

TÍCH PHÂN HÀM ẨN - PHẦN 1

A. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. TÍCH PHÂN CHO BỞI NHIỀU CÔNG THỨC

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{khi } x \leq 0 \\ 4e^{2x} - 3 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$. Biết $\int_{-1}^1 f(x)dx = ae^2 - \frac{b}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a + b + c$.

A. 23.

B. 27.

C. 33.

D. 42.

Lời giải

$$\text{Ta có, } \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 (x^2 + x + 1)dx + \int_0^1 (4e^{2x} - 3)dx = \frac{5}{6} + 2e^2 - 5 = 2e^2 - \frac{25}{6}.$$

$$\Rightarrow T = 2 + 25 + 6 = 33$$

Ví dụ 2. [Đề tham khảo - 2018] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $4 + \ln 5$.B. $2 + \ln 15$.C. $3 + \ln 15$.D. $\ln 15$.

Lời giải

Cách 1: Trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$: $f(x) = \int \frac{2}{2x-1} dx = \ln(2x-1) + C_1$.

Lại có $f(1) = 2 \Rightarrow C_1 = 2$.

• Trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$: $f(x) = \int \frac{2}{2x-1} dx = \ln(1-2x) + C_2$.

Lại có $f(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1$.

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} \ln(2x-1) + 2 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + 1 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$


Suy ra $f(-1) + f(3) = 3 + \ln 15$.

Cách 2:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0) - f(-1) = \int_{-1}^0 f'(x)dx = \int_{-1}^0 \frac{2dx}{2x-1} = \ln|2x-1| \Big|_{-1}^0 = \ln \frac{1}{3} & (1) \\ f(3) - f(1) = \int_1^3 f'(x)dx = \int_1^3 \frac{2dx}{2x-1} = \ln|2x-1| \Big|_1^3 = \ln 5 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2)-(1), ta được $f(3) - f(1) - f(0) + f(-1) = \ln 15 \Rightarrow f(-1) + f(3) = 3 + \ln 15$.

2. TÍCH PHÂN HÀM ẨN

 **DẠNG 1.** Điều kiện hàm ẩn có dạng:

1. $f'(x) = g(x).h(f(x))$

2. $f'(x).h(f(x)) = g(x)$

Phương pháp giải:

1. $\frac{f'(x)}{h(f(x))} = g(x) \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{h(f(x))} dx = \int g(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{df(x)}{h(f(x))} = \int g(x)dx \dots$

2. $\int f'(x).h(f(x))dx = \int g(x)dx \Leftrightarrow \int h(f(x))df(x) = \int g(x)dx \dots$

Chú ý:

- **1** và **2** bản chất là một (cô lập các cụm $f(x), f'(x)$ sang một vế).
- Ngoài việc nguyên hàm cả hai vế, ta có thể tích phân hai vế (tùy cách hỏi)
- $f'(x)$ phải để trên tử

Ví dụ 1. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $4 < f(5) < 5$. **B.** $2 < f(5) < 3$. **C.** $3 < f(5) < 4$. **D.** $1 < f(5) < 2$.

Lời giải

Cách 1:

Với điều kiện bài toán ta có

$$\begin{aligned} f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \\ &\Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f(x)} = \frac{1}{3} \int (3x+1)^{-\frac{1}{2}} d(3x+1) \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } f(1) = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{4}{3}+C} = 1 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}} \Rightarrow f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79 \in (3; 4).$$

Vậy $3 < f(5) < 4$.

Cách 2:

Với điều kiện bài toán ta có

$$\begin{aligned} f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int_1^x \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \\ &\Leftrightarrow \int_1^x \frac{d(f(x))}{f(x)} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln f(x) \Big|_1^x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln \frac{f(5)}{f(1)} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow f(5) = f(1) \cdot e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79 \in (3; 4). \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Cho $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1; 4]$ thỏa mãn $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 4], f(1) = \frac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng:

- A.** $\frac{391}{18}$ **B.** $\frac{361}{18}$ **C.** $\frac{381}{18}$ **D.** $\frac{371}{18}$

Lời giải

Biến đổi:

$$\begin{aligned} x + 2xf(x) = [f'(x)]^2 &\Leftrightarrow x(1 + 2f(x)) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^2}{1 + 2f(x)} = x \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} = \sqrt{x}. \\ &\Rightarrow \int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} \Big|_1^4 = \frac{14}{3} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 + 2f(4)} - 2 = \frac{14}{3} \Leftrightarrow f(4) = \frac{391}{18}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Cho $f(x)$ không âm thỏa mãn điều kiện $f(x).f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0) = 0$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[1; 3]$ là

- A.** 22 **B.** $4\sqrt{11} + \sqrt{3}$ **C.** $20 + \sqrt{2}$ **D.** $3\sqrt{11} + \sqrt{3}$

Lời giải

Biến đổi:

$$f(x).f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} = 2x \Rightarrow \int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \int 2x dx$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)+1} = x^2 + C$$

$$\text{Với } f(0) = 0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \sqrt{f^2(x)+1} = x^2 + 1 \Rightarrow f^2(x) = x^4 + 2x^2 = g(x)$$

Ta có: $g'(x) = 4x^3 + 4x > 0, \forall x \in [1; 3]$. Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $[1; 3]$

$$\text{Suy ra: } g(1) \leq g(x) = f^2(x) \leq g(3) \Rightarrow 3 \leq f^2(x) \leq 99 \xrightarrow{f(x) \geq 0} \sqrt{3} \leq f(x) \leq 3\sqrt{11}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min_{[1;3]} f(x) = \sqrt{3} \\ \max_{\sqrt{3}} f(x) = 3\sqrt{11} \end{cases}$$

Chú ý: Nếu không tìm được ra luôn $\int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \sqrt{f^2(x)+1} + C$ thì ta có thể sử dụng

kỹ thuật vi phân hoặc đổi biến (bản chất là một)

+) Vi phân:

$$\int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \int \frac{f(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} d(f(x)) = \frac{1}{2} \int (f^2(x)+1)^{-\frac{1}{2}} d(f^2(x)+1) = \sqrt{f^2(x)+1} + C$$

+ Đổi biến: Đặt $t = \sqrt{f^2(x)+1} \Rightarrow t^2 = f^2(x)+1 \Rightarrow t dt = f(x)f'(x) dx$

$$\text{Suy ra: } \int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \int \frac{t dt}{t} = \int dt = t + C = \sqrt{f^2(x)+1} + C$$

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3).f^2(x)$ và $f(0) = \frac{-1}{2}$. Biết

tổng $f(1) + f(2) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b} < -1$.

