} = \left(-1; 0; \dfrac{1}{3}\right) \parallel (-3; 0; 1) \Rightarrow \Delta\colon \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$.



Chọn đáp án A □

Câu 1015. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O,các đỉnh $B(a; 0; 0)$, $D(0; a; 0)$, $A'(0; 0; b)$ với $a, b > 0$ và $a + b = 2$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' .Thể tích của khối tứ diện $BDA'M$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{64}{27}$. **B.** $\dfrac{32}{27}$. **C.** $\dfrac{8}{27}$. **D.** $\dfrac{4}{27}$.

Lời giải.

Tọa độ điểm $C(a; a; 0), C'(a; a; b), M\left(a; a; \dfrac{b}{2}\right)$ suy ra $\overrightarrow{BA'} = (-a; 0; b), \overrightarrow{BD} = (-a; a; 0), \overrightarrow{BM} = \left(0; a; \dfrac{b}{2}\right)$, $\left[\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BD}\right] = (-ab; -ab; -b^2)$.

Nên $V_{BDA'M} = \dfrac{1}{6}\left[\left[\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BD}\right]\overrightarrow{BM}\right| = \dfrac{a^2b}{4}$.

Ta có $a \cdot a \cdot (2b) \leq \left(\dfrac{a + a + 2b}{3}\right)^3 = \dfrac{64}{27} \Rightarrow a^2b \leq \dfrac{32}{27} \Rightarrow V_{BDA'M} \leq \dfrac{8}{2}$

Chọn đáp án C □

Câu 1016. Cho $\displaystyle\int_0^1 \left(\dfrac{2x + 1}{x + 1}\right)^2 \mathrm{d}x = a + b\ln 2$ với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $2a + b$ bằng

A. -1. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 \left(\dfrac{2x + 1}{x + 1}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2 - \dfrac{1}{x + 1}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(4 - \dfrac{4}{x + 1} + \dfrac{1}{(x + 1)^2}\right) \mathrm{d}x$

$= \left(4 - 4\ln|x + 1| - \dfrac{1}{x + 1}\right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{9}{2} - 4\ln 2 \Rightarrow a = \dfrac{9}{2}, \mathrm{b} = -4 \Rightarrow P = 5.$

Chọn đáp án C □

Câu 1017. Cho S là tập hợp các số tự nhiên từ 1 đến 100. Chọn ngẫu nhiên độc lập hai số a và b thuộc tập hợp S (với mỗi phần tử của tập S có khả năng lựa chọn như nhau). Xác suất để số $x = 3^a + 3^b$ chia hết cho 5 bằng.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Các lũy thừa nguyên dương của 3 có tận cùng là $3, 9, 7$ và 1 với các khả năng xuất hiện bằng nhau khi số mũ chạy từ 1 đến 100 . Lập bảng các tổng của các số hàng đơn vị của 3^a và 3^b cho các kết quả như bảng dưới đây. Số các chữ số tận cùng là 0 sẽ là bội của 5 đều xuất hiện 4 lần trong tổng số 16, nên xác suất là $\dfrac{1}{4}$.

	3	9	7	1
3	6	2	0	3
9	2	8	6	0
7	0	6	4	8
1	4	0	8	2

Chọn đáp án D □

Câu 1018. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, trên cạnh SA lấy điểm M và đặt $\dfrac{SM}{SA} = x$. Giá trị x để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau là

A. $x = \dfrac{1}{3}$. **B.** $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **C.** $x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\dfrac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{2V_{SMBC}}{V} = \dfrac{SM}{SA} = x$$

$$\dfrac{V_{S.MCN}}{V_{S,ACD}} = \dfrac{2V_{SMCN}}{V} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SD} = x^2$$

$$\dfrac{2\left(V_{S.MCN} + V_{S.MBC}\right)}{V} = x + x^2 \Leftrightarrow \dfrac{2V_{SMBCN}}{V} = x + x^2 \Rightarrow \qquad 1 = x + x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 1019. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - m^3 - m$, với m là tham số. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $I(2; -2)$. Giá trị thực $m < 1$ để ba điểm I, A, B tạo thành một tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

A. $m = \dfrac{2}{17}$. **B.** $m = \dfrac{3}{17}$. **C.** $m = \dfrac{4}{17}$. **D.** $m = \dfrac{5}{17}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3m^2 - 3 = 3\left[(x-m)^2 - 1\right]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m+1 \\ x = m-1 \end{array}\right.$

Do đó, hàm số luôn có hai cực trị với mọi m.

Giả sử $A(m+1; -4m-2); B(m-1; -4m+2)$. Ta có $AB = 2\sqrt{5}, \quad \forall m \in \mathbb{R}$.

Mặt khác, vì $\triangle IAB$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \sqrt{5}$ nên từ $\dfrac{AB}{\sin\widehat{AIB}} = 2R$ suy ra $\sin\widehat{AIB} = \dfrac{AB}{2R} = 1 \Rightarrow AIB = 90^\circ$ hay $\triangle AIB$ vuông tại I.

Gọi M là trung điểm của AB, ta có $M(m; -4m)$ và $IM = \dfrac{1}{2}AB \Leftrightarrow IM^2 = \dfrac{AB^2}{4} = 5$

$\Leftrightarrow (m-2)^2 + (-4m+2)^2 = 5 \Leftrightarrow 17m^2 - 20m + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{3}{17}. \end{array}\right.$.

Vậy $m = \dfrac{3}{17}$.

Chọn đáp án B □

Câu 1020 (2H2K2-4). Một mô hình gồm các khối cầu xếp chồng lên nhau tạo thành một cột thẳng đứng. Biết rằng mỗi khối cầu có bán kính gấp đôi bán kính của khối cầu nằm ngay trên nó và bán kính khối cầu dưới cùng là 50 cm. Hỏi mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Mô hình có thể đạt được chiều cao tùy ý. **B**. Chiều cao mô hình không quá $1,5$ mét.

C. Chiều cao mô hình tối đa là 2 mét. **D**. Chiều cao mô hình dưới 2 mét.

Lời giải.

Gọi các quả cầu được xếp trong mô hình là n quả ($n \in \mathbb{N}^*$).

Suy ra bán kính các quả cầu tạo thành cấp số nhân có công bội là 2.

Gọi bán kính quả cầu trên cùng hay quả cầu nhỏ nhất là R_1 $(0 < R_1 < 50)$.

Suy ra bán kính quả cầu dưới cùng là $R_n = 50 = R_1 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow 2^n = \dfrac{100}{R_1}$.

Khi đó chiều cao của mô hình có thể là

$$h = 2S_n = \frac{2 \cdot R_1\left(2^n - 1\right)}{2-1} = 2R_1\left(\frac{100}{R_1} - 1\right) = 200 - 2R_1 < 200cm = 2m.$$

Vậy chiều cao của mô hình là dưới 2 mét.

Chọn đáp án D □

Câu 1021. Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{4}{x}\right)^{18}$ với $x \neq 0$.

A. $2^9\mathrm{C}_{18}^9$. **B**. $2^{11}\mathrm{C}_{18}^7$. **C**. $2^8\mathrm{C}_{18}^8$. **D**. $2^8\mathrm{C}_{18}^{10}$.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{4}{x}\right)^{18} = \displaystyle\sum_{k=0}^{18} \mathrm{C}_{18}^k \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^{18-k} \cdot \left(\dfrac{4}{x}\right)^k = \sum_{0}^{18} \mathrm{C}_{18}^k \cdot 2^{3k-18} \cdot x^{18-2k}$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{4}{x}\right)^{18}$ là $\mathrm{C}_{18}^k \cdot 2^{3k-18} \cdot x^{18-2k}$.

Số hạng không chứa x tương ứng với $18 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 9$. Suy ra hệ số của số hạng không chứa x là $2^9 \cdot \mathrm{C}_{18}^9$.

Chọn đáp án A □

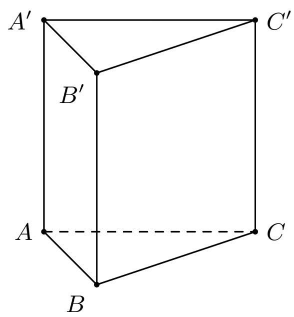
Câu 1022. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$, $AA' = \sqrt{3}a$. Tính thể tích của khối chóp $ABC.A'B'C'$ theo a.

A. $V = a^3$. **B**. $V = 3a^3$. **C**. $V = \dfrac{a^3}{4}$. **D**. $V = \dfrac{3a^3}{4}$.

Lời giải.

Diện tích tam giác đều ABC có cạnh $2a$ là $S = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}a^2$.

Suy ra thể tích của khối lăng trụ là $V = B \cdot h = \sqrt{3}a^2 \cdot \sqrt{3}a = 3a^3$.



Chọn đáp án B □

Câu 1023. Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2 + x - m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2007. **B.** 2010. **C.** 2009. **D.** 2008.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m} = 0$ nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang $y=0$. Để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có đúng 1 tiệm cận đứng.

Trường hợp 1. $x^2+x-m=0$ (1) có nghiệm kép $x_1=x_2\geq 3$, suy ra $\Delta = 1+4m=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{4}$ (loại do m nguyên).

Trường hợp 2. (1) có nghiệm x_1; x_2 thỏa $x_1<3, x_2=3$. Phương trình (1) nhận 3 là nghiệm khi $3^2+3-m=0 \Leftrightarrow m=12$. Thử lại thỏa mãn.

Trường hợp 3. (1) có nghiệm x_1; x_2 thỏa

$$\begin{aligned} & x_1<3<x_2 \\ \Leftrightarrow\ & 1\cdot f(3)<0 \\ \Leftrightarrow\ & 9+3-m<0 \\ \Leftrightarrow\ & m>12. \end{aligned}$$

Kết hợp 3 trường hợp ta được $m\geq 12$, lại có $m\in[-2019;2019]$ nên $m\in[12;2019]$ nên có 2008 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 1024. Cho đa thức $f(x)=(1+3x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \quad (n\in\mathbb{N}^*)$. Tìm hệ số a_3, biết rằng $a_1+2a_2+\cdots+na_n=49152n$.

A. $a_3=945$. **B.** $a_3=252$. **C.** $a_3=5670$. **D.** $a_3=1512$.

Lời giải.

Xét khai triển $(1+3x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \quad (1)$.

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được $3n(1+3x)^{n-1}=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1} \quad (2)$.

Thay $x=1$ vào (2) ta được

$3n\cdot 4^{n-1}=a_1+2a_2+\cdots+na_n \Leftrightarrow 3n\cdot 4^{n-1}=49152n \Leftrightarrow 4^{n-1}=4^7\Leftrightarrow n=8$.

Xét khai triển nhị thức Niu–tơn $(1+3x)^8=\sum\limits_{k=0}^{8}\mathrm{C}_8^k\cdot(3x)^k=\sum\limits_{k=0}^{8}\mathrm{C}_8^k\cdot 3^k\cdot x^k$.

Số hạng thứ 4 có $k=3$ nên $a_3=\mathrm{C}_8^3\cdot 3^3=1512$.

Chọn đáp án D □

Câu 1025. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{1}{3}|\cos^3 x|-3\cos^2 x+5|\cos x|-3+2m=0$ có đúng bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

A. $-\dfrac{3}{2}<m<-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}\leq m<\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}<m<\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}\leq m\leq -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t=\cos x$, $t\in(-1;1]$.

Phương trình trở thành $2m=-\dfrac{1}{3}|t^3|+3t^2-5|t|+3 \Leftrightarrow 2m=f(|t|)$ với $f(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+3t^2-5t+3$.

Ta có $f'(t)=-t^2+6t-5\leq 0, \forall t\in(-1;1]$.

Bảng biến thiên

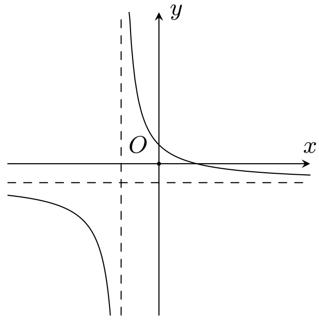
t	-1		0		1
$f'(t)$	0		-		0
$f(t)$	$\frac{34}{3}$	$\searrow$	3	$\searrow$	$\frac{2}{3}$
$f(\lvert t\rvert)$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{2}{3}$

Phương trình $\frac{1}{3}|\cos^3 x| - 3\cos^2 x + 5|\cos x| - 3 + 2m = 0$ có đúng bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ khi và chỉ khi phương trình $2m = f(|t|)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-1; 1]$. Điều này tương đương với $\frac{2}{3} < 2m < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < m < \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 1026.

Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề dưới đây.

A. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị trái dấu.

B. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

C. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị nằm bên phải trục tung.

D. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nằm bên trái trục tung.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận đứng $y = \frac{a}{c}$ nằm bên trái trục tung nên ta có $\frac{a}{c} < 0$ hay $ac < 0$.

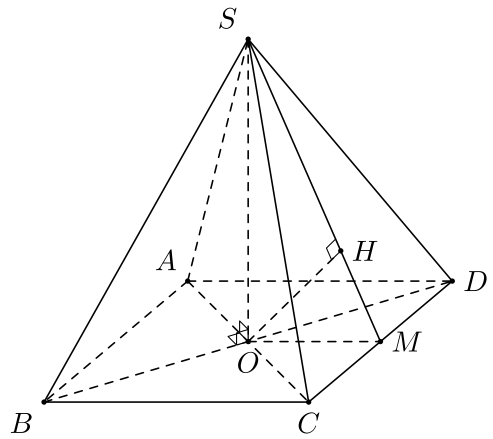
Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số bậc ba không có hoặc có hai cực trị. Hàm số bậc ba này có $ac < 0$ nên $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu hay hàm số bậc ba có hai điểm cực trị trái dấu.