B. $\frac{a}{b} > 1$.

C. $a + b = 1010$.

D. $b - a = 3029$.

Lời giải

$$\text{Biến đổi } f'(x) = (2x+3).f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3 \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+3) dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2 + 3x + C}. \text{ Mà } f(0) = \frac{-1}{2} \text{ nên } C = 2.$$

$$\text{Do đó } f(x) = -\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = -\frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{a}{b} = f(1) + f(2) + \dots + f(2017) + f(2018)$$

$$= -\left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2018.2019} + \frac{1}{2019.2020} \right)$$

$$= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} \right) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2020} \right) = \frac{-1009}{2020}.$$

$$\text{Với điều kiện } a, b \text{ thỏa mãn bài toán, suy ra: } \begin{cases} a = -1009 \\ b = 2020 \end{cases} \Rightarrow b - a = 3029.$$

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN**BẢNG TÔ ĐÁP ÁN BÀI TẬP TỰ LUYỆN - BUỔI 7**

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi sau học sinh cùng GV kiểm tra kết quả

1	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	11	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	21	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	31	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	41	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
2	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	12	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	22	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	32	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	42	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
3	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	13	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	23	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	33	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	43	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
4	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	14	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	24	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	34	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	44	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
5	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	15	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	25	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	35	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	45	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
6	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	16	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	26	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	36	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	46	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
7	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	17	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	27	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	37	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	47	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
8	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	18	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	28	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	38	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	48	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
9	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	19	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	29	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	39	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	49	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
10	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	20	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	30	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	40	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	50	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D

Câu 1. [Chuyên Thái Bình-Lần 5-2018] Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính

$$\int_0^2 f(x) dx.$$

A. $\frac{7}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 6x^2 & \text{khi } x \leq 0 \\ a - a^2x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ và $I = \int_{-1}^4 f(x) dx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên a để $I + 22 \geq 0$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 3. [Đề tham khảo - 2018] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1}, f(0) = 1 \text{ và } f(1) = 2. \text{ Giá trị của biểu thức } f(-1) + f(3) \text{ bằng}$$

A. $4 + \ln 5$.

B. $2 + \ln 15$.

C. $3 + \ln 15$.

D. $\ln 15$.

Câu 4. [Toán học tuổi trẻ số 6 - 2018] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{1}{x-1}, f(0) = 2017, f(2) = 2018. \text{ Tính } S = f(3) - f(-1).$$

A. $S = 1$.

B. $S = \ln 2$.

C. $S = \ln 4035$.

D. $S = 4$.

Câu 5. [Lục Ngạn-Bắc Giang-2018] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{3}{3x-1}, f(0) = 1 \text{ và } f\left(\frac{2}{3}\right) = 2. \text{ Giá trị của biểu thức } f(-1) + f(3) \text{ bằng}$$

A. $3 + 5 \ln 2$.

B. $-2 + 5 \ln 2$.

C. $4 + 5 \ln 2$.

D. $2 + 5 \ln 2$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{4}{x^2 - 4}; f(-3) = 0$; $f(0) = 1$ và $f(3) = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = f(-4) + f(-1) + f(4)$.

A. $P = 3 + \ln \frac{3}{25}$.

B. $P = 3 + \ln 3$.

C. $P = 2 + \ln \frac{5}{3}$.

D. $P = 2 - \ln \frac{5}{3}$.

Câu 7. [Chuyên Thái Bình - Lần 6 - 2018] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$; $f(-3) - f(3) = 0$ và $f(0) = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4) + f(-1) - f(4)$ bằng

- A.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2$. **B.** $1 + \ln 80$. **C.** $1 + \ln 2 + \frac{1}{3} \ln \frac{4}{5}$. **D.** $1 + \frac{1}{3} \ln \frac{8}{5}$.

Câu 8. [Sở Bắc Giang - 2018] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$; $f(-3) + f(3) = 0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = f(0) + f(4)$.

- A.** $P = 2 + \ln \frac{3}{5}$. **B.** $P = 1 + \ln \frac{3}{5}$. **C.** $P = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$. **D.** $P = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$.

Câu 9. [Sở Phú Thọ - 2018] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$; $f(-2) + f(2) = 0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Tính $f(-2) + f(0) + f(4) = 0$ được kết quả

- A.** $P = 1 + \ln \frac{6}{5}$. **B.** $P = -1 + \ln \frac{6}{5}$. **C.** $P = 1 + \ln \frac{4}{5}$. **D.** $P = -1 + \ln \frac{4}{5}$.

Câu 10. [Chuyên Thái Bình - Lần 4 - 2018] Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{1 + \sin 2x}$ với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Biết $F(0) = 1$ và $F(\pi) = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

- A.** $P = 2 - \sqrt{3}$. **B.** $P = 0$. **C.** Không tồn tại. **D.** $P = 1$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = -e^x \cdot f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

- A.** $f(\ln 2) = \frac{2}{9}$. **B.** $f(\ln 2) = -\frac{2}{9}$. **C.** $f(\ln 2) = \frac{2}{3}$. **D.** $f(\ln 2) = \frac{1}{3}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) , xác định và liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x \cdot f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 1$ của đồ thị (C) là.

- A.** $y = 6x + 30$. **B.** $y = -6x + 30$. **C.** $y = 36x - 30$. **D.** $y = -36x + 42$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Biết $f(1) = 1$, tính $f(-1)$.

- A.** $f(-1) = e^{-2}$. **B.** $f(-1) = e^3$. **C.** $f(-1) = e^4$. **D.** $f(-1) = 3$.

Câu 14. [Sở Yên Bái - 2018] Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

- A.** $f^2(2) = \frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2) = \frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2) = \frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2) = \frac{323}{15}$.

- Câu 15. [Sở Nam Định - Lần 2 - 2018]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$, biết $f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0$ và $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}; f(2) = \frac{1}{15}$. Tính $f(1) + f(2) + f(3)$.
- A. $\frac{7}{15}$. B. $\frac{11}{15}$. C. $\frac{11}{30}$. D. $\frac{7}{30}$.
- Câu 16.** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} . Biết $f^6(x) \cdot f'(x) = 12x + 13$ và $f(0) = 2$. Khi đó phương trình $f(x) = 3$ có bao nhiêu nghiệm?
- A. 2. B. 3. C. 7. D. 1.
- Câu 17.** Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3) \cdot f^2(x)$ và $f(0) = \frac{-1}{2}$. Biết tổng $f(1) + f(2) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $\frac{a}{b} < -1$. B. $\frac{a}{b} > 1$. C. $a + b = 1010$. D. $b - a = 3029$.
- Câu 18. [Chuyên Vinh - Lần 4 - 2017]** Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1, f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $4 < f(5) < 5$. B. $2 < f(5) < 3$. C. $3 < f(5) < 4$. D. $1 < f(5) < 2$.
- Câu 19. [Quảng Xương I - Thanh Hóa - Lần 4 - 2018]** Cho $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1; 4]$ thỏa mãn $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 4], f(1) = \frac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng:
- A. $\frac{391}{18}$ B. $\frac{361}{18}$ C. $\frac{381}{18}$ D. $\frac{371}{18}$
- Câu 20.** Cho $f(x)$ không âm thỏa mãn điều kiện $f(x) \cdot f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0) = 0$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[1; 3]$ là
- A. 22 B. $4\sqrt{11} + \sqrt{3}$ C. $20 + \sqrt{2}$ D. $3\sqrt{11} + \sqrt{3}$
- Câu 21. [Chuyên Tuyên Quang - Lần 2 - 2018]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên \mathbb{R} thỏa mãn $f(0) = 1$ và $(f'(x))^2 = e^x f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng
- A. $e - 2$. B. $e - 1$. C. $e^2 - 2$. D. $e^2 - 1$.
- Câu 22. [Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - Lần 3 - 2018]** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$ với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $f(1) = -2$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$.
- A. $-\frac{1}{2} - \ln 2$. B. $-\frac{3}{2} - \ln 2$. C. $-1 - \frac{\ln 2}{2}$. D. $-\frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2}$.
- Câu 23. [Sở Đà Nẵng - 2018]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[4; 8]$ và $f(0) \neq 0$ với $\forall x \in [4; 8]$. Biết rằng $\int_4^8 \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4} dx = 1$ và $f(4) = \frac{1}{4}, f(8) = \frac{1}{2}$. Tính $f(6)$.
- A. $\frac{5}{8}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{1}{3}$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN – PHẦN 1

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. [Chuyên Thái Bình-Lần 5-2018] Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính

$$\int_0^2 f(x) dx.$$

A. $\frac{7}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có, $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (4-x) dx = x^3 \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 6x^2 & \text{khi } x \leq 0 \\ a - a^2 x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ và $I = \int_{-1}^4 f(x) dx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên a để $I + 22 \geq 0$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Ta có

$$I = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx = \int_{-1}^0 6x^2 dx + \int_0^4 (a - a^2 x) dx = 2x^3 \Big|_{-1}^0 + \left(ax - \frac{a^2 x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = 2 + 4a - 8a^2.$$

$$I + 22 \geq 0 \Leftrightarrow 2 + 4a - 8a^2 + 22 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 - a - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq a \leq 2 \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a \in \{-1; 0; 1; 2\}.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Câu 3. [Đề tham khảo - 2018] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $4 + \ln 5$.

B. $2 + \ln 15$.

C. $3 + \ln 15$.

D. $\ln 15$.

Lời giải

Cách 1: Trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty \right)$: $f(x) = \int \frac{2}{2x-1} dx = \ln(2x-1) + C_1$.

Lại có $f(1) = 2 \Rightarrow C_1 = 2$.

• Trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2} \right)$: $f(x) = \int \frac{2}{2x-1} dx = \ln(1-2x) + C_2$.

Lại có $f(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1$.

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} \ln(2x-1) + 2 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + 1 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Suy ra $f(-1) + f(3) = 3 + \ln 15$.

Cách 2:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0) - f(-1) = \int_{-1}^0 f'(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{2 dx}{2x-1} = \ln|2x-1| \Big|_{-1}^0 = \ln \frac{1}{3} & (1) \\ f(3) - f(1) = \int_1^3 f'(x) dx = \int_1^3 \frac{2 dx}{2x-1} = \ln|2x-1| \Big|_1^3 = \ln 5 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2)-(1), ta được $f(3) - f(1) - f(0) + f(-1) = \ln 15 \Rightarrow f(-1) + f(3) = 3 + \ln 15$.

Câu 4. [Toán học tuổi trẻ số 6 - 2018] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{1}{x-1}, \quad f(0) = 2017, \quad f(2) = 2018. \text{ Tính } S = f(3) - f(-1).$$

A. $S = 1$.

B. $S = \ln 2$.

C. $S = \ln 4035$.

D. $S = 4$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\int f'(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln(|x-1|) + C$.

Theo giả thiết $f(0) = 2017, f(2) = 2018$ nên $\begin{cases} f(x) = \ln(|x-1|) + 2017 & \text{ khi } x < 1 \\ f(x) = \ln(|x-1|) + 2018 & \text{ khi } x > 1 \end{cases}$.

Do đó $S = f(3) - f(-1) = \ln 2 + 2018 - \ln 2 - 2017 = 1$.

Cách 2:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0) - f(-1) = \int_{-1}^0 f'(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| \Big|_{-1}^0 = \ln \frac{1}{2} & (1) \\ f(3) - f(2) = \int_2^3 f'(x) dx = \int_2^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| \Big|_2^3 = \ln 2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1)+(2), ta được

$$f(3) - f(2) + f(0) - f(-1) = 0 \Rightarrow S = f(3) - f(-1) = f(2) - f(0) = 1.$$

Câu 5. [Lục Ngạn-Bắc Giang-2018] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{3}{3x-1}, \quad f(0) = 1 \text{ và } f\left(\frac{2}{3}\right) = 2. \text{ Giá trị của biểu thức } f(-1) + f(3) \text{ bằng}$$

A. $3 + 5\ln 2$.

B. $-2 + 5\ln 2$.

C. $4 + 5\ln 2$.

D. $2 + 5\ln 2$.

Lời giải

$$\text{Cách 1: Từ } f'(x) = \frac{3}{3x-1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{3}{3x-1} dx = \begin{cases} \ln|3x-1| + C_1 & \text{ khi } x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1| + C_2 & \text{ khi } x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + C_1 = 1 \\ 0 + C_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln|3x-1| + 1 & \text{ khi } x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \\ \ln|3x-1| + 2 & \text{ khi } x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases}$$

Khi đó: $f(-1) + f(3) = \ln 4 + 1 + \ln 8 + 2 = 3 + \ln 32 = 3 + 5\ln 2$.

Cách 2: Ta có

$$\begin{cases} f(0) - f(-1) = f(x) \Big|_{-1}^0 = \int_{-1}^0 f'(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{3}{3x-1} dx = \ln|3x-1| \Big|_{-1}^0 = \ln \frac{1}{4} & (1) \\ f(3) - f\left(\frac{2}{3}\right) = f(x) \Big|_{\frac{2}{3}}^3 = \int_{\frac{2}{3}}^3 f'(x) dx = \int_{\frac{2}{3}}^3 \frac{3}{3x-1} dx = \ln|3x-1| \Big|_{\frac{2}{3}}^3 = \ln 8 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2)-(1), ta được: $f(3) + f(-1) - f(0) - f\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 32 \Rightarrow f(-1) + f(3) = 3 + 5\ln 2$.

- Câu 6.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$; $f(-3) = 0$; $f(0) = 1$ và $f(3) = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = f(-4) + f(-1) + f(4)$.
- A.** $P = 3 + \ln \frac{3}{25}$. **B.** $P = 3 + \ln 3$. **C.** $P = 2 + \ln \frac{5}{3}$. **D.** $P = 2 - \ln \frac{5}{3}$.

Lời giải

$$\text{Từ } f'(x) = \frac{4}{x^2 - 4} \Rightarrow f(x) = \int \frac{4dx}{x^2 - 4} = \int \frac{4dx}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \begin{cases} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C_1 & \text{khi } x \in (-\infty; -2) \\ \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C_2 & \text{khi } x \in (-2; 2) \\ \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C_3 & \text{khi } x \in (2; +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(-3) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln 5 + C_1 = 0 \\ 0 + C_2 = 1 \\ \ln \frac{1}{5} + C_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\ln 5 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 2 + \ln 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| - \ln 5 & \text{khi } x \in (-\infty; -2) \\ \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + 1 & \text{khi } x \in (-2; 2) \\ \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + 2 + \ln 5 & \text{khi } x \in (2; +\infty) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } P = f(-4) + f(-1) + f(4) = \ln 3 - \ln 5 + \ln 3 + 1 + \ln \frac{1}{3} + 2 + \ln 5 = 3 + \ln 3.$$

- Câu 7.** [Chuyên Thái Bình - Lần 6 - 2018] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$; $f(-3) - f(3) = 0$ và $f(0) = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4) + f(-1) - f(4)$ bằng

- A.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2$. **B.** $1 + \ln 80$. **C.** $1 + \ln 2 + \frac{1}{3} \ln \frac{4}{5}$. **D.** $1 + \frac{1}{3} \ln \frac{8}{5}$.

Lời giải

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_1 & \text{khi } x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_2 & \text{khi } x \in (-2; 1) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_3 & \text{khi } x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(-3) - f(3) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \ln 4 + C_1 - \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} - C_3 \Rightarrow C_3 = C_1 + \frac{1}{3} \ln 10.$$

$$\text{Và } f(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} + C_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2.$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_1 & \text{khi } x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2 & \text{khi } x \in (-2; 1) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_1 + \frac{1}{3} \ln 10 & \text{khi } x \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } f(-4) + f(-1) - f(4) = \left(\frac{1}{3} \ln \frac{5}{2} + C_1 \right) + \left(\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2 \right) - \left(\frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} + C_1 + \frac{1}{3} \ln 10 \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2.$$

Câu 8. [Sở Bắc Giang - 2018] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$; $f(-3) + f(3) = 0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = f(0) + f(4)$.

A. $P = 2 + \ln \frac{3}{5}$. **B.** $P = 1 + \ln \frac{3}{5}$. **C.** $P = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$. **D.** $P = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$.