Chọn đáp án A □

Câu 1027. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên theo a.

A. $d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B**. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C**. $d = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$. **D**. $d = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của CD.
Vì $S.ABCD$ là chóp tứ giác đều nên $SC = SD$.
Do đó $\triangle SCD$ cân tại $S \Rightarrow SM \perp CD$.
Lại có $ABCD$ là hình vuông nên ta có
$OM \perp CD$; $OM = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{a}{2}$.
Suy ra $CD \perp (SOM) \Rightarrow CD \perp OH \quad (1)$.
Trong mặt phẳng (SOM) kẻ $OH \perp SM \quad (2)$.
Từ (1) và (2) ta suy ra $OH \perp (SCD)$
nên $\mathrm{d}\left(O; (SCD)\right) = OH$

Xét $\triangle SOM$ vuông tại O (do $SO \perp (ABCD)$) có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{9}{2a^2}$. Suy ra $OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 1028. Cho tích phân $I = \displaystyle\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 32$. Tính tích phân $J = \displaystyle\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. 32. **B**. 64. **C**. 8. **D**. 16.

Lời giải.
Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$. Với $x = 0$ thì $t = 0$, $x = 2$ thì $t = 4$.
Suy ra $\displaystyle\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 32 = 16.$
Chọn đáp án D □

Câu 1029. Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log^2_{\frac{1}{3}} x - 5\log_3 x + 4 = 0$. Tính T.

A. $T = 4$. **B**. $T = -5$. **C**. $T = 84$. **D**. $T = 5$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}
&\log^2_{\frac{1}{3}} x - 5\log_3 x + 4 = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left(-\log_3 x\right)^2 - 5\log_3 x + 4 = 0\\
\Leftrightarrow\ &\log^2_3 x - 5\log_3 x + 4 = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&\log_3 x = 1\\ &\log_3 x = 4\end{aligned}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&x = 3\\ &x = 3^4 = 81.\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $3 + 81 = 84$.
Chọn đáp án C □

Câu 1030. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2a - \dfrac{5}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

A. $a = -\dfrac{3}{4}$. **B**. $a = \dfrac{4}{3}$. **C**. $a = -\dfrac{4}{3}$. **D**. $a = \dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \dfrac{1}{4}$.

Ta lại có $f(0) = 2a - \dfrac{5}{4}$.

Để hàm số liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} = 2a - \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 1031. Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

A. 6. **B.** 3. **C.** -26. **D.** -20.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3. \end{array}\right.$

$y'' = 6x - 6$, $y''(-1) = -12 < 0$, $y''(3) = 12 > 0$. Do đó hàm số đạt cực đại tại $x=-1$, giá trị cực đại $y = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 1032. Cho mặt cầu tâm O và tam giác ABC có ba đỉnh nằm trên mặt cầu với góc $\widehat{BAC} = 30^\circ$ và $BC = a$. Gọi S là điểm nằm trên mặt cầu, không nằm trên mặt phẳng (ABC) và thoả mãn $SA = SB = SC$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính thể tích V của khối cầu tâm O theo a.

A. $V = \dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi a^3$. **B.** $V = \dfrac{32\sqrt{3}}{27}\pi a^3$. **C.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$. **D.** $V = \dfrac{15\sqrt{3}}{9}\pi a^3$.

Lời giải.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Vì $SA = SB = SC$ nên $SI \perp (ABC)$.

Khi đó ta có $(SA, (ABC)) = \widehat{SAI} = 60^\circ$.

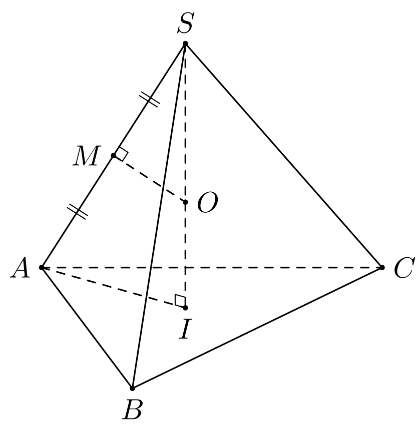
Xét $\triangle ABC$, theo định lí hàm số sin ta có

$\dfrac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2R_{\triangle ABC} \Leftrightarrow \dfrac{a}{\sin 30^\circ} = 2AI$

$\Rightarrow AI = a \Rightarrow SI = AI \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Ta có $\Delta SMO \sim \Delta SIA$, suy ra $\dfrac{SM}{SI} = \dfrac{SO}{SA}$.

Do đó $SO = \dfrac{SM \cdot SA}{SI} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.



Vậy thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}\right)^3 = \dfrac{32\sqrt{3}}{27}\pi a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 1033. Cho tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Tính tích phân $J = \displaystyle\int_0^2 [3f(x) - 2]\,\mathrm{d}x$.

A. $J = 6$. **B.** $J = 2$. **C.** $J = 8$. **D.** $J = 4$.

Lời giải.

Ta có $J = \displaystyle\int_0^2 [3f(x)-2]\,\mathrm{d}x = 3\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^2 \mathrm{d}x = 3\cdot 2 - (2x)\Big|_0^2 = 6 - 4 = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 1034. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{ax}$ $(a \neq 0)$ sao cho $F\left(\frac{1}{a}\right) = F(0) + 1$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $0 < a \leq 1$. **B.** $a < -2$. **C.** $a \geq 3$. **D.** $1 < a < 2$.

Lời giải.

Ta có $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $F\left(\frac{1}{a}\right) = F(0) + 1$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & F\left(\tfrac{1}{a}\right) - F(0) = 1 \\ \Leftrightarrow & \int\limits_0^{\frac{1}{a}} x^2 \cdot \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = 1. \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \end{cases}$. Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{a} \cdot \mathrm{e}^{ax}\Big|_0^{\frac{1}{a}} - \frac{2}{a} \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{a}} x\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{e}}{a^3} - \frac{2}{a} \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{a}} x\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{e}}{a^3} - \frac{2}{a} \cdot I_1 \text{ với } I_1 = \int\limits_0^{\frac{1}{a}} x\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \end{cases}$. Suy ra

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{x}{a} \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}\Big|_0^{\frac{1}{a}} - \frac{1}{a}\int\limits_0^{\frac{1}{a}} \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{e}}{a^2} - \frac{\mathrm{e}}{a^2} + \frac{1}{a^2} \\ &= \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

Do đó $I = \dfrac{\mathrm{e}}{a^3} - \dfrac{2}{a^3} = \dfrac{e-2}{a^3} = 1 \Rightarrow a = \sqrt[3]{\mathrm{e}-2} \Rightarrow 0 < a \leq 1$.

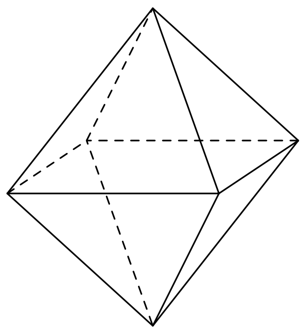
Chọn đáp án A □

Câu 1035. Hình bát diện đều thuộc loại khối đa diện đều nào sau đây?

A. $\{3, 4\}$. **B.** $\{3, 3\}$. **C.** $\{5, 3\}$. **D.** $\{4, 3\}$.

Lời giải.

Hình bát diện đều mỗi mặt có 3 cạnh và mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng bốn mặt nên nó thuộc loại $\{3, 4\}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 1036. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực đại tại $x = 0$.

A. $m = 1$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$; $y'' = 6x - 6$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y'(0) = 0 \\ y''(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$.

Thử lại, thay $m = 0$, hàm số trở thành $y = x^3 - 3x^2$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$. Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 1037. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$?

A. $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$. **B.** $y = \log_{\frac{\pi}{4}}\left(2x^2 + 1\right)$.

C. $y = \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$. **D.** $y = \log_{\frac{2}{3}} x$.

Lời giải.

Hàm số $y = \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ và có cơ số $0 < \frac{2}{\mathrm{e}} < 1$ nên hàm số nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

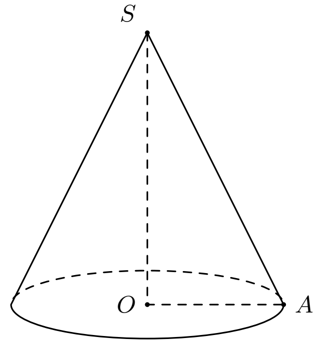
Chọn đáp án (C) □

Câu 1038. Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của một hình nón. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đó theo l, h, r.

A. $S_{\text{xq}} = 2\pi rl$. **B.** $S_{\text{xq}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. **C.** $S_{\text{xq}} = \pi rh$. **D.** $S_{\text{xq}} = \pi rl$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq} = \pi r l$.



Chọn đáp án D □

Câu 1039. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \frac{1}{4}$.

A. $S = [1; 2]$. **B.** $S = (-\infty; 1)$. **C.** $S = (1; 2)$. **D.** $S = (2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & -x^2 + 3x > 2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 3x + 2 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & 1 < x < 2. \end{aligned}$$

Vậy $S = (1; 2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 1040. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA' = \frac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó theo a.

A. $V = a^3\sqrt{\frac{3}{2}}$. **B.** $V = \frac{2a^3}{3}$. **C.** $V = \frac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. **D.** $V = a^3$.

Lời giải.

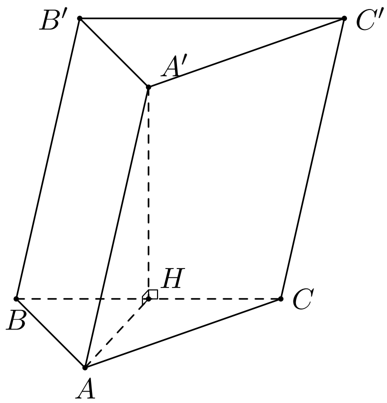
Gọi H là trung điểm BC.

Ta có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$\triangle A'AH$ vuông tại H nên ta có

$A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = \frac{3a^3}{4\sqrt{2}}$.



Chọn đáp án C □

Câu 1041. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

A. $\frac{937}{12}$. **B.** $\frac{343}{12}$. **C.** $\frac{793}{4}$. **D.** $\frac{397}{4}$.

Lời giải.

Xét phương trình $-x^3+12x=-x^2 \Leftrightarrow x^3-x^2-12x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \\ x=4. \end{array}\right.$

Diện tích S của hình phẳng (H) là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{-3}^{4} \left|x^3-x^2-12x\right| \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-3}^{0} \left|x^3-x^2-12x\right| \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{4} \left|x^3-x^2-12x\right| \mathrm{d}x \\ &= \left|\int\limits_{-3}^{0} \left(x^3-x^2-12x\right) \mathrm{d}x\right| + \left|\int\limits_{0}^{4} \left(x^3-x^2-12x\right) \mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right)\Big|_{-3}^{0}\right| + \left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right)\Big|_{0}^{4}\right| \\ &= \frac{937}{12}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 1042. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số không thể đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 1043. Tìm hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y=-\dfrac{7}{3}$.

A. $\dfrac{9}{5}$.
B. $-\dfrac{5}{9}$.
C. $\dfrac{5}{9}$.
D. -10.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{5}{(x-2)^2}$. Gọi $M\left(x_0;-\dfrac{7}{3}\right)$ là tiếp điểm, ta có

$$\begin{aligned} \frac{3-4x_0}{x_0-2}=-\frac{7}{3} &\Leftrightarrow 5x_0=-5 \\ &\Leftrightarrow x_0=-1. \end{aligned}$$

Vậy hệ số góc tiếp tuyến tại $M\left(x_0;-\dfrac{7}{3}\right)$ là $k=y'(-1)=\dfrac{5}{9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 1044. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$. **B.** $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. **D.** $F\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 3 - \sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{2\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}(\sin x) - \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Do đó $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{2}{\sin x} + \cot x + C$.

Ta có $F'(x) = f(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} \in (0;\pi)$.

x	0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	$F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\searrow$	

Hàm $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Suy ra $-\dfrac{2}{\sin\dfrac{\pi}{3}} + \cot\dfrac{\pi}{3} + C = \sqrt{3} \Leftrightarrow -\dfrac{4\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} + C = \sqrt{3} \Leftrightarrow C = 2\sqrt{3}$.

Do đó $F(x) = -\dfrac{2}{\sin x} + \cot x + 2\sqrt{3}$ nên $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 1045. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y = f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

Lời giải.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có $y' = (2x+3)f'(x^2 + 3x - m)$.

Vì $2x + 3 > 0, \forall x \in (0;2)$. Do đó, để hàm số $y = f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ thì $f'(x^2 + 3x - m) \geq 0, \forall x \in (0;2) \quad (*)$

Đặt $t = x^2 + 3x - m$. Vì $x \in (0;2)$ nên $t \in (-m; 10 - m)$.

Khi đó (*) trở thành $f'(t) \geq 0, \forall t \in (-m; 10 - m)$.

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có $\left[\begin{array}{l}10-m\leq -3\\ 1\leq -m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq 13\\ m\leq -1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}13\leq m\leq 20\\ -10\leq m\leq -1\end{array}\right.\\ m\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Suy ra $m\in\{-10;-9;\ldots;-2;-1;13;14;\ldots;19;20\}$. Vậy có 18 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.

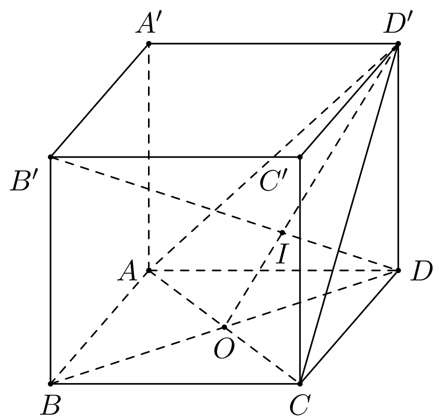
Chọn đáp án A □

Câu 1046. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tích của khoảng cách từ điểm B' và điểm D đến mặt phẳng $(D'AC)$ bằng $6a^2$ $(a>0)$. Giả sử thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là ka^3. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. $k\in(20;30)$. **B.** $k\in(100;120)$. **C.** $k\in(50;80)$. **D.** $k\in(40;50)$.

Lời giải.

Gọi x là độ dài cạnh của hình lập phương. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, I là giao điểm của $B'D$ và $D'O$, suy ra I là giao điểm của $B'D$ và $(D'AC)$.



Đặt $h=\mathrm{d}(D,(D'AC))$.

Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(B',(D'AC))}{\mathrm{d}(D,(D'AC))}=\dfrac{IB'}{ID}=2$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(B',(D'AC))=2\mathrm{d}(D,(D'AC))=2h$.

Theo giả thiết $2h^2=6a^2\Rightarrow h^2=3a^2$.

Lại có tứ diện $DD'AC$ là tứ diện vuông tại đỉnh D nên ta có

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DC^2}+\frac{1}{DD'^2}=\frac{3}{x^2}\Rightarrow h^2=\frac{x^2}{3}.$$

Suy ra $\dfrac{x^2}{3}=3a^2\Leftrightarrow x=3a$.

Do đó thể tích khối lập phương bằng $27a^3\Rightarrow k=27$.

Chọn đáp án A □

Câu 1047. Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu $u_1=-6$ và công sai $d=4$. Tính tổng S của 14 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

A. $S=46$. **B.** $S=308$. **C.** $S=644$. **D.** $S=280$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng ta được

$$S=\frac{14}{2}\left(2u_1+13d\right)=7\left(-6\cdot 2+13\cdot 4\right)=280.$$

Chọn đáp án D □

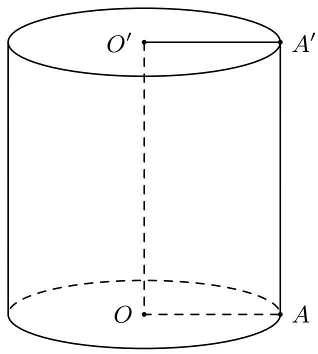
Câu 1048. Một khối trụ có thể tích bằng 25π. Nếu chiều cao của hình trụ tăng lên năm lần và giữ nguyên bán kính đáy thì được một hình trụ mới có diện tích xung quanh bằng 25π. Tính bán kính đáy r của hình trụ ban đầu.

A. $r=15$. **B.** $r=5$. **C.** $r=10$. **D.** $r=2$.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ ban đầu lần lượt là r, h.

Ta có hệ $\begin{cases} \pi r^2 h = 25\pi \\ 2\pi r 5h = 25\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} rrh = 25 \\ rh = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow r = 10.$



Chọn đáp án C □

Câu 1049. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x \cdot (\mathrm{e}^x)^{\mathrm{e}^y} \geq x^y \cdot (\mathrm{e}^y)^{\mathrm{e}^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & y^x \cdot (\mathrm{e}^x)^{\mathrm{e}^y} \geq x^y \cdot (\mathrm{e}^y)^{\mathrm{e}^x} \\ \Leftrightarrow\ & x \cdot \ln y + x \cdot \mathrm{e}^y \geq y \cdot \ln x + y \cdot \mathrm{e}^x \\ \Leftrightarrow\ & x \cdot (\ln y + \mathrm{e}^y) \geq y \cdot (\ln x + \mathrm{e}^x) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\ln y + \mathrm{e}^y}{y} \geq \frac{\ln x + \mathrm{e}^x}{x} \\ \Leftrightarrow\ & f(y) \geq f(x), \text{với hàm đặc trưng } f(t) = \frac{\ln t + e^t}{t}, t > 1. \end{aligned}$$

Ta có $f'(t) = -\dfrac{-\mathrm{e}^t t + \ln t + \mathrm{e}^t - 1}{t^2}$.

Đặt $g(t) = -\mathrm{e}^t t + \ln t + e^t - 1$.

Ta có $g'(t) = -e^t \cdot t + \dfrac{1}{t} < 0, \forall t > 1$ nên $f'(t) > 0, \forall t > 1$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Do đó $f(y) \geq f(x) \Leftrightarrow y \geq x \Leftrightarrow \log_x y \geq 1$.

Ta có $P = \log_x \sqrt{x \cdot y} + \log_y x = \dfrac{1}{2}(1 + \log_x y) + \dfrac{1}{\log_x y}$.

Đặt $u = \log_x y \Rightarrow u \geq 1$. Khi đó $P(u) = \dfrac{1}{2}(1+u) + \dfrac{1}{u}$, $P'(u) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{u^2} = 0 \Leftrightarrow u = \sqrt{2}$.

Bảng biến thiên:

x	-1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	$\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 1050. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \dfrac{1}{x}$.

A. $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$. **B.** $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.

C. $\dfrac{x^3}{3} - 3^x + \dfrac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$. **D.** $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3^x}{\ln 3} - \dfrac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(x^2 - 3^x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 1051. Tìm số hạng đầu u_1 của cấp số nhân (u_n) biết $u_1+u_2+u_3 = 168$ và $u_4+u_5+u_6 = 21$.

A. $u_1 = 24$. **B.** $u_1 = \frac{1344}{11}$. **C.** $u_1 = 96$. **D.** $u_1 = \frac{217}{3}$.

Lời giải.

Ta gọi q là công bội của cấp số nhân, khi đó ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 168 \\ u_1q^3 + u_1q^4 + u_1q^5 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 168 \\ q^3(u_1 + u_1q + u_1q^2) = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = \frac{1}{8} \\ u_1 + u_1q + u_1q^2 = 168 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ u_1 = 96. \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 1052. Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x-2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng có phương trình nào dưới đây?

A. $2x + y = 0$. **B.** $y = 2x$. **C.** $x - 2y = 0$. **D.** $x + 2y = 0$.

Lời giải.

Giao điểm hai đường tiệm cận là $I(2m; m)$ khi đó thấy I thuộc đường thẳng $x - 2y = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 1053. Tìm đạo hàm của hàm số $y = 3^{x^2-2x}$.

A. $y' = 3^{x^2-2x} \ln 3$. **B.** $y' = \frac{3^{x^2-2x}(2x-2)}{\ln 3}$.

C. $y' = 3^{x^2-2x}(2x-2)\ln 3$. **D.** $y' = \frac{3^{x^2-2x}}{\ln 3}$.

Lời giải.

Ta có $(3^{x^2-2x})' = (2x-2) \cdot 3^{x^2-2x} \ln 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 1054. Trong không gian cho tam giác OIM vuông tại I, góc $\widehat{IOM} = 45^\circ$ và cạnh $IM = a$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình nón tròn xoay. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón tròn xoay đó theo a.

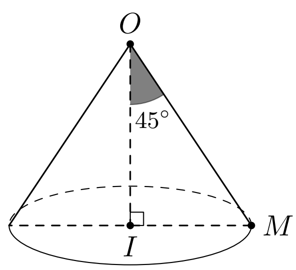
A. $S_{\text{xq}} = \pi a^2\sqrt{2}$. **B.** $S_{\text{xq}} = \pi a^2$. **C.** $S_{\text{xq}} = \pi a^2\sqrt{3}$. **D.** $S_{\text{xq}} = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\text{xq}} = \pi r l$, trong đó $r = IM = a$, $l = OM \cdot \sin\widehat{IOM} = \frac{IM}{OM}$

$\Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{a}{OM}$.

Suy ra $OM = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{\text{xq}} = \pi r l = \pi a \cdot a\sqrt{2} = \pi a^2\sqrt{2}$.



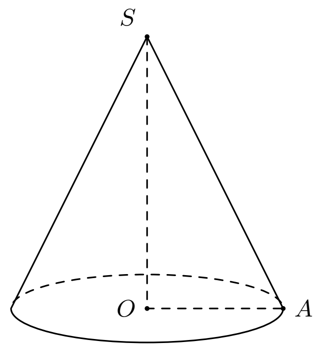
Chọn đáp án A □

Câu 1055. Cho khối nón có bán kính đáy $r = 3$, chiều cao $h = \sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón.

A. $V = \frac{3\pi\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V = 3\pi\sqrt{11}$. **C.** $V = \frac{9\pi\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V = 9\pi\sqrt{2}$.

Lời giải.

Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{1}{3}\sqrt{2}\pi 3^2 = \frac{9\pi\sqrt{2}}{3}$ (đvtt).



Chọn đáp án C □

Câu 1056. Cho tập hợp $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Gọi M là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau lấy từ S sao cho tổng các chữ số hàng đơn vị, hàng chục và hàng trăm lớn hơn tổng chữ số các hàng còn lại 3 đơn vị. Tính tổng T của các phần tử trong tập hợp M.

A. $T = 11.003.984$. **B.** $T = 36.011.952$. **C.** $T = 12.003.984$. **D.** $T = 18.005.967$.

Lời giải.

Gọi số có 6 chữ số thỏa mãn yêu cầu bài ra, có dạng $\overline{abcdef}$.

Ta có $a + b + c + 3 = d + e + f$, suy ra $\begin{cases} d + e + f = 12 \\ a + b + c = 9. \end{cases}$

Các tập số thỏa mãn $\{a, b, c\}$ là $\{1, 2, 6\}$, $\{2, 3, 4\}$ và $\{1, 3, 5\}$.

Các tập số tương ứng thỏa mãn bộ $\{d, e, f\}$ là $\{3, 4, 5\}$, $\{1, 5, 6\}$ và $\{2, 4, 6\}$.

Có ba tập số $\{a, b, c\}, \{d, e, f\}$ mà mỗi tập số thì các số a, b, c, d, e và f đều xuất hiện 12 lần.

Tổng số các số của tập M là

$$T = 3 \cdot 12\left[(a + b + c)(10^5 + 10^4 + 10^3) + (d + e + f)(10^2 + 10 + 1)\right] = 36.011.952.$$

Chọn đáp án B □

Câu 1057. Cho tích phân $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{b}{c} + a\ln 2$ với a là số thực và b, c là các số nguyên dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + c$.

A. $P = 6$. **B.** $P = -6$. **C.** $P = 5$. **D.** $P = 4$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$. Suy ra

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\ln x}{x}\bigg|_1^2 + \int\limits_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{x}\bigg|_1^2 \\ &= -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 2$ hay $P = 2a + 3b + c = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 1058. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m-1)x + 2m^2 + 1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 4mx + m - 1$.

Mặt khác $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2m}{3}\right)(x^2 - 4mx + m - 1) + \frac{2}{3}(m - 1 - 4m^2)x + \frac{4m^2}{3} + \frac{2m}{3} + 1$.

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m-1)x + 2m^2 + 1$ là

$$y = \frac{2}{3}(m - 1 - 4m^2)x + \frac{4m^2}{3} + \frac{2m}{3} + 1 \quad (\Delta).$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm mà đường thẳng $y = \frac{2}{3}(m - 1 - 4m^2)x + \frac{4m^2}{3} + \frac{2m}{3} + 1$ luôn đi qua.

Khi đó $y_0 = \frac{2}{3}(m - 1 - 4m^2)x_0 + \frac{8m^2}{3} - \frac{2m}{3} + 1 \Leftrightarrow (1 - x_0)(\frac{8m^2}{3} - \frac{2m}{3} + 1) + \frac{1}{3} - y_0 = 0$.

Suy ra $x_0 = 1, y_0 = \frac{1}{3}$. Khi đó $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ hay $OM = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên d. Khi đó $\mathrm{d}(O, \Delta) = OH \leq OM$.

Vậy khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m-1)x + 2m^2 + 1$ là $OM = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 1059. Gieo đồng thời hai con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất P để hiệu số chấm trên các mặt xuất hiện của hai con súc sắc bằng 2.

A. $P = \frac{1}{3}$. **B.** $P = \frac{2}{9}$. **C.** $P = \frac{1}{9}$. **D.** $P = 1$.

Lời giải.

Ta có số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$ phần tử.

Gọi a $(1 \leq a \leq 6)$ là số chấm trên mặt của con súc sắc đầu tiên gieo được.

Suy ra số chấm trên mặt của con súc sắc thứ hai phải là $a + 2$ hoặc $a - 2$.

Trường hợp 1. Con súc sắc thứ hai gieo mặt có $a + 2$ chấm. Khi đó $\begin{cases} 1 \leq a + 2 \leq 6 \\ 1 \leq a \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 4$.

Trường hợp 2. Con súc sắc thứ hai gieo mặt có $a - 2$ chấm. Khi đó $\begin{cases} 1 \leq a - 2 \leq 6 \\ 1 \leq a \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq a \leq 6$.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \frac{4 + 4}{36} = \frac{2}{9}$.