Lời giải

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_1 & \text{khi } x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_2 & \text{khi } x \in (-1; 1) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(-3) + f(3) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln 2 + C_1 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

$$\text{Và } f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln 3 + C_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| & \text{khi } x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + 1 & \text{khi } x \in (-1; 1) \end{cases} \Rightarrow P = f(0) + f(4) = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}.$$

Câu 9. [Sở Phú Thọ - 2018] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$; $f(-2) + f(2) = 0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Tính $f(-2) + f(0) + f(4)$ được kết quả

A. $P = 1 + \ln \frac{6}{5}$. **B.** $P = -1 + \ln \frac{6}{5}$. **C.** $P = 1 + \ln \frac{4}{5}$. **D.** $P = -1 + \ln \frac{4}{5}$.

Lời giải

$$f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{2dx}{x^2 - 1} = \int \frac{2dx}{(x-1)(x+1)} = \begin{cases} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_1 & \text{khi } x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_1 & \text{khi } x \in (-1; 1) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(-2) + f(2) = 0 \Rightarrow \ln 3 + C_1 + \ln \frac{1}{3} + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0.$$

$$\text{và } f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow \ln 3 + C_2 + \ln \frac{1}{3} + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 1.$$

$$\text{Suy ra: } f(x) = \begin{cases} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| & \text{khi } x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + 1 & \text{khi } x \in (-1; 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(-3) + f(0) + f(4) = \ln 2 + 1 + \ln \frac{3}{5} = 1 + \ln \frac{6}{5}$$

Câu 10. [Chuyên Thái Bình - Lần 4 - 2018] Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$$y = \frac{1}{1 + \sin 2x} \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}. \text{ Biết } F(0) = 1 \text{ và } F(\pi) = 0. \text{ Tính giá trị của}$$

$$\text{biểu thức } P = F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right).$$

A. $P = 2 - \sqrt{3}$.

B. $P = 0$.

C. Không tồn tại.

D. $P = 1$.

Lời giải

Cách 1: Biến đổi $y = \frac{1}{1 + \sin 2x} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}$. Khi đó:

$$F(x) = \int \frac{dx}{2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + C_1 & \text{khi } x \in \left(-\frac{5\pi}{4}; -\frac{\pi}{4} \right) + k2\pi \\ \frac{1}{2} \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + C_2 & \text{khi } x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ta có:

$$\begin{cases} F(0) = 1 \\ F(\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} + C_2 = 1 \\ \frac{1}{2} + C_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{1}{2} \\ C_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} & \text{khi } x \in \left(-\frac{5\pi}{4}; -\frac{\pi}{4} \right) + k2\pi \\ \frac{1}{2} \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} & \text{khi } x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right) + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } P = F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \left(\frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \tan \frac{7\pi}{6} - \frac{1}{2} \right) = 1.$$

Cách 2: Ta có
$$\begin{cases} F(0) - F\left(-\frac{\pi}{12}\right) = F(x) \Big|_{-\frac{\pi}{12}}^0 = \int_{-\frac{\pi}{12}}^0 \frac{dx}{1 + \sin 2x} \quad (1) \\ F(\pi) - F\left(-\frac{11\pi}{12}\right) = F(x) \Big|_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi} = \int_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin 2x} \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy (2) - (1), ta được: } F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) + F(\pi) - F(0) = \int_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin 2x} - \int_{-\frac{\pi}{12}}^0 \frac{dx}{1 + \sin 2x}$$

$$\stackrel{\text{casio}}{\Leftrightarrow} F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) - 1 = 0 \Rightarrow F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 1.$$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = -e^x \cdot f^2(x), \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(0) = \frac{1}{2}. \text{ Tính giá trị của } f(\ln 2).$$

A. $f(\ln 2) = \frac{2}{9}$. **B.** $f(\ln 2) = -\frac{2}{9}$. **C.** $f(\ln 2) = \frac{2}{3}$. **D.** $f(\ln 2) = \frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} f'(x) = -e^x \cdot f^2(x) &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -e^x \Leftrightarrow \int_0^{\ln 2} \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\int_0^1 e^x dx \Leftrightarrow \int_0^{\ln 2} \frac{df(x)}{f^2(x)} = -e^x \Big|_0^{\ln 2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_0^{\ln 2} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(\ln 2)} - \frac{1}{f(0)} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(\ln 2)} = 3 \Leftrightarrow f(\ln 2) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) , xác định và liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x \cdot f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 1$ của đồ thị (C) là.

A. $y = 6x + 30$. **B.** $y = -6x + 30$. **C.** $y = 36x - 30$. **D.** $y = -36x + 42$.

Lời giải

$$\begin{aligned} f'(x) = (x \cdot f(x))^2 &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^2 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_0^1 x^2 dx \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{df(x)}{f^2(x)} = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(0)} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow f(1) = 6. \end{aligned}$$

Từ $f'(x) = (x \cdot f(x))^2 \Rightarrow f'(1) = (1 \cdot f(1))^2 = 36$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần lập là $y = 36x - 30$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Biết $f(1) = 1$, tính $f(-1)$.

A. $f(-1) = e^{-2}$. **B.** $f(-1) = e^3$. **C.** $f(-1) = e^4$. **D.** $f(-1) = 3$.

Lời giải

Biến đổi:

$$\begin{aligned} f'(x) + 2f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_{-1}^1 -2 dx \Leftrightarrow \int_{-1}^1 \frac{df(x)}{f(x)} = -4 \Leftrightarrow \ln f(x) \Big|_{-1}^1 = -4 \\ \ln \frac{f(1)}{f(-1)} = -4 &\Leftrightarrow \frac{f(1)}{f(-1)} = e^4 \Leftrightarrow f(-1) = f(1) \cdot e^4 = e^4. \end{aligned}$$

Câu 14. [Sở Yên Bái - 2018] Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2) = \frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2) = \frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2) = \frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2) = \frac{323}{15}$.

Lời giải

Ta có $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2 \Rightarrow \int_0^2 f'(x) \cdot f(x) dx = \int_0^2 (x^4 + x^2) dx$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) df(x) = \frac{136}{15} \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^2 = \frac{136}{15}$$

$$\frac{f^2(2) - 4}{2} = \frac{136}{15} \Leftrightarrow f^2(2) = \frac{332}{15}.$$

Câu 15. [Sở Nam Định - Lần 2 - 2018] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$, biết

$$f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0 \text{ và } f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}; f(2) = \frac{1}{15}. \text{ Tính } f(1) + f(2) + f(3).$$

A. $\frac{7}{15}$.

B. $\frac{11}{15}$.

C. $\frac{11}{30}$.

D. $\frac{7}{30}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Biến đổi } f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -2x-4 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (-2x-4) dx \\ &\Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f^2(x)} = -x^2 - 4x + C \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = -x^2 - 4x + C \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x - C}. \end{aligned}$$

$$\text{Với } f(2) = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{1}{12 - C} \Rightarrow C = -3, \text{ suy ra: } f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}.$$

$$\text{Khi đó: } f(1) + f(2) + f(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} = \frac{7}{30}.$$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} . Biết $f^6(x) \cdot f'(x) = 12x + 13$ và $f(0) = 2$. Khi đó phương trình $f(x) = 3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2.