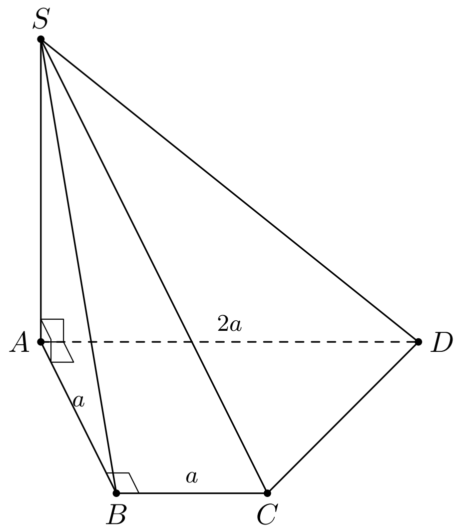
Chọn đáp án B □

Câu 1060. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B; có $AB = a$, $AD = 2a$, $BC = a$. Biết rằng $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.BCD$ theo a.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = 2a^3\sqrt{2}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.

Diện tích đa giác đáy là



$$S_{ABCD} = \frac{(AD + BC) \cdot AB}{2} = \frac{(a + 2a) \cdot a}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp là

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} . \frac{3a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Mặt khác, ta có thể tích

$$V_{S.ABD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot 2a = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

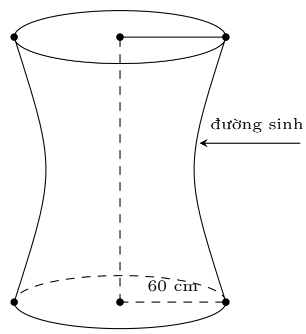
Vậy thể tích V của khối chóp $S.BCD$ là

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2} - \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 1061.

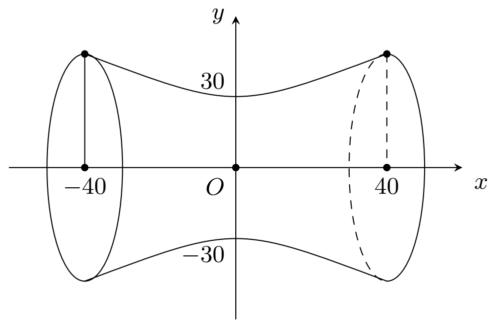
Cho một chiếc trống như hình vẽ, có đường sinh là nữa elip được cắt bởi trục lớn với độ dài trục lớn bằng 80 cm, độ dài trục bé bằng 60 cm và đáy trống là hình tròn có bán kính bằng 60 cm. Tính thể tích V của trống (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



A. $V = 344.963\ \text{cm}^3$.
B. $V = 344.964\ \text{cm}^3$.
C. $V = 20.8347\ \text{cm}^3$.
D. $V = 20.8346\ \text{cm}^3$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó chiếc trống là hình tròn xoay được sinh bởi một nửa elip, dưới của elip có phương trình là $\dfrac{x^2}{40^2} + \dfrac{(y-60)^2}{30^2} = 1$. Khi đó nửa đường elip dưới có phương trình $y = 60 - \dfrac{3}{4}\sqrt{40^2 - x^2}$.



Vậy thể tích của chiếc trống là

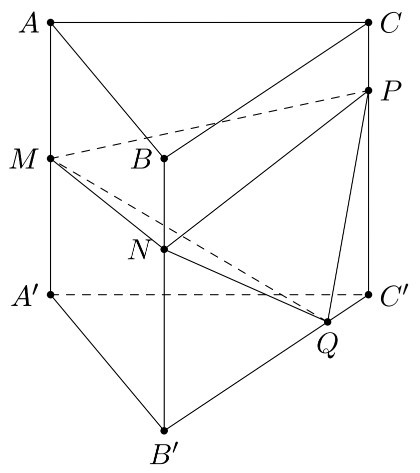
$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int\limits_{-40}^{40} \left(60 - \frac{3}{4}\sqrt{40^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &\approx 344.964\ \text{cm}^3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 1062. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N,P, Q lần lượt là các điểm thuộc cạnh AA', BB', CC', $B'C'$ thỏa mãn $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{C'Q}{C'B'} = \dfrac{1}{5}$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối tứ diện $MNPQ$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{11}{30}$.
B. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{11}{45}$.
C. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{19}{45}$.
D. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{22}{45}$.

Lời giải.



Ta có $V_{M.NPQ} = V_{A.NPQ}$ và

$$\begin{aligned} S_{NPQ} &= S_{BCB'C'} - S_{BCP} - S_{PBN} - S_{PQC'} - S_{B'QN} \\ &= S_{BCB'C'} - \frac{1}{8}S_{BCB'C'} - \frac{1}{6}S_{BCB'C'} - \frac{3}{40}S_{BCB'C'} - \frac{4}{15}S_{BCB'C'} \\ &= \frac{11}{30}S_{BCB'C'}. \\ \Rightarrow & V_{A.NPQ} = \frac{11}{30}V_{BCB'C'}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{V_{A.NPQ}}{V_2} = \frac{11}{30} \cdot \frac{V_{BCB'C'}}{V_2} \\ &= \frac{11}{30} \cdot \frac{V_2 - V_{A.A'B'C'}}{V_2} = \frac{11}{30} \cdot \frac{V_2 - \frac{1}{3}V_2}{V_2} \\ &= \frac{11}{45}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 1063. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \sqrt{4 - x^2}$. Tính tổng $M + m$.

A. $M + m = 2 - \sqrt{2}$.
B. $M + m = 2(1 + \sqrt{2})$.
C. $M + m = 2(1 - \sqrt{2})$.
D. $M + m = 4$.

Lời giải.

Điều kiện : $-2 \leq x \leq 2$.

Ta có $y' = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{4 - x^2} = 0 \quad (1)$.

Giải phương trình (1) và đối chiếu với điều kiện có nghiệm $x = -\sqrt{2}$.

Do đó $y(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}; y(2) = 2; y(-2) = -2$.

Vậy $M = y(2) = 2; m = y(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$, suy ra $M + m = 2(1 - \sqrt{2})$.

Chọn đáp án C □

Câu 1064. Tính giới hạn $L = \lim \dfrac{n^3 - 2n}{3n^2 + n - 2}$.

A. $L = +\infty$.
B. $L = 0$.
C. $L = \dfrac{1}{3}$.
D. $L = -\infty$.

Lời giải.

Ta có $L=\lim\dfrac{n^3-2n}{3n^2+n-2}=\lim\dfrac{n^3\left(1-\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)}=\lim\left[n\cdot\left(\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}}\right)\right]=+\infty$,

vì $\begin{cases}\lim n=+\infty\\ \lim\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}}=\dfrac{1-2\cdot 0}{3+0-2\cdot 0}=\dfrac{1}{3}>0.\end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 1065. Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log^2_{\frac{1}{3}}x-\log_3 x+4=0$. Tính T.

A. $T=4$. **B.** $T=-5$. **C.** $T=84$. **D.** $T=5$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$. Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\begin{aligned}&\log^2_{\frac{1}{3}}x-5\log_3 x+4=0\\ \Leftrightarrow\ &(-\log_3 x)^2-5\log_3 x+4=0\\ \Leftrightarrow\ &\log^2_3 x-5\log_3 x+4=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&\log_3 x=4\\&\log_3 x=1\end{aligned}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&x=3^4\\&x=3\end{aligned}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&x=81\\&x=3.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

So sánh với điều kiện $x>0$, phương trình đã cho có hai nghiệm $x=81$ và $x=3$ nên $T=81+3=84$.

Chọn đáp án C □

Câu 1066. Tìm nghiệm của phương trình $\sin^4 x-\cos^4 x=0$.

A. $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=k\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\sin^4 x-\cos^4 x=0\\ \Leftrightarrow\ &(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=0\\ \Leftrightarrow\ &-\cos 2x\cdot 1=0\\ \Leftrightarrow\ &\cos 2x=0\\ \Leftrightarrow\ &2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \Leftrightarrow\ &x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 1067. Tìm điều kiện cần và đủ của a, b, c để phương trình $a\sin x+b\cos x=c$ có nghiệm.

A. $a^2 + b^2 > c$. **B.** $a^2 + b^2 \leq c^2$. **C.** $a^2 + b^2 = c^2$. **D.** $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Lời giải.

Điều kiện cần và đủ của a, b, c để phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm là $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 1068. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2 - 1)^{-4}$.

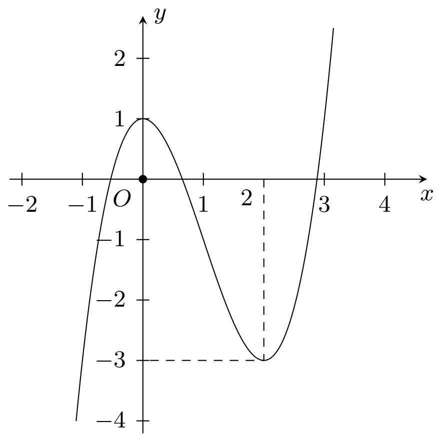
A. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D} = (-1; 1)$.
C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{-1; 1\}$. **D.** $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.
Điều kiện $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$ (-4 là số mũ nguyên âm).
Vậy tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{-1; 1\}$.
Chọn đáp án C □

Câu 1069.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **B.** $y = 2x^3 - 6x^2 + 1$.
C. $y = -x^3 - 3x^2 + 1$. **D.** $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$.



Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ và đồ thị đi qua điểm $(2; -3)$ nên chọn hình vẽ bên là của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 1070 (1D3Y-4-5). Cho cấp số nhân $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ với công bội $q\,(q \neq 0, q \neq 1)$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$. Khi đó ta có:

A. $S_n = \dfrac{u_1\,(q^n - 1)}{q - 1}$. **B.** $S_n = \dfrac{u_1\,(q^{n-1} - 1)}{q - 1}$. **C.** $S_n = \dfrac{u_1\,(q^n + 1)}{q + 1}$. **D.** $S_n = \dfrac{u_1\,(q^{n-1} - 1)}{q + 1}$.

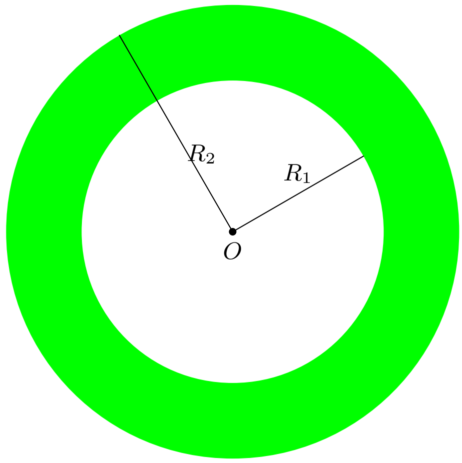
Lời giải.

Công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số nhân là $S_n = \dfrac{u_1\,(1 - q^n)}{1 - q} = \dfrac{u_1\,(q^n - 1)}{q - 1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 1071.

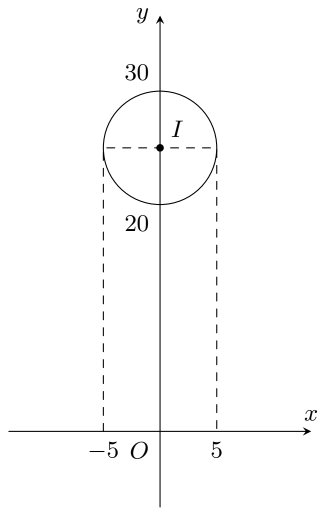
Săm lốp xe tô khi bơm căng đặt nằm trên mặt phẳng nằm ngang có hình chiếu bằng như hình vẽ với bán kính đường tròn nhỏ $R_1 = 20$ cm, bán kính đường tròn lớn $R_2 = 30$ cm và mặt cắt khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trục, vuông góc mặt phẳng nằm ngang là hai đường tròn. Bỏ qua độ dày vỏ săm. Tính thể tích không khí được chứa bên trong săm.



A. $1250\pi^2$ cm^3. **B**. $1400\pi^2$ cm^3.
C. $2500\pi^2$ cm^3. **D**. $600\pi^2$ cm^3.

Lời giải.

Thể tích săm xe bằng thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình tròn tâm $I(0;25)$ bán kính bằng 5 quay quanh trục Ox.



Ta có phương trình đường tròn tâm I bán kính bằng 5 là

$x^2 + (y-25)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 25 + \sqrt{25 - x^2} \\ y = 25 - \sqrt{25 - x^2} \end{array}\right.$, $x \in [-5;5]$.

Khi đó thể tích săm xe là

$$V = \pi\left[\int\limits_{-5}^{5}(25+\sqrt{25-x^2})^2\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-5}^{5}(25-\sqrt{25-x^2})^2\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= 100\pi\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ta có $\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x$ là diện tích nửa hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính bằng 5 nên $\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot 5^2 = \dfrac{25\pi}{2}$.

Suy ra $V = 100\pi\cdot\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x = 100\pi\cdot\dfrac{25\pi}{2} = 1250\pi^2$ cm^3.

Chọn đáp án A □

Câu 1072. Một lớp học có 15 bạn nam và 10 bạn nữ. Số cách chọn hai bạn trực nhật sao cho có cả nam và nữ là

A. 300. **B**. 25. **C**. 150. **D**. 50.

Lời giải.

Ta có 15 bạn nam và 10 bạn nữ.

Có $\mathrm{C}_{15}^1 = 15$ cách chọn 1 bạn nam.

Có $\mathrm{C}_{10}^1 = 15$ cách chọn 1 bạn nữ.

Khi đó, số cách chọn hai bạn sao cho có một bạn nam và một bạn nữ là: $\mathrm{C}_{15}^1\cdot\mathrm{C}_{10}^1 = 15\cdot 10 = 150$.

Chọn đáp án C □

Câu 1073. Hàm số $y = x^4 - x^3 - x + 2019$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B**. 3. **C**. 0. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có: $y' = 4x^3 - 3x^2 - 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$y'' = 12x^2 - 6x \Rightarrow y''(1) = 12 - 6 = 6 > 0$.

$\Rightarrow x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 1074. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

A. -2. **B**. $\dfrac{1}{2}$. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$ xác định trên đoạn $[-2; 3]$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{3}{(x+3)^2} > 0, \forall x \in [-2; 3] \Rightarrow$ Hàm số luôn đồng biến trên đoạn $[-2; 3]$.

$\Rightarrow$ GTLN của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$ trên đoạn $[-2; 3]$ là $f(3) = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 1075. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên R, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			2				$+\infty$
	$-\infty$	↗		↘	-1	↗	

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

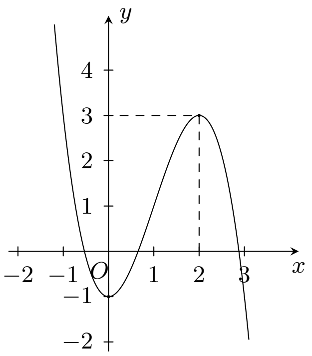
Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta thấy. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.

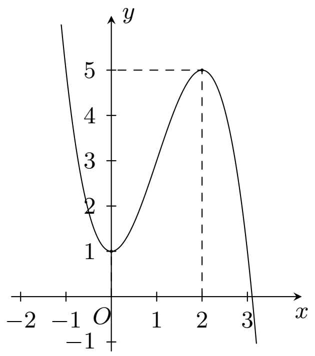
Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$.

Chọn đáp án B □

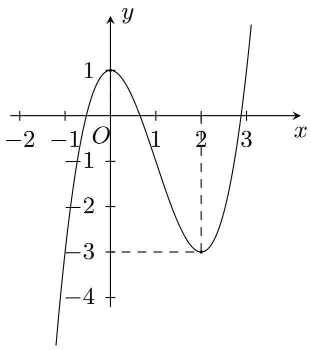
Câu 1076. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ có đồ thị nào trong các đồ thị dưới đây?



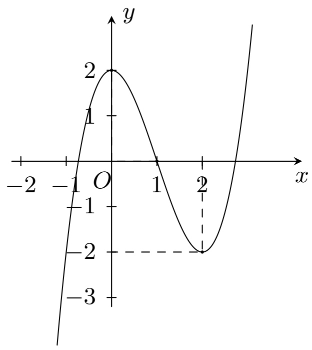
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 3. **B**. Hình 1. **C**. Hình 2. **D**. Hình 4.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty \Rightarrow$ loại đáp án A và D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; -1) \Rightarrow$ loại đáp án C.

Chọn đáp án (B) □

Câu 1077. Gọi n là số nguyên dương sao cho $\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_{3^2} x}+\dfrac{1}{\log_{3^3} x}+\cdots+\dfrac{1}{\log_{3^n} x}=\dfrac{190}{\log_3 x}$ đúng với mọi x dương, $x\neq 1$. Tìm giá trị của biểu thức $P=2n+3$.

A. $P=23$. **B.** $P=41$. **C.** $P=43$. **D.** $P=32$.

Lời giải.

Với mọi $x>0, x\neq 1$ ta có:

$\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_{3^2} x}+\dfrac{1}{\log_{3^3} x}+\cdots+\dfrac{1}{\log_{3^n} x}=\dfrac{190}{\log_3 x}$

$\Leftrightarrow \log_x 3+\log_x 3^2+\cdots+\log_x 3^n=190\log_x 3$

$\Leftrightarrow \log_x\left(3.3^2.3^3\ldots 3^n\right)=190\log_x 3$

$\Leftrightarrow \log_x 3^{1+2+3+\cdots+n}=190\log_x 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{n\left(n+1\right)}{3}=190 \Leftrightarrow n\left(n+1\right)=380\Leftrightarrow n=19.$

$\Rightarrow P=2n+3=41.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 1078. Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y=-x^4+8x^2$.

A. $(-\infty;-2)\cup(0;2)$. **B.** $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$. **C.** $(-2;0)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

Lời giải.

$y'=-4x^4+16x$. $y'=0\Leftrightarrow x\in\{-2;0;2\}$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trong các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 1079. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm $M(3;-2)$ là điểm biểu diễn cho số phức nào sau đây?

A. $z=2-3i$. **B.** $z=2+3i$. **C.** $z=3-2i$. **D.** $z=-3+2i$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm $M(3;-2)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z=3-2i$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 1080. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ là

A. $(0;1)$. **B.** $(2;-3)$. **C.** $(1;-1)$. **D.** $(3;1)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x$; $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ là $(0; 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 1081. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5; 3; -1)$ và $B(1; -1; 9)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn AB là

A. $I(3; 1; 4)$. **B.** $I(2; 2; -5)$. **C.** $I(2; 6; -10)$. **D.** $I(-1; -3; -5)$.

Lời giải.

Tọa độ trung điểm I của đoạn AB là $\begin{cases} x_I = \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ y_I = \dfrac{3-1}{2} = 1 \\ z_I = \dfrac{-1+9}{2} = 4. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 1082. Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u} = (1; 3; 1)$, đường thẳng nào dưới đây nhận $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương?

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = -4 + t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 5t \\ z = -4 - 3t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = -4 + t \end{cases}$ nhận $\vec{u}$ làm véc-tơ chỉ phương.

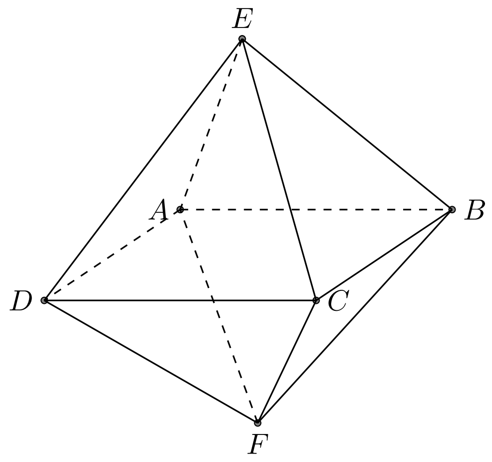
Chọn đáp án C □

Câu 1083. Hình bát diện đều có bao nhiêu cạnh?

A. 8. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải.

Hình bát diện đều có 12 cạnh.



Chọn đáp án D □

Câu 1084. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy $r = 50$ cm và có chiều cao $h = 50$ cm. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng

A. $2500\pi\,\text{cm}^2$. **B.** $5000\pi\pi\,\text{cm}^2$. **C.** $2500\pi\,\text{cm}^2$. **D.** $5000\pi\,\text{cm}^2$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ bằng $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \cdot 50 \cdot 50 = 5000\pi\pi\,\text{cm}^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 1085. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

A. $u_n = 3^n$. **B.** $u_n = 3^{n+1}$. **C.** $u_n = 3^{n-1}$. **D.** $u_n = n^{n+1}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 3$.

Do đó dãy số (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 3$.

Vậy số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$.

Chọn đáp án A □

Câu 1086. Hàm số $F(x) = x^2 + \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \cos x$. **B.** $f(x) = 2x + \cos x$.

C. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \cos x$. **D.** $f(x) = 2x - \cos x$.

Lời giải.

$F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$.

Ta có $F'(x) = 2x + \cos x$.

Vậy hàm số $F(x) = x^2 + \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \cos x$.

Chọn đáp án B □

Câu 1087. Tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 2\right)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = \ln 2 + 2$. **B.** $I = \ln 2 + 1$. **C.** $I = \ln 2 - 1$. **D.** $I = \ln 2 + 3$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 2\right)\,\mathrm{d}x = \left(\ln|x| + 2x\right)\Big|_1^2 = \ln 2 + 4 - 2 = \ln 2 + 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 1088. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(3;4;2)$, $B(5;-1;0)$ và $C(2;5;1)$. Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có phương trình

A. $7x+4y-3z-31=0$. **B.** $x+y+z-9=0$.

C. $7x+4y-3z+31=0$. **D.** $x+y+z-8=0$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-5;-2)$; $\overrightarrow{AC}=(-1;1;-1)$.

Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C nhận véc-tơ $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(7;4;-3)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình $7x+4y-3z-31=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 1089. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z-12=0$ và đường thẳng d có phương trình $d\colon \dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+10}{4}=\dfrac{z-4}{-2}$. Toạ độ giao điểm M của đường thẳng d với mặt phẳng (P) là

A. $M(2;2;-2)$. **B.** $M(-7;-10;4)$. **C.** $M(1;2;-3)$. **D.** $M(2;-1;-3)$.

Lời giải.

Toạ của d và (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=-7+3t & (1)\\ y=-10+4t & (2)\\ z=4-2t & (3)\\ x+2y-3z-12=0 & (4)\end{cases}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta được $t=3$.

Vậy $M(2;2;-2)$ là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P).

Chọn đáp án A □

Câu 1090. Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-5x+3}=1$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $2^{2x^2-5x+3}=1=2^0 \Leftrightarrow 2x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$

Chọn đáp án B □

Câu 1091. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{4x}{x+1}-x$ trên đoạn $[0;4]$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=\dfrac{4}{(x+1)^2}-1$; $\dfrac{4}{(x+1)^2}-1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=2\\ x+1=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[0;4]\\ x=-3\notin[0;4].\end{array}\right.$.

$f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(4)=-\dfrac{4}{5}$. Vậy $\max\limits_{[0;4]} f(x)=f(1)=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 1092. Tập hợp tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-mx^2+(m+6)x-m$ có điểm cực trị là

A. $(-\infty;-3)\cup(6;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-6)\cup(3;+\infty)$.

C. $(-\infty;-3]\cup[6;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-6]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 2mx + m + 6 = 0$.

Hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m+6)x - m$ có điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3(m+6) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 18 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 6. \end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 1093. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Điều kiện $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$. Do vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Xét $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}} = +\infty$. Nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

Xét $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{x+1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}} = 0$. Suy ra đường thẳng $x = -1$ không là tiệm cận của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án A □

Câu 1094. Phương trình $x^4 - 4x^2 + m - 3 = 0$ (m là tham số) có đúng bốn nghiệm khi và chỉ khi

A. $m < 7$. **B.** $m \leqslant 7$. **C.** $m < 3$. **D.** $3 < m < 7$.

Lời giải.

Ta có $x^4 - 4x^2 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 3 = -m$.

Số nghiệm của phương trình $x^4 - 4x^2 - 3 = -m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 3$ và đường thẳng $y = -m$.

Xét hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 3$ có $y' = 4x^3 - 8x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$.

Có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có 4 nghiệm thì $-7 < -m < -3 \Leftrightarrow 3 < m < 7$.

Chọn đáp án D □

Câu 1095. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $(2 - 3x)^{15}$.

A. $-\mathrm{C}_{15}^{8} \cdot 2^8 \cdot 3^7 \cdot x^7$. **B.** $\mathrm{C}_{15}^{7} \cdot 2^8 \cdot 3^7$. **C.** $-\mathrm{C}_{15}^{7} \cdot 2^8 \cdot 3^7$. **D.** $-\mathrm{C}_{15}^{8} \cdot 2^8 \cdot 3$.

Lời giải.

Ta có $(2-3x)^{15} = \sum\limits_{k=0}^{15} \mathrm{C}_{15}^{k} \cdot 2^{15-k} \cdot (-3x)^k = \sum\limits_{k=0}^{15} \mathrm{C}_{15}^{k} \cdot 2^{15-k} \cdot (-3)^k \cdot x^k$.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi $k = 7$ nên hệ số cần tìm là $-\mathrm{C}_{15}^{7} \cdot 2^8 \cdot 3^7$.

Chọn đáp án C □

Câu 1096. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-6}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và (P) song song với đường thẳng d_2 là

A. $(P)\colon x+5y+8z-16=0$.
B. $(P)\colon x+5y+8z+16=0$.
C. $(P)\colon x+4y+6z-12=0$.
D. $(P)\colon 2x+y-6=0$.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 đi qua $A(2;6;-2)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;-2;1)$.

Đường thẳng d_2 có một véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(1;3;-2)$.

Gọi $\overrightarrow{n}$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Do mặt phẳng (P) chứa d_1 và (P) song song với đường thẳng d_2 nên $\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(1;5;8)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(2;6;-2)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(1;5;8)$ là $x+5y+8z-16=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 1097. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z-12=0$ và hai điểm $A(5;10;21)$, $B(1;3;16)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A đồng thời vuông góc với mặt phẳng (P). Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng Δ bằng

A. 3.
B. 4.
C. 13.
D. 9.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}=(2;2;1)$.

Vì đường thẳng Δ là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) nên Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(2;2;1)\Rightarrow$ phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=5+2t\\ y=10+2t\ (t\in\mathbb{R}).\\ z=21+t.\end{cases}$

Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng Δ là $\mathrm{d}\,(B,\Delta)=\dfrac{\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u}]\right|}{|\overrightarrow{u}|}$,với $\overrightarrow{AB}=(-4;-7;-5)$, $\overrightarrow{u}=(2;2;1)$.

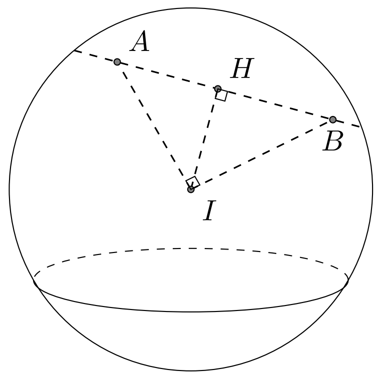
Vậy $\mathrm{d}\,(B,\Delta)=\dfrac{\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u}]\right|}{|\overrightarrow{u}|}=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 1098. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z-1}{2}$ và điểm $I(1;-2;5)$. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I.