B. 3.

C. 7.

D. 1.

Lời giải

$$\text{Từ } f^6(x) \cdot f'(x) = 12x + 13 \Rightarrow \int f^6(x) \cdot f'(x) dx = \int (12x + 13) dx$$

$$\Leftrightarrow \int f^6(x) df(x) = 6x^2 + 13x + C \Leftrightarrow \frac{f^7(x)}{7} = 6x^2 + 13x + C \xrightarrow{f(0)=2} C = \frac{2}{7}.$$

$$\text{Suy ra: } f^7(x) = 42x^2 + 91x + 2.$$

$$\text{Từ } f(x) = 3 \Leftrightarrow f^7(x) = 2187 \Rightarrow 42x^2 + 91x + 2 = 2187 \Leftrightarrow 42x^2 + 91x - 2185 = 0(*).$$

Phương trình (*) có 2 nghiệm trái dấu do $ac < 0$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3) \cdot f^2(x)$ và $f(0) = \frac{-1}{2}$. Biết tổng

$$f(1) + f(2) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b} \text{ với } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \text{ và } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản. Mệnh}$$

đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b} < -1$.

B. $\frac{a}{b} > 1$.

C. $a + b = 1010$.

D. $b - a = 3029$.

Lời giải

$$\text{Biến đổi } f'(x) = (2x+3) \cdot f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3 \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+3) dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2 + 3x + C}. \text{ Mà } f(0) = \frac{-1}{2} \text{ nên } C = 2.$$

$$\text{Do đó } f(x) = -\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = -\frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{a}{b} = f(1) + f(2) + \dots + f(2017) + f(2018)$$

$$= -\left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2019} + \frac{1}{2019 \cdot 2020} \right)$$

$$= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} \right) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2020} \right) = \frac{-1009}{2020}.$$

Với điều kiện a, b thỏa mãn bài toán, suy ra: $\begin{cases} a = -1009 \\ b = 2020 \end{cases} \Rightarrow b - a = 3029.$

Câu 18. [Chuyên Vinh – Lần 4 – 2017] Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1, f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $4 < f(5) < 5.$ **B.** $2 < f(5) < 3.$ **C.** $3 < f(5) < 4.$ **D.** $1 < f(5) < 2.$

Lời giải

Cách 1:

Với điều kiện bài toán ta có

$$\begin{aligned} f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \\ &\Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f(x)} = \frac{1}{3} \int (3x+1)^{-\frac{1}{2}} d(3x+1) \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C}. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } f(1) = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{4}{3} + C} = 1 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3} \sqrt{3x+1} - \frac{4}{3}} \Rightarrow f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79 \in (3; 4).$$

Vậy $3 < f(5) < 4.$

Chú ý: Các bạn có thể tính $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ bằng cách đặt $t = \sqrt{3x+1}$.

Cách 2:

Với điều kiện bài toán ta có

$$\begin{aligned} f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int_1^5 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_1^5 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \\ &\Leftrightarrow \int_1^5 \frac{d(f(x))}{f(x)} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln f(x) \Big|_1^5 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln \frac{f(5)}{f(1)} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow f(5) = f(1) \cdot e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79 \in (3; 4). \end{aligned}$$

Câu 19. [Quảng Xương I – Thanh Hóa – Lần 4 – 2018] Cho $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1; 4]$ thỏa mãn $x + 2xf'(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 4], f(1) = \frac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng:

- A.** $\frac{391}{18}$ **B.** $\frac{361}{18}$ **C.** $\frac{381}{18}$ **D.** $\frac{371}{18}$

Lời giải

Biến đổi:

$$\begin{aligned} x + 2xf'(x) = [f'(x)]^2 &\Leftrightarrow x(1 + 2f'(x)) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^2}{1 + 2f'(x)} = x \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f'(x)}} = \sqrt{x}. \\ &\Rightarrow \int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f'(x)}} dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} \Big|_1^4 = \frac{14}{3} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 + 2f(4)} - 2 = \frac{14}{3} \Leftrightarrow f(4) = \frac{391}{18}. \end{aligned}$$

Chú ý: Nếu không nhìn được ra luôn $I = \int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f'(x)}} dx = \sqrt{1 + 2f(x)} \Big|_1^4 = \sqrt{1 + 2f(4)} - 2$ thì ta có thể sử dụng kỹ thuật vi phân hoặc đổi biến (bản chất là một).

$$\begin{aligned}
 &+ \text{Vi phân: } \int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}} dx = \int_1^4 \frac{df(x)}{\sqrt{1+2f(x)}} \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^4 (1+2f(x))^{-\frac{1}{2}} d(1+2f(x)) = \sqrt{1+2f(x)} \Big|_1^4.
 \end{aligned}$$

$$+ \text{Đổi biến: Đặt } t = \sqrt{1+2f(x)} \Rightarrow t^2 = 1+2f(x) \Leftrightarrow tdt = f'(x) dx$$

$$\text{với } x=1 \Rightarrow t = \sqrt{1+2f(1)} = 2; x=4 \Rightarrow t = \sqrt{1+2f(4)}.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_2^{\sqrt{1+2f(4)}} \frac{tdt}{t} = \int_2^{\sqrt{1+2f(4)}} dt = t \Big|_2^{\sqrt{1+2f(4)}} = \sqrt{1+2f(4)} - 2.$$

Câu 20. Cho $f(x)$ không âm thỏa mãn điều kiện $f(x).f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0) = 0$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[1;3]$ là

A. 22

B. $4\sqrt{11} + \sqrt{3}$

C. $20 + \sqrt{2}$

D. $3\sqrt{11} + \sqrt{3}$

Lời giải

Biến đổi:

$$f(x).f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} = 2x \Rightarrow \int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \int 2x dx$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)+1} = x^2 + C$$

$$\text{Với } f(0) = 0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \sqrt{f^2(x)+1} = x^2 + 1 \Rightarrow f^2(x) = x^4 + 2x^2 = g(x)$$

Ta có: $g'(x) = 4x^3 + 4x > 0, \forall x \in [1;3]$. Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $[1;3]$

$$\text{Suy ra: } g(1) \leq g(x) = f^2(x) \leq g(3) \Rightarrow 3 \leq f^2(x) \leq 99 \xrightarrow{f(x) \geq 0} \sqrt{3} \leq f(x) \leq 3\sqrt{11}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min_{[1;3]} f(x) = \sqrt{3} \\ \max_{[1;3]} f(x) = 3\sqrt{11} \end{cases}$$

Chú ý: Nếu không tìm được ra luôn $\int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \sqrt{f^2(x)+1} + C$ thì ta có thể sử dụng

kỹ thuật vi phân hoặc đổi biến (bản chất là một)

+) Vi phân:

$$\int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \int \frac{f(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} d(f(x)) = \frac{1}{2} \int (f^2(x)+1)^{-\frac{1}{2}} d(f^2(x)+1) = \sqrt{f^2(x)+1} + C$$

$$+ \text{Đổi biến: Đặt } t = \sqrt{f^2(x)+1} \Rightarrow t^2 = f^2(x)+1 \Rightarrow tdt = f(x)f'(x)dx$$

$$\text{Suy ra: } \int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \int \frac{tdt}{t} = \int dt = t + C = \sqrt{f^2(x)+1} + C$$

Câu 21. [Chuyên Tuyển Quang - Lần 2 - 2018] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên

\mathbb{R} thỏa mãn $f(0) = 1$ và $(f'(x))^2 = e^x f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $e-2$.

B. $e-1$.

C. e^2-2 .

D. e^2-1 .

Lời giải

$$\text{Biến đổi } (f'(x))^2 = e^x f(x) \Leftrightarrow \frac{(f'(x))^2}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{e^x} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int \sqrt{e^x} dx$$

$$\Leftrightarrow \int (f(x))^{-\frac{1}{2}} df(x) = \int e^{\frac{x}{2}} dx \Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)} = 2e^{\frac{x}{2}} + C$$

$$\text{Vì } f(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \sqrt{f(x)} = e^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow f(x) = e^x$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1.$$

Câu 22. [Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa – Lần 3 – 2018] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$ với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $f(1) = -2$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$.

A. $-\frac{1}{2} - \ln 2$.

B. $-\frac{3}{2} - \ln 2$.

C. $-1 - \frac{\ln 2}{2}$.

D. $-\frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1 \Leftrightarrow (xf(x) + 1)^2 = f(x) + xf'(x) (*)$$

$$\text{Đặt } h(x) = f(x) + xf'(x) \Rightarrow h'(x) = f(x) + xf'(x), \text{ khi đó } (*) \text{ có dạng}$$

$$h^2(x) = h(x) \Rightarrow \frac{h'(x)}{h^2(x)} = 1 \Rightarrow \int \frac{h'(x)}{h^2(x)} dx = \int 1 dx \Rightarrow \int \frac{dh(x)}{h^2(x)} = x + C \Leftrightarrow -\frac{1}{h(x)} = x + C$$

$$\Rightarrow h(x) = -\frac{1}{x+C} \Rightarrow xf'(x) + 1 = -\frac{1}{x+C}$$

$$\text{Vì } f(1) = -2 \text{ nên } -2 + 1 = -\frac{1}{1+C} \Rightarrow C = 0$$

$$\text{Khi đó } xf'(x) + 1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$\text{Suy ra: } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} - \ln 2$$

Câu 23. [Sở Đà Nẵng – 2018] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[4; 8]$ và $f(0) \neq 0$ với $\forall x \in [4; 8]$. Biết rằng $\int_4^8 \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4} dx = 1$ và $f(4) = \frac{1}{4}$, $f(8) = \frac{1}{2}$. Tính $f(6)$.

A. $\frac{5}{8}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

$$+) \text{ Xét } \int_4^8 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_4^8 \frac{df(x)}{f^2(x)} = -\frac{1}{f(x)} \Big|_4^8 = -\left(\frac{1}{f(8)} - \frac{1}{f(4)} \right) = -(2-4) = 2.$$

$$+) \text{ Gọi } k \text{ là một hằng số thực, ta sẽ tìm } k \text{ để } \int_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} + k \right) dx = 0.$$

Ta

có:

$$\int_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} + k \right) dx = \int_4^8 \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4} dx + 2k \int_4^8 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx + k^2 \int_4^8 dx = 1 + 4k + 4k^2 = (2k+1)^2.$$

$$\text{Suy ra: } k = -\frac{1}{2} \text{ thì } \int_4^8 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} - \frac{1}{2} \right) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_4^6 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \frac{1}{2} \int_4^6 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_4^6 \frac{df(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_4^6 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(4)} - \frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow f(6) = \frac{1}{3}.$$

Chú ý: $\int_a^b f(x) dx = 0$ không được phép suy ra $f(x) = 0$, nhưng

$$\int_a^b f^{2k}(x) dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

TÍCH PHÂN HÀM ẨN - PHẦN 2

A. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 2. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn : $A.f(x) + B.u'.f(u) + C.f(a+b-x) = g(x)$

+) Với $\begin{cases} u(a)=a \\ u(b)=b \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{A+B+C} \int_a^b g(x)dx$.

+) Với $\begin{cases} u(a)=b \\ u(b)=a \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{A-B+C} \int_a^b g(x)dx$.

Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số A, B, C .

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính

$$\int_0^1 f(x)dx$$

A. 2.

B. 4.

C. -1.

D. 6.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức - Dạng 2)

Biến đổi $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow f(x) - 2.3x^2.f(x^3) = -\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$ với $A=1$,
 $B=-2$.

Áp dụng công thức ta có: $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{1+(-2)} \int_0^1 -\frac{6}{\sqrt{3x+1}} dx = 4$.

Cách 2: (Dùng công thức biến đổi - nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx - 2 \int_0^1 3x^2 f(x^3)dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$

Đặt $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$; Với $x=0 \Rightarrow u=0$ và $x=1 \Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int_0^1 3x^2 f(x^3)dx = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx$ thay vào (*), ta được:

$$\int_0^1 f(x)dx - 2 \int_0^1 f(x)dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx = 4.$$

Ví dụ 2. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và thỏa mãn điều kiện

$4xf(x^2) + 3f(x-1) = \sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $I = \frac{\pi}{4}$.

B. $I = \frac{\pi}{6}$.

C. $I = \frac{\pi}{20}$.

D. $I = \frac{\pi}{16}$.

Lời giải

Từ $4x.f(x^2) + 3f(x-1) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2 \int_0^1 2xf(x^2)dx + 3 \int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ (*)

+) Đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$; Với $x=0 \Rightarrow u=0$ và $x=1 \Rightarrow u=1$.

$$\text{Khi đó } \int_0^1 2xf(x^2)dx = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx \quad (1)$$

+) Đặt $t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$; Với $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

$$\text{Khi đó } \int_0^1 f(1-x)dx = \int_1^0 f(t)dt = \int_0^1 f(x)dx \quad (2)$$

Thay (1), (2) vào (*) ta được:

$$2 \int_0^1 f(x)dx + 3 \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{5} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{20}.$$

DẠNG 3. Điều kiện hàm ẩn $A.f(u(x)) + B.f(v(x)) = g(x)$

Phương pháp giải: Lần lượt đặt $t = u(x)$ và $t = v(x)$ để giải hệ phương trình hai ẩn (trong đó có ẩn $f(x)$) để suy ra hàm số $f(x)$ (nếu $u(x) = x$ thì chỉ cần đặt một lần $t = v(x)$).

Các kết quả đặc biệt:

$$\text{Cho } A.f(ax+b) + B.f(-ax+c) = g(x) \text{ (với } A^2 \neq B^2 \text{) khi đó } f(x) = \frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right) - B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2 - B^2} \quad (*)$$

$$\text{+) Hệ quả 1 của (*): } A.f(x) + B.f(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{A.g(x) - B.g(-x)}{A^2 - B^2}$$

$$\text{+) Hệ quả 2 của (*): } A.f(x) + B.f(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{A+B} \text{ với } g(x) \text{ là hàm số chẵn.}$$

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$.

A. $I = \frac{3}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = -1$.

Lời giải

$$\text{Đặt, } t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t} \text{ khi đó điều kiện trở thành } f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) = \frac{3}{t} \Rightarrow 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}.$$

$$\text{Hay } 4f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x}, \text{ kết hợp với điều kiện } f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x. \text{ Suy ra:}$$

$$3f(x) = \frac{6}{x} - 3x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x^2} - 1 \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) dx = \left(\frac{-2}{x} - x\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 2. (Sở Kiên Giang - 2018) Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x)dx.$$

A. $I = -\frac{4}{15}$.

B. $I = \frac{1}{15}$.

C. $I = \frac{4}{75}$.

D. $I = \frac{1}{25}$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức - theo góc nhìn dạng 2)

$$\text{Với } 2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x} \text{ ta có } A=2; B=3.$$

$$\text{Suy ra: } \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2+3} \int_0^1 x\sqrt{1-x}dx \stackrel{\text{Casio}}{=} 0,05(3) = \frac{4}{75}.$$

Cách 2: (Dùng công thức - theo góc nhìn dạng 3)

Áp dụng kết quả của Dạng 3:

“Cho $A.f(ax+b) + B.f(-ax+c) = g(x)$ (Với $A^2 \neq B^2$) khi đó

$$f(x) = \frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right) - B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2 - B^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2f(x) + 3f(1-x) &= x\sqrt{1-x} = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{2g(x) - 3g(1-x)}{2^2 - 3^2} \\ &= \frac{2x\sqrt{1-x} - 3(1-x)\sqrt{x}}{-5}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{2x\sqrt{1-x} - 3(1-x)\sqrt{x}}{-5} dx \stackrel{\text{Casio}}{=} 0,05(3) = \frac{4}{75}.$$