A. $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(x-5)^2=40$.
B. $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(x-5)^2=49$.
C. $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(x-5)^2=69$.
D. $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(x-5)^2=64$.

Lời giải.



Đường thẳng d đi qua $M(2;0;1)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (3;6;2)$.

Gọi H là hình chiếu của I trên đường thẳng d ta có $IH = \mathrm{d}(I,d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$, với $\overrightarrow{IM} = (1;2;-4)$, $\vec{u} = (3;6;2)$.

Suy ra $IH = \mathrm{d}(I,d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \sqrt{20}$.

Theo đề bài ta có tam giác IAB vuông cân tại I nên $IA = IH\sqrt{2} = \sqrt{40}$.

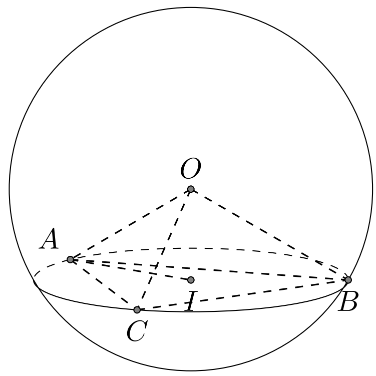
Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (x-5)^2 = 40$.

Chọn đáp án A □

Câu 1099. Cho mặt cầu (S) tâm O và các điểm A, B, C nằm trên mặt cầu (S) sao cho $AB = AC = 6$, $BC = 8$. Khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (ABC) bằng 2. Diện tích mặt cầu (S) bằng

A. $\dfrac{404\pi\sqrt{505}}{75}$. **B.** $\dfrac{2196\pi}{75}$. **C.** $\dfrac{404\pi}{5}$. **D.** $\dfrac{324\pi}{5}$.

Lời giải.



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, do A, B, C nằm trên mặt cầu (S) nên $OI \perp (ABC)$. Theo đề bài ta có khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (ABC) bằng 2 hay $OI = 2$.

Gọi M là trung điểm của BC, do tam giác ABC cân tại A nên $AM \perp BC \Rightarrow AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{20}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AM \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot 8 = 8\sqrt{5}$.

Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có $r = \dfrac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S_{\triangle ABC}} = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 8}{4 \cdot 8\sqrt{5}} = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác vuông OIA ta có $OA^2 = OI^2 + IA^2 = 4 + \dfrac{81}{5} = \dfrac{101}{5}$.

Vậy diện tích mặt cầu (S) là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot OA^2 = 4\pi \cdot \dfrac{101}{5} = \dfrac{404\pi}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 1100. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a\sqrt{5}$, $BC = 3a$. Cạnh bên $AA' = a\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

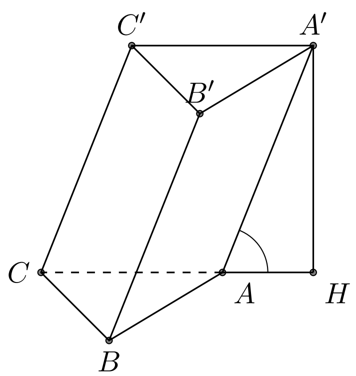
A. $\dfrac{3a^3\sqrt{10}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Kẻ $A'H \perp (ABC)$ tại $H \Rightarrow \widehat{(A'A;(ABC))} = \widehat{A'AH} = 60°$

$\Rightarrow \sin 60° = \dfrac{A'H}{A'A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = \dfrac{\sqrt{3}}{2}A'A = \dfrac{3a}{2}$.

Cạnh $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 2a \Rightarrow V = A'H \cdot S_{ABC} = A'H.\dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{3a}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{5} \cdot 2a = \dfrac{3a^3\sqrt{5}}{2}$.



Chọn đáp án C □

Câu 1101. Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0;2023)$ của phương trình lượng giác $\sqrt{3}(1-\cos 2x)+\sin 2x-4\cos x+8=4\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. $\dfrac{310408}{3}\pi$. **B.** 102827π. **C.** $\dfrac{312341}{3}\pi$. **D.** 104760π.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{3}(1-\cos 2x)+\sin 2x-4\cos x+8=4\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin^2 x+2\sin x\cos x-4\cos x+8=4\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x(\sin x-2)+2\cos x(\sin x-2)=4(\sin x-2)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x+2\cos x=4$ (vì $\sin x\leqslant 1<2$)

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x+\cos x=2\Leftrightarrow \sin x\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{6}=1$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Theo đề bài $x\in(0;2023)\Rightarrow\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\in(0;2023)\Rightarrow 2k+\dfrac{1}{3}\in\left(0;\dfrac{2023}{\pi}\right)\Rightarrow k\in\{0;1;\ldots;321\}$.

Tổng tất cả các phần tử của S là

$322\cdot\dfrac{\pi}{3}+(0+1+2+\cdots+321)2\pi=322\cdot\dfrac{\pi}{3}+51681\cdot 2\pi=\dfrac{310408}{3}\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 1102. Giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-3\log_3 x+3m-5=0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3)=72$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\dfrac{5}{3};0\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{5}{3}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{10}{3}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{10}{3};5\right)$.

Lời giải.

Ta có $\log_3^2 x-3\log_3 x+3m-5=0\Rightarrow\left(\log_3 x-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{29}{4}-3m$

$$\Rightarrow\left[\begin{aligned}&\log_3 x-\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{29}{4}-3m}\\&\log_3 x-\frac{3}{2}=-\sqrt{\frac{29}{4}-3m}\end{aligned}\right.\left(\frac{29}{4}-3m\geqslant 0\right)\Rightarrow\left[\begin{aligned}&x=3^{\frac{3+\sqrt{29-12m}}{2}}\\&x=3^{\frac{3-\sqrt{29-12m}}{2}}\end{aligned}\right..$$

Theo đề bài $(x_1+3)(x_2+3)=72\Rightarrow\left(3^{\frac{3+\sqrt{29-12m}}{2}}+3\right)\left(3^{\frac{3-\sqrt{29-12m}}{2}}+3\right)=72$

$\Rightarrow 3^3+3\left(3^{\frac{3+\sqrt{29-12m}}{2}}+3^{\frac{3-\sqrt{29-12m}}{2}}\right)+9=72\Rightarrow 3^{\frac{3+\sqrt{29-12m}}{2}}+3^{\frac{3-\sqrt{29-12m}}{2}}=12.$

Đặt $t=\dfrac{3+\sqrt{29-12m}}{2}\geqslant\dfrac{3}{2}\Rightarrow\dfrac{3-\sqrt{29-12m}}{2}=3-t$

$\Rightarrow 3^t+3^{3-t}=12\Rightarrow(3^t)^2+3^3=12\cdot 3^t\Rightarrow\left[\begin{aligned}&3^t=9\\&3^t=3\end{aligned}\right.\Rightarrow\left[\begin{aligned}&t=2\\&t=1\end{aligned}\right.\Rightarrow t=2$ vì $t\geqslant\dfrac{3}{2}$.

Với $t=2\Rightarrow\dfrac{3+\sqrt{29-12m}}{2}=2\Leftrightarrow\sqrt{29-12m}=1\Leftrightarrow m=\dfrac{7}{3}$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn, do đó $m=\dfrac{7}{3}\in\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{10}{3}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 1103. Cho số phức $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2-i-\left|z\right|(1-i)=0$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z. Hỏi M thuộc đường thẳng nào sau đây?

A. $x-y+5=0$. **B.** $x-y+2=0$. **C.** $x+y-2=0$. **D.** $x+y+1=0$.

Lời giải.

Ta có $z+2-i-\left|z\right|(1-i)=0 \Leftrightarrow x+yi+2-i-(1-i)\sqrt{x^2+y^2}=0$
$\Leftrightarrow x+2-\sqrt{x^2+y^2}+\left(y-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)i=0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2-\sqrt{x^2+y^2}=0 \\ y-1+\sqrt{x^2+y^2}=0 \end{cases} \Rightarrow x+2-\sqrt{x^2+y^2}+y-1+\sqrt{x^2+y^2}=0 \Leftrightarrow x+y+1=0.$
Do đó M thuộc đường thẳng $x+y+1=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 1104. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-2+3i\right|=\sqrt{5}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $P=\left|z+i\right|^2-\left|z-2\right|^2$. Tính $A=m+M$.

A. $A=-3$. **B.** $A=-2$. **C.** $A=5$. **D.** $A=10$.

Lời giải.
Đặt $z=x+iy$ ($x, y\in\mathbb{R}$) thì $\left|z-2+3i\right|=\sqrt{5} \Leftrightarrow \left|x+iy-2+3i\right|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=5$.
$P=\left|z+i\right|^2-\left|z-2\right|^2=\left|x+iy+i\right|^2-\left|x+iy-2\right|^2=x^2+(y+1)^2-(x-2)^2-y^2=4x+2y-3$.
Đặt $x=2+\sqrt{5}\sin t$, $y=-3+\sqrt{5}\cos t$, $t\in\mathbb{R}$.
$\Rightarrow P=4\left(2+\sqrt{5}\sin t\right)+2\left(-3+\sqrt{5}\cos t\right)-3=4\sqrt{5}\sin t+2\sqrt{5}\cos t-1$.
$(P+1)^2=\left(4\sqrt{5}\sin t+2\sqrt{5}\cos t\right)^2\leqslant(80+20).1\Rightarrow -10\leqslant P+1\leqslant 10\Rightarrow -11\leqslant P\leqslant 9$.
Vậy $A=-11+9=-2$.
Chọn đáp án B □

Câu 1105. Cho biết $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=2$, $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=-3$. Giá trị của $M=\int\limits_a^b\left[5f(x)+3g(x)\right]\,\mathrm{d}x$ bằng

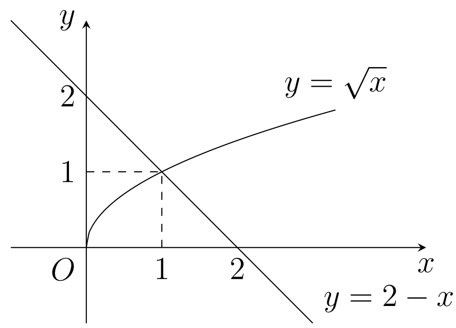
A. $M=6$. **B.** $M=1$. **C.** $M=5$. **D.** $M=9$.

Lời giải.
$$M=\int\limits_a^b\left[5f(x)+3g(x)\right]\,\mathrm{d}x=5\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+3\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=5\cdot2-3\cdot3=1.$$
Chọn đáp án B □

Câu 1106. Gọi (H) là hình giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$ và trục hoành. Diện tích của hình (H) bằng

A. $\dfrac{7}{6}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $2-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải.
Phương trình hoành độ giao điểm
$\sqrt{x}=2-x\Leftrightarrow\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\ x=4-4x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$
Vậy $S=\int\limits_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2(2-x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1+\left(2x-\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{6}$.



Chọn đáp án A □

Câu 1107. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và thỏa $\int\limits_0^1(2x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x=10$, $3f(1)-f(0)=12$.

Tính $I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 2$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = -1$. **D.** $I = -2$.

Lời giải.

Đặt $u = 2x + 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = f(x)$.

Ta có $10 = \int\limits_0^1 (2x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x = [(2x+1)f(x)]\Big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3f(1) - f(0) - 2\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{12-10}{2} = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 1108. Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 10$. Tính $I = \int\limits_{-2}^2 \dfrac{f(x)}{2^x+1}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 10$. **B.** $I = \dfrac{10}{3}$. **C.** $I = 20$. **D.** $I = 5$.

Lời giải.

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = -2 \Rightarrow t = 2$, $x = 2 \Rightarrow t = -2$.

$I = \int\limits_{-2}^2 \dfrac{f(t)}{2^{-t}+1}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-2}^2 \dfrac{2^t}{2^t+1}f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-2}^2 \dfrac{2^x}{2^x+1}f(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 2I = \int\limits_{-2}^2 \dfrac{f(x)}{2^x+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-2}^2 \dfrac{2^x}{2^x+1}f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + 10$

Mặt khác do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(-x) = f(x)$.

Xét $J = \int\limits_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$, đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow J = \int\limits_0^2 f(-t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^2 f(-x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 10 \Rightarrow 2I = 20 \Rightarrow I = 10$.

Chọn đáp án A □

Câu 1109. Cho 100 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 100, chọn ngẫu nhiên 3 tấm thẻ. Xác suất để chọn được 3 tấm thẻ có tổng các số ghi trên thẻ là số chia hết cho 2 là

A. $\mathrm{P} = \dfrac{5}{6}$. **B.** $\mathrm{P} = \dfrac{1}{2}$. **C.** $\mathrm{P} = \dfrac{5}{7}$. **D.** $\mathrm{P} = \dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Chọn ngẫu nhiên 3 tấm thẻ từ 100 tấm thẻ có C_{100}^3 (cách chọn).

Để chọn được 3 tấm thẻ có tổng các số ghi trên thẻ là số chia hết cho 2 thì có thể xảy ra các trường hợp sau:

TH1: Cả 3 tấm thẻ được chọn đều ghi số chẵn, có C_{50}^3 (cách chọn).