Cách 3: (Dùng phương pháp đổi biến - nếu không nhớ công thức)

$$\begin{aligned} \text{Từ } 2f(x) + 3f(1-x) &= x\sqrt{1-x} \Rightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx + 3 \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx \\ &\stackrel{\text{Casio}}{=} 0,2(6) = \frac{4}{15} (*) \text{ Đặt } u = 1-x \Rightarrow du = -dx; \text{ Với } x=0 \Rightarrow u=1 \text{ và } x=1 \Rightarrow u=0. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(1-x) dx = \int_1^0 f(u) du = - \int_0^1 f(x) dx \text{ thay vào } (*), \text{ ta được:}$$

$$5 \int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{15} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{75}.$$

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x$. Tính

$$\text{giá trị của } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

A. $I = \frac{2}{2019}.$

B. $I = \frac{2}{1009}.$

C. $I = \frac{4}{2019}.$

D. $I = \frac{1}{1009}.$

Lời giải**Cách 1: (Dùng công thức - theo góc nhìn dạng 2)**

Với $f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x$ ta có $A=1; B=2018$

$$\text{Suy ra } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{1+2018} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{4}{2019}$$

Cách 2: (Dùng công thức - theo góc nhìn dạng 3)

Áp dụng Hệ quả 2: $A.f(x) + Bf(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn.

$$\text{Ta có } f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x \Rightarrow f(x) = \frac{2x \sin x}{2019}$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{2}{2019} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{4}{2019}$$

DẠNG 4. HÀM ẨN XÁC ĐỊNH BỞI ẨN DƯỚI CẶN TÍCH PHÂN

Phương pháp giải: Sử dụng công thức $\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt \right)' = u' \cdot f(u) - v' \cdot f(v)$

Kết quả đặc biệt: $\left(\int_a^{u(x)} f(t) dt \right)' = u' \cdot f(u)$ với a là hằng số.

Chứng minh: Giả sử $\int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt = F(t) \Big|_{v(x)}^{u(x)} = F(u(x)) - F(v(x))$

$$\Rightarrow \left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt \right)' = (F(u(x)) - F(v(x)))' = u' \cdot F'(u) - v' \cdot F'(v) = u' \cdot f(u) - v' \cdot f(v)$$

Ví dụ 1. [Lương Thế Vinh - Hà Nội - lần 3 - 2018] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

Biết $\int_0^{x^2} f(t) dt = e^{x^2} + x^4 - 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(4)$ là:

- A.** $f(4) = e^4 + 4$. **B.** $f(4) = 4e^4$. **C.** $f(4) = e^4 + 8$. **D.** $f(4) = 1$.

Lời giải

Sử dụng công thức $\left(\int_a^{u(x)} f(t) dt \right)' = u' \cdot f(u)$, ta có:

$$\int_0^{x^2} f(t) dt = e^{x^2} + x^4 - 1 \Rightarrow \left(\int_0^{x^2} f(t) dt \right)' = (e^{x^2} + x^4 - 1)'$$

$$\Leftrightarrow 2xf(x^2) = 2x \cdot e^{x^2} + 4x^3.$$

$$\text{Suy ra: } f(x^2) = e^{x^2} + 2x^2 \Rightarrow f(x) = e^x + 2x$$

$$\Rightarrow f(4) = e^4 + 8.$$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn

$$g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt \text{ và } g(x) = f^2(x). \text{ Tính } \int_0^1 \sqrt{g(x)} dx.$$

- A.** $\frac{1011}{2}$ **B.** $\frac{1009}{2}$ **C.** $\frac{2019}{2}$ **D.** 505

Lời giải

Sử dụng công thức $\left(\int_0^{u(x)} f(t) dt \right)' = u' \cdot f(u)$, ta có

$$g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2018 f(x) \xrightarrow[\frac{g(x)=f^2(x)}{f(x)>0}]{} g'(x) = 2018 \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} = 2018.$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} dx = \int 2018 dx \Leftrightarrow 2\sqrt{g(x)} = 2018x + C(*)$$

Từ điều kiện $g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt \Rightarrow g(0) = 1$ thay vào (*) suy ra $C = 2$.

$$\text{Khi đó } \sqrt{g(x)} = 1009x + 1 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{g(x)} dx = \int_0^1 (1009x + 1) dx = \frac{1011}{2}.$$

DẠNG 5. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(u(x)) = v(x)$ và $v(x)$ là hàm đơn điệu (luôn đồng biến hoặc nghịch biến) trên \mathbb{R} . Hãy đi tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$.

Phương pháp giải:

$$\text{Đặt } t = u(x) \Rightarrow \begin{cases} dt = u'(x) dx \\ f(t) = v(x) \end{cases}.$$

$$\text{Ta viết lại } I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

Đối cận: Với $t = a \Rightarrow u(x) = a \Leftrightarrow x = \alpha$ và $t = b \Rightarrow b = u(x) \Leftrightarrow x = \beta$.

$$\text{Khi đó } I = \int_a^b f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} v(x) \cdot u'(x) dx.$$

Ví dụ. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I = \int_1^5 x \cdot f'(x) dx.$$

A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{17}{4}$.

C. $\frac{33}{4}$.

D. -1761 .

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = xf(x) \Big|_1^5 - \int_1^5 f(x) dx.$$

$$\text{Từ } f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2 \Rightarrow \begin{cases} f(5) = 5 & (x=1) \\ f(1) = 2 & (x=0) \end{cases}, \text{ suy ra } I = 23 - \int_1^5 f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = (3x^2 + 3) dx \\ f(t) = 3x + 2 \end{cases}$$

Đối cận: Với $t = 1 \Rightarrow 1 = x^3 + 3x + 1 \Leftrightarrow x = 0$ và $t = 5 \Rightarrow x^3 + 3x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 1$.

$$\text{Khi đó } I = 23 - \int_1^5 f(x) dx = 23 - \int_0^1 (3x + 2)(3x^2 + 3) dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{33}{4}$$

DẠNG 6. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $g[f(x)] = x$ và $g(t)$ là hàm đơn điệu (luôn đồng biến hoặc nghịch biến) trên \mathbb{R} . Hãy tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$

Phương pháp giải: Đặt $y = f(x) \Rightarrow x = g(y) \Rightarrow dx = g'(y) dy$

$$\text{Đối cận } \begin{cases} x = a \rightarrow g(y) = a \Leftrightarrow y = \alpha \\ x = b \rightarrow g(y) = b \Leftrightarrow y = \beta \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} yg(y) dy$$

Ví dụ. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f^3(x) + f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I = \int_0^2 f(x) dx$$

A. $I = 2$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Đặt $y = f(x) \Rightarrow x = y^3 + y \Rightarrow dx = (3y^2 + 1)dy$

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow y^3 + y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \\ x = 2 \rightarrow y^3 + y = 2 \Leftrightarrow y = 1 \end{cases}$

Khi đó $I = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 y(3y^2 + 1) dy = \int_0^1 (3y^3 + y) dy = \frac{5}{4}$

DẠNG 7. Cho $f(x) \cdot f(a + b - x) = k^2$, khi đó $I = \int_a^b \frac{dx}{k + f(x)} = \frac{b-a}{2k}$

Chứng minh: Đặt $t = a + b - x \Rightarrow \begin{cases} dt = -dx \\ f(x) = \frac{k^2}{f(t)} \end{cases}$ và $x = a \Rightarrow t = b; x = b \Rightarrow t = a$.

Khi đó $I = \int_a^b \frac{dx}{k + f(x)} = \int_a^b \frac{dx}{k + \frac{k^2}{f(t)}} = \frac{1}{k} \int_a^b \frac{f(x) dx}{k + f(x)}$.