TH2: Chọn được 2 tấm thẻ ghi số lẻ và 1 tấm thẻ ghi số chẵn, có $\mathrm{C}_{50}^2 \cdot \mathrm{C}_{50}^1$ (cách chọn).

Do đó có tất cả $\mathrm{C}_{50}^3 + \mathrm{C}_{50}^2 \cdot \mathrm{C}_{50}^1$ cách chọn thỏa yêu cầu đề bài.

Xác suất cần tìm là $\mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{C}_{50}^3 + \mathrm{C}_{50}^2 \cdot \mathrm{C}_{50}^1}{\mathrm{C}_{100}^3} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 1110. Gọi S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^9 + 3x^3 - 9x = m + 3\sqrt[3]{9x+m}$ có đúng hai nghiệm thực. Tích tất cả phần tử của tập S là

A. -1. **B.** -64. **C.** -81. **D.** -121.

Lời giải.

Ta có $x^9 + 3x^3 - 9x = m + 3\sqrt[3]{9x+m} \Leftrightarrow (x^3)^3 + 3x^3 = \left(\sqrt[3]{9x+m}\right)^3 + 3\sqrt[3]{9x+m}$ (1).

Hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên nó đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, theo (1) ta có $f(x^3) = f\left(\sqrt[3]{9x+m}\right) \Leftrightarrow x^3 = \sqrt[3]{9x+m}$ hay $m = x^9 - 9x\,(*)$.

Đặt $g(x) = x^9 - 9x$, ta có $g'(x) = 9x^8 - 9$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có đúng hai nghiệm thực $\Leftrightarrow m = -8$ hoặc $m = 8$. Do đó $S = \{-8; 8\}$. Tích các phần tử của S bằng -64.

Chọn đáp án B □

Câu 1111. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị nhận hai điểm $A(1;3)$ và $B(3;-1)$ làm hai điểm cực trị. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \left|ax^2|x| + bx^2 + c|x| + d\right|$ là

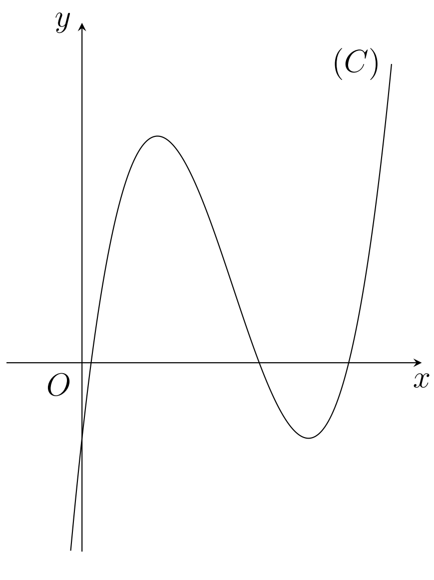
A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải.

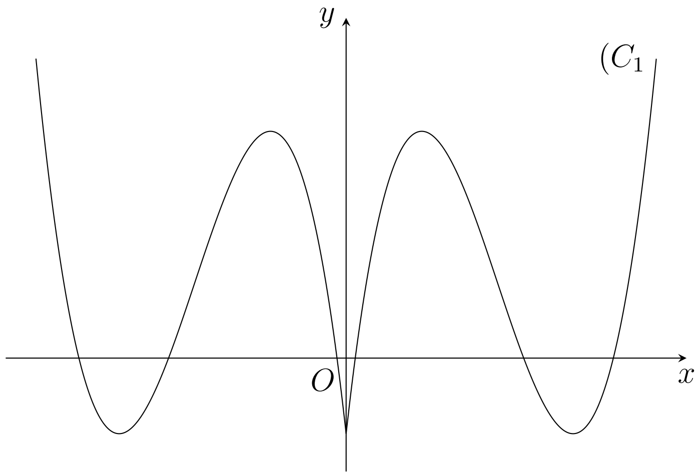
Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo giả thiết, ta có hệ phương trình $\begin{cases} y(1) = 3 \\ y'(1) = 0 \\ y(3) = -1 \\ y'(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 3 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 9b + 3c + d = -1 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 9 \\ d = -1. \end{cases}$.

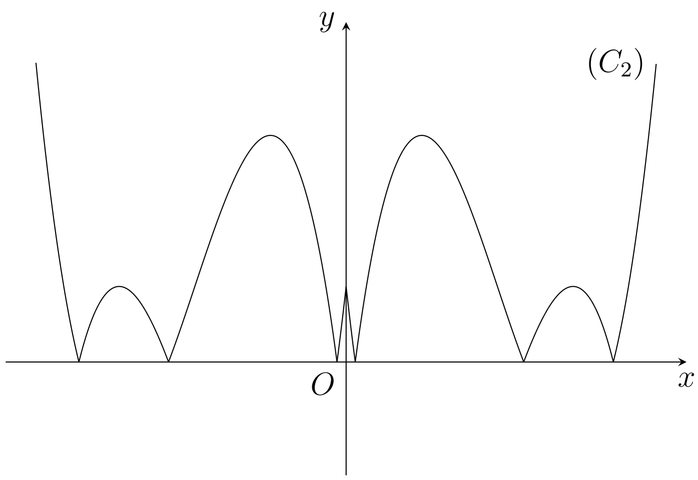
Vậy hàm số đã cho là $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ có đồ thị (C) như sau:



Từ đồ thị (C), ta suy ra đồ thị (C_1) của hàm số $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x| - 1$ gồm có hai phần:
+ Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) bên phải trục tung.
+ Phần 2: Lấy đối xứng của phần 1 qua trục tung



Từ đó suy ra đồ thị (C_2) của hàm số $y = \left||x|^3 - 6x^2 + 9|x| - 1\right|$ gồm có hai phần:
+ Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C_1) phía trên trục hoành.
+ Phần 2: Lấy đối xứng của phần đồ thị (C_1) phía dưới trục hoành qua trục hoành.



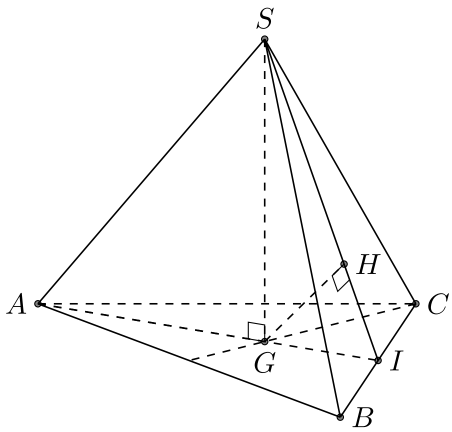
Do đó, đồ thị (C_2) có 11 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 1112. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, G là trọng tâm tam giác ABC. Góc giữa mặt bên với đáy bằng 60°. Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{4}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm BC.

Trong mặt phẳng (SAI), kẻ $GH \perp SI$ (1)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp GH$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow GH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}\,(G;(SBC)) = GH$.

Có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SI \perp BC \\ AI \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((SBC);(ABC)) = (SI;AI) = \widehat{SIA} = \widehat{SIG} = 60^\circ$.

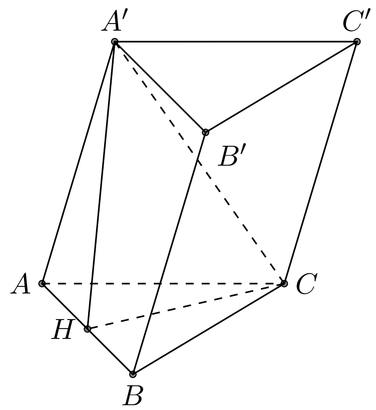
Ta có $GI = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow GH = GI\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 1113. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AC và BB'. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{2}{5}$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Ta có $A'H \perp (ABC) \Rightarrow AH$ là hình chiếu của AA' lên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow (AA';(ABC)) = (AA';AH) = \widehat{A'AH} = 60^\circ$.

Ta có: $AA' \parallel BB' \Rightarrow (AC;BB') = (AC;AA') = \widehat{A'AC} = \varphi$.

Có $AH = a \Rightarrow A'H = AH\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$; $AA' = \sqrt{AH^2 + A'H^2} = 2a$; $CH = a\sqrt{3} \Rightarrow A'C = a\sqrt{6}$.

Xét $\Delta A'AC$, ta có: $\cos\widehat{A'AC} = \dfrac{AA'^2 + AC^2 - A'C^2}{2AA' \cdot AC} = \dfrac{4a^2 + 4a^2 - 6a^2}{2 \cdot 2a \cdot 2a} = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 1114. Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(3;7;1)$, $B(8;3;8)$ và $C(-2;5;6)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3 và (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng 6. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đi qua C và tiếp xúc đồng thời cả hai mặt cầu (S_1), (S_2)?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $AB = 3\sqrt{10}$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua $C(-2;5;6) \Rightarrow (P)\colon A(x+2)+B(y-5)+C(z-6) = 0$ $(A^2+B^2+C^2 > 0)$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với hai mặt cầu (S_1), (S_2) nên ta có hệ

$$\begin{cases} \mathrm{d}\,(A,(P)) = 3 \\ \mathrm{d}\,(B,(P)) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|5A+2B-5C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 3 \\ \dfrac{|10A-2B+2C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |5A+2B-5C| = 3\sqrt{A^2+B^2+C^2} \ (1) \\ |10A-2B+2C| = 6\sqrt{A^2+B^2+C^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |5A+2B-5C| = |5A-B+C| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5A+2B-5C = 5A-B+C \\ 5A+2B-5C = -5A+B-C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = 2C \\ B = -10A+4C. \end{array}\right.$$

Với $B = 2C$, thay vào (1): $\left|5A - C\right| = 3\sqrt{A^2 + 5C^2} \Leftrightarrow 16A^2 - 10AC - 44C^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 2C \\ A = -\dfrac{11}{8}C \end{array}\right.$

• Với $A = 2C$, chọn $C = 1$, $A = B = 2 \Rightarrow (P) : 2x + 2y + z - 12 = 0$.
• Với $A = -\dfrac{11}{8}C$, chọn $C = -8$, $A = 11$, $B = -16 \Rightarrow (P) : 11x - 16y - 8z + 150 = 0$.
Với $B = -10A + 4C$, thay vào (1) ta được

$$\left| -5A + C\right| = \sqrt{101A^2 - 80AC + 17C^2} \Leftrightarrow -76A^2 + 70AC - 16C^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{1}{2}C \\ A = \dfrac{8}{19}C. \end{array}\right.$$

• Với $A = \dfrac{1}{2}C$, chọn $C = 2$, $A = 1$, $B = -2 \Rightarrow (P) : x - 2y + 2z = 0$.
• Với $A = \dfrac{8}{19}C$, chọn $C = 19$, $A = 8$, $B = -4 \Rightarrow (P) : 8x - 4y + 19z - 78 = 0$.
Vậy có 4 mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 1115. Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $(m+1)16^x - 2(2m-3)4^x + 6m + 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu là khoảng $(a; b)$. Tính $S = a + b$.

A. $S = -5$. **B.** $S = -\dfrac{29}{6}$. **C.** $S = -\dfrac{11}{6}$. **D.** $S = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.
Đặt $t = 4^x (t > 0)$. Khi đó
$(m+1)16^x - 2(2m-3)4^x + 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow (m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m + 5 = 0$.
Để phương trình $(m+1)16^x - 2(2m-3)4^x + 6m + 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu thì phương trình $(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa $0 < t_1 < 1 < t_2$.
Ta có $(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{t^2 + 6t + 5}{t^2 - 4t + 6}$.
Xét hàm số $f(t) = -\dfrac{t^2 + 6t + 5}{t^2 - 4t + 6}$ trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có
$f'(t) = \dfrac{10t^2 - 2t - 56}{(t^2 - 4t + 6)^2}$
$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1 + \sqrt{561}}{10} > 1$.
Ta có bảng biến thiên

t	0		1		$\frac{1+\sqrt{561}}{10}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{5}{6}$	$\searrow$	-1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-1

Từ đó ta chọn $-4 < m < -1$. Suy ra $\begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a + b = -5$.

Chọn đáp án A □

Câu 1116. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d : y = 1 - 2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Biết rằng đường thẳng

AB luôn đi qua điểm cố định là K. Độ dài đoạn thẳng OK là

A. $\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{58}$.

Lời giải.

Vì $M \in d$ nên $M(m; 1-2m)$.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến Δ. Tiếp tuyến Δ đi qua M có dạng $y = k(x-m)+1-2m$.

Vì Δ tiếp xúc với (C) nên hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1} = k(x-m)+1-2m & (1) \\ \dfrac{-4}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Thay (2) vào (1) ta được

$\dfrac{x+3}{x-1} = \dfrac{-4}{(x-1)^2}(x-m)+1-2m \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x-1} = \dfrac{-4}{(x-1)^2}(x-1+1-m)+1-2m.$

$\Leftrightarrow x+3 = -4+(m-1)\cdot\dfrac{4}{x-1}+(1-2m)(x-1)(3).$

Mặt khác $y = \dfrac{x+3}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{4}{x-1} = y-1$, thay vào (3) ta được $x+3 = -4+(m-1)(y-1)+(1-2m)(x-1) \Leftrightarrow 2mx-(m-1)y-m+7=0$.

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $2mx-(m-1)y-m+7=0$.

Gọi $K(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng AB đi qua.

Ta có $2mx_0-(m-1)y_0-m+7=0$

$\Leftrightarrow (2x_0-y_0-1)m+y_0+7=0$.

Vì đẳng thức luôn đúng với mọi m nên ta có $\begin{cases} 2x_0-y_0-1=0 \\ y_0+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-3 \\ y_0=-7 \end{cases} \Rightarrow K(-3;-7)$.

Vậy $OK = \sqrt{58}$.

Chọn đáp án D □

Câu 1117. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 = 1$; $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{2}{3}u_n^2+a}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Biết rằng $\lim(u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2-2n) = b$. Giá trị của biểu thức $T = ab$ là

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{2}{3}u_n^2+a} \Rightarrow u_{n+1}^2-3a = \dfrac{2}{3}(u_n^2-3a)$.

Đặt $v_n = u_n^2-3a$ thì (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = 1-3a$ và công bội $q = \dfrac{2}{3}$.

Do đó $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}(1-3a) \Rightarrow u_n^2 = v_n+3a = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}(1-3a)+3a$.

Suy ra $u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2-2n = (1-3a)\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\dfrac{2}{3}}-2n+3na = 3(1-3a)\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]-n(3a-2)$.

Vì $\lim(u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2-2n) = b$ nên

$\lim\left[3(1-3a)\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)-n(3a-2)\right] = b \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2=0 \\ b=3(1-3a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{3} \\ b=-3. \end{cases}$

Suy ra $T = ab = -2$.

Chọn đáp án A □

Câu 1118. Xét ba số thực a, b, c thay đổi thuộc đoạn $[0;3]$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T =$

$4\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|+(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)$ là

A. 0. **B**. $-\dfrac{3}{2}$. **C**. $\dfrac{81}{4}$. **D**. $\dfrac{41}{2}$.

Lời giải.

Đặt $x=a-b$, $y=b-c$, $z=c-a$, không mất tổng quát giả sử $a\geqslant b\geqslant c$.

Do $a,b,c\in[0;3]$ nên $x+y=a-c\leqslant 3$.

Ta có

$$\begin{aligned}T&=-4xyz-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)\\&=-4xy(-x-y)-\frac{1}{2}\left[x^2+y^2+(x+y)^2\right]\\&=4xy(x+y)-x^2-y^2-xy\leqslant 11xy-x^2-y^2\leqslant 9xy\leqslant 9\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\leqslant\frac{81}{4}.\end{aligned}$$

Khi $\begin{cases}a=3\\b=\dfrac{3}{2}\\c=0\end{cases}$ thì $T=\dfrac{81}{4}$ nên giá trị lớn nhất của T bằng $\dfrac{81}{4}$.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. C	4. B	5. A	6. C	7. B	8. C	9. D	10. C
11. C	12. B	13. D	14. D	15. B	16. A	17. C	18. A	19. D	20. C
21. B	22. D	23. D	24. A	25. B	26. D	27. A	28. A	29. B	30. A
31. C	32. B	33. A	34. D	35. B	36. B	37. D	38. D	39. A	40. C
41. C	43. B	44. D	45. D	46. C	47. C	48. B	49. A	50. A	51. D
52. B	53. B	54. C	55. C	56. A	57. D	58. A	59. B	60. B	61. B
62. D	63. A	64. D	65. B	66. A	67. A	68. A	69. A	70. D	71. C
72. C	73. A	74. B	75. C	76. A	77. D	78. C	79. C	80. C	81. B
82. D	83. B	84. A	85. C	86. C	87. B	88. B	89. D	90. B	91. C
92. B	93. B	94. B	95. B	96. C	97. C	98. C	99. A	100. A	101. B
102. B	103. C	104. A	106. D	107. A	108. C	109. A	110. A	111. B	112. D
113. D	114. C	115. B	116. C	118. C	119. A	120. A	121. A	122. B	123. B
124. B	125. D	126. A	127. B	129. B	130. C	131. D	132. D	133. D	134. B
135. D	136. A	137. D	138. C	139. D	140. A	141. C	142. A	143. C	144. C
145. B	146. D	147. A	148. A	149. B	150. C	151. C	152. A	153. C	154. C
155. C	156. D	157. B	158. D	159. B	160. C	161. D	162. D	163. D	164. D
165. A	166. A	167. C	168. A	169. A	170. D	171. C	172. B	173. D	174. A
175. B	176. A	177. A	178. C	179. A	180. D	181. B	182. D	183. D	184. D
185. B	186. B	187. D	188. B	189. A	190. B	191. B	192. D	193. D	194. A
195. B	196. D	197. C	198. C	199. C	200. C	201. B	202. A	203. B	204. C
205. A	206. A	207. C	208. A	209. D	210. C	211. B	212. A	213. D	214. D
215. B	216. A	217. D	218. B	219. C	220. D	221. B	222. D	223. A	224. B
225. D	226. C	227. C	228. C	229. A	230. C	231. C	232. C	233. C	234. B
235. D	236. B	237. C	238. A	239. B	240. C	241. D	242. D	243. A	244. D

245. A	246. D	247. A	248. A	249. C	250. D	251. A	252. C	253. C	254. C
255. B	256. A	257. C	258. D	259. C	260. A	261. A	262. B	263. A	264. B
265. B	266. B	267. B	268. A	269. B	270. D	271. C	272. A	273. B	274. B
275. A	276. C	277. A	278. B	279. D	280. D	281. A	282. A	283. C	284. B
285. C	286. B	287. C	288. D	289. A	290. A	291. D	292. C	293. B	294. D
295. A	296. A	297. B	298. B	299. B	300. C	301. C	302. A	303. A	304. B
305. A	306. C	307. D	308. D	309. A	310. D	311. A	312. B	313. C	314. D
315. D	316. B	317. D	318. C	319. B	320. B	321. A	322. C	323. C	324. A
325. B	326. D	327. D	328. D	329. B	330. A	331. A	332. C	333. A	334. D
335. D	336. A	337. C	338. B	339. C	340. B	341. B	342. A	343. B	344. D
345. A	346. D	347. D	348. D	349. A	350. D	351. B	352. D	353. B	354. B
355. D	356. B	357. C	358. A	359. D	360. A	361. A	362. D	363. A	364. A
365. C	366. A	367. A	368. D	369. C	370. C	371. B	372. B	373. D	374. B
375. A	376. C	377. C	378. D	379. A	380. C	381. B	382. B	383. B	384. B
385. D	386. B	387. A	388. A	389. C	390. B	391. A	392. D	393. B	394. D
395. A	396. B	397. A	398. A	399. C	400. B	401. A	402. D	403. A	404. C
405. B	406. A	407. B	408. B	409. A	410. C	411. C	412. A	413. B	414. A
415. D	416. C	417. B	418. A	419. A	420. D	421. A	422. A	423. C	424. A
425. C	426. D	427. A	428. B	429. A	430. C	431. C	432. B	433. D	434. B
435. B	436. A	437. A	438. A	439. A	440. A	441. D	442. D	443. C	444. C
445. D	446. A	447. A	448. C	449. A	450. A	451. A	452. C	453. D	454. B
455. B	456. B	457. A	458. C	459. B	460. B	461. A	462. B	463. C	464. B
465. C	466. C	467. D	468. D	469. B	470. C	471. C	472. B	473. B	474. D
475. B	476. C	477. D	478. C	479. B	480. C	481. A	482. B	483. A	484. B
485. A	486. C	487. B	488. C	489. C	490. B	491. D	492. C	493. B	494. C
495. C	496. A	497. A	498. A	499. D	500. A	501. B	502. C	503. C	504. C
505. A	506. B	507. B	508. A	509. C	510. D	511. D	512. C	513. C	514. B
515. B	516. D	517. A	518. A	519. C	520. B	521. B	522. D	523. D	524. D
525. B	526. A	527. C	528. C	529. B	530. D	531. C	532. A	533. B	534. B
535. C	536. A	537. B	538. A	539. D	540. D	541. C	542. B	543. D	544. C
545. C	546. D	547. A	548. B	549. D	550. C	551. A	552. A	553. B	554. A
555. B	556. A	557. C	558. A	559. A	560. B	561. A	562. A	563. A	564. D
565. A	566. C	567. A	568. D	569. C	570. C	571. A	572. D	573. D	574. C
575. D	576. B	577. C	578. D	579. B	580. A	581. B	582. A	583. A	584. A
585. A	586. A	587. D	588. B	589. B	590. C	591. B	592. B	593. D	594. A
595. C	596. C	597. C	598. B	599. A	600. C	601. A	602. B	603. C	604. B
605. D	606. B	607. B	608. A	609. D	610. D	611. D	612. A	613. C	614. D
615. C	616. A	617. D	618. D	619. C	620. D	621. C	622. D	623. C	624. A
625. D	626. D	627. A	628. B	629. A	630. B	631. C	632. D	633. A	634. A
635. D	636. D	637. B	638. C	639. C	640. B	641. A	642. D	643. B	644. D
645. A	646. C	647. C	648. A	649. C	650. A	651. A	652. C	653. D	654. C
655. A	656. C	657. A	658. C	659. C	660. A	661. C	662. B	663. A	664. C
665. B	666. C	667. B	668. D	669. A	670. A	671. A	672. B	673. C	674. D

675. C	676. A	677. C	678. B	679. D	680. C	681. C	682. B	683. C	684. A
685. D	686. C	687. C	688. B	689. B	690. A	691. A	692. A	693. B	694. A
695. D	696. A	697. A	698. A	699. D	700. D	701. A	702. B	703. C	704. A
705. B	706. D	707. C	708. B	709. C	710. B	711. A	712. A	713. C	714. B
715. A	716. C	717. A	718. D	719. B	720. B	721. A	722. A	723. A	724. B
725. C	726. A	727. C	728. D	729. A	730. A	731. C	732. C	733. C	734. B
735. D	736. A	737. D	738. A	739. D	740. D	741. C	742. B	743. A	744. D
745. D	746. D	747. B	748. A	749. C	750. A	751. C	752. D	753. B	754. B
755. A	756. D	757. A	758. A	759. B	760. C	761. B	762. C	763. D	764. C
765. C	766. D	767. C	768. A	769. D	770. C	771. B	772. D	773. A	774. C
775. A	776. C	777. B	778. C	779. A	780. C	781. A	782. D	783. D	784. D
785. B	786. B	787. D	788. C	789. A	790. B	791. B	792. B	793. B	794. B
795. C	796. C	797. B	798. A	799. A	800. C	801. A	802. C	803. B	804. D
805. C	806. D	807. B	808. C	809. A	810. A	811. C	812. B	813. D	814. A
815. C	816. D	817. C	818. A	819. A	820. B	821. C	822. A	823. B	824. C
825. A	826. B	827. C	828. D	829. B	830. B	831. A	832. B	833. D	834. A
835. D	836. C	837. A	838. C	839. D	840. B	841. A	842. D	843. C	844. B
845. C	846. D	847. D	848. A	849. A	850. A	851. D	852. D	853. C	854. C
855. C	856. B	857. D	858. A	859. A	860. B	861. D	862. D	863. A	864. B
865. D	866. D	867. A	868. B	869. B	870. B	871. C	872. B	873. B	874. A
875. B	876. D	877. C	878. B	879. B	880. D	881. D	882. B	883. A	884. A
885. B	886. A	887. A	888. B	889. D	890. C	891. A	892. B	893. C	894. C
895. C	896. B	897. D	898. D	899. D	900. A	901. C	902. A	903. B	904. B
905. A	906. B	907. C	908. B	909. B	910. C	911. A	912. A	913. C	914. A
915. C	916. D	917. C	918. C	919. C	920. D	921. C	922. B	923. A	924. D
925. D	926. A	927. B	928. C	929. B	930. D	931. B	932. A	933. D	934. B
935. A	936. D	937. A	938. A	939. A	940. D	941. C	942. B	943. C	944. B
945. A	946. A	947. A	948. C	949. C	950. C	951. C	952. A	953. A	954. A
955. C	956. A	957. C	958. D	959. A	960. A	961. C	962. C	963. D	964. D
965. D	966. A	967. A	968. D	969. B	970. B	971. D	972. B	973. B	974. D
975. B	976. D	977. B	978. D	979. D	980. A	981. C	982. C	983. B	984. A
985. A	986. C	987. A	988. D	989. C	990. B	991. D	992. C	993. C	994. B
995. A	996. B	997. A	998. B	999. B	1000.D	1001.B	1002.B	1003.D	1004.B
1006.A	1007.C	1008.B	1009.C	1010.C	1011.D	1012.D	1013.C	1014.A	1015.C
1016.C	1017.D	1018.B	1019.B	1020.D	1021.A	1022.B	1023.D	1024.D	1025.C
1026.A	1027.D	1028.D	1029.C	1030.D	1031.A	1032.B	1033.B	1034.A	1035.A
1036.D	1037.C	1038.D	1039.C	1040.C	1041.B	1042.B	1043.C	1044.A	1045.A
1046.A	1047.D	1048.C	1049.C	1050.B	1051.C	1052.C	1053.C	1054.A	1055.C
1056.B	1057.D	1058.D	1059.B	1060.D	1061.B	1062.B	1063.C	1064.A	1065.C
1066.A	1067.D	1068.C	1069.A	1070.A	1071.A	1072.C	1073.D	1074.B	1075.B
1076.B	1077.B	1078.D	1079.C	1080.A	1081.A	1082.C	1083.D	1084.B	1085.A
1086.B	1087.A	1088.A	1089.A	1090.B	1091.B	1092.A	1093.A	1094.D	1095.C
1096.A	1097.A	1098.A	1099.C	1100.C	1101.A	1102.C	1103.D	1104.B	1105.B

1106.A	1107.B	1108.A	1109.B	1110.B	1111.D	1112.B	1113.A	1114.D	1115.A
1116.D	1117.A	1118.C							