$2I = \int_a^b \frac{dx}{k + f(x)} + \frac{1}{k} \int_a^b \frac{f(x) dx}{k + f(x)} = \frac{1}{k} \int_a^b dx = \frac{1}{k}(b-a) \Rightarrow I = \frac{b-a}{2k}$.

Ví dụ. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x) \cdot f(1-x) = 1$ với

$\forall x \in [0;1]$. Tính giá trị của $I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + f(x)}$.

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow \begin{cases} dt = -dx \\ f(x) = \frac{1}{f(t)} \end{cases}$ và $x = a \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 0$. Khi đó $I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + f(x)}$

$= \int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{1}{f(t)}} = \int_0^1 \frac{f(x) dx}{1 + f(x)}$.

$2I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + f(x)} + \int_0^1 \frac{f(x) dx}{1 + f(x)} = \int_0^1 dx = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}$.

DẠNG 8. Cho $\begin{cases} f(a + b - x) = f(x) \\ \int_a^b xf(x) dx = I \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \frac{2I}{a+b}$.

Chứng minh: Đặt $t = a + b - x \Rightarrow \begin{cases} dt = -dx \\ x = a \Rightarrow t = b \\ x = b \Rightarrow t = a \end{cases}$

$$I = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b (a+b-t)f(a+b-t)dt = \int_a^b (a+b-x)f(a+b-x)dx = \int_a^b (a+b-x)f(x)dx.$$

$$\text{Suy ra } 2I = \int_a^b xf(x)dx + \int_a^b (a+b-x)f(x)dx = (a+b) \int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \frac{2I}{a+b}.$$

Ví dụ. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(4-x) = f(x)$. Biết

$$\int_1^3 xf(x)dx = 5. \text{ Tính tích phân } \int_1^3 f(x)dx.$$

A. $\frac{5}{2}.$

B. $\frac{7}{2}.$

C. $\frac{9}{2}.$

D. $\frac{11}{2}.$

Lời giải

$$\text{Đặt } t = 4 - x \Rightarrow dt = -dx \text{ và } x = 1 \Rightarrow t = 3; x = 3 \Rightarrow t = 1.$$

$$\text{Khi đó: } 5 = \int_1^3 xf(x)dx = \int_1^3 (4-t)f(4-t)dt = \int_1^3 (4-x)f(4-x)dx = \int_1^3 (4-x)f(x)dx.$$

$$\text{Suy ra: } 10 = \int_1^3 xf(x)dx + \int_1^3 (4-x)f(x)dx = 4 \int_1^3 f(x)dx = \frac{5}{2}.$$

DẠNG 9. Tính tích phân $I = \int_a^b \max\{f(x); g(x)\}dx$ hoặc $I = \int_a^b \min\{f(x); g(x)\}dx$.

Ví dụ. Tính tích phân $I = \int_0^2 \max\{x; x^3\}dx.$

A. $\frac{17}{4}.$

B. 2.

C. $\frac{15}{4}.$

D. $\frac{7}{4}.$

Lời giải

$$\text{Trên đoạn } [0; 2], \text{ xét } x \geq x^3 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) \leq 0 \xrightarrow{x \in [0; 2]} 0 \leq x \leq 1.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x \in [0; 1] \Rightarrow x \geq x^3 \\ x \in [1; 2] \Rightarrow x \leq x^3 \end{cases} \Rightarrow \max_{[0; 2]} \{x; x^3\} = \begin{cases} x & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^2 \max\{x; x^3\}dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 x^3dx = \frac{1}{2} + \frac{15}{4} = \frac{17}{4}.$$

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN BÀI TẬP TỰ LUYỆN - BUỔI 8

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi sau học sinh cùng GV kiểm tra kết quả

1	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	11	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	21	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	31	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	41	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
2	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	12	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	22	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	32	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	42	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
3	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	13	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	23	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	33	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	43	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
4	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	14	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	24	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	34	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	44	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
5	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	15	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	25	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	35	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	45	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
6	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	16	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	26	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	36	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	46	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
7	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	17	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	27	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	37	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	47	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
8	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	18	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	28	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	38	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	48	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
9	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	19	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	29	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	39	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	49	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D
10	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	20	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	30	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	40	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D	50	<input type="radio"/> A <input type="radio"/> B <input type="radio"/> C <input type="radio"/> D

- Câu 1. [Trường Đức Thọ - Hà Tĩnh - 2018]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$
- A. 2. B. 4. C. -1. D. 6.
- Câu 2. [Chu Văn An - Hà Nội - 2018]** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4xf(x^2) + 3f(x-1) = \sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng
- A. $I = \frac{\pi}{4}$. B. $I = \frac{\pi}{6}$. C. $I = \frac{\pi}{20}$. D. $I = \frac{\pi}{16}$
- Câu 3.** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) + f(2-x) = 2x$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$.
- A. $I = -4$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = \frac{4}{3}$. D. $I = 2$.
- Câu 4.** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn $f(x) + 2xf(x^2 - 2) + 3f(1-x) = 4x^3$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$.
- A. $I = 5$. B. $I = \frac{5}{2}$. C. $I = 3$. D. $I = 15$.
- Câu 5.** Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) = \sqrt{x+2} + xf(3-x^2)$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$
- A. $I = \frac{14}{3}$. B. $I = \frac{28}{3}$. C. $I = \frac{4}{3}$. D. $I = 2$.
- Câu 6.** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x) + xf(1-x^2) + 3f(1-x) = \frac{1}{x+1}$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.
- A. $I = \frac{9}{2} \ln 2$. B. $I = \frac{2}{9} \ln 2$. C. $I = \frac{4}{3}$. D. $I = \frac{3}{2}$.
- Câu 7. [Chuyên Thái Nguyên - Lần 3 - 2018]** Cho hàm số $y = f(x)$ và thỏa mãn $f(x) - 8x^3 f(x^4) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0$. Tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx = \frac{a-b\sqrt{2}}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{c}; \frac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$
- A. 6. B. -4. C. 4. D. -10.
- Câu 8.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2; \ln 2]$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$. Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của $P = a + b$.
- A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = -2$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

- Câu 9. [Chuyên Vinh- Lần 3 - 2018]** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , $f(0) = 0$ và $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$ bằng
- A. $-\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $-\frac{1}{4}$.
- Câu 10. [Diễn Châu- Nghệ An- lần 3- 2018]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(1+2x) + f(1-2x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$. tính tích phân $I = \int_{-1}^3 f(x)dx$.
- A. $I = 2 - \frac{\pi}{2}$. B. $I = 1 - \frac{\pi}{4}$. C. $I = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$. D. $I = \frac{\pi}{4}$.
- Câu 11.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$.
- A. $I = \frac{3}{2}$. B. $I = 1$. C. $I = \frac{1}{2}$. D. $I = -1$.
- Câu 12.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x$. Tính giá trị của $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.
- A. $I = \frac{2}{2019}$. B. $I = \frac{2}{1009}$. C. $I = \frac{4}{2019}$. D. $I = \frac{1}{1009}$.
- Câu 13.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = e^x$. Tính giá trị của $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$
- A. $I = \frac{e^2 - 1}{2019e}$. B. $I = \frac{e^2 - 1}{2018e}$. C. $I = 0$. D. $I = \frac{e^2 - 1}{e}$.
- Câu 14. [Chuyên Hà Tĩnh - 2018]** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn $2f(2x) + f(1-x) = 12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là
- A. $y = 2x + 2$. B. $y = 4x - 6$. C. $y = 2x - 6$. D. $y = 4x - 2$.
- Câu 15. [Chuyên Thái Bình - Lần 6 - 2018]** Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 2018$ và $g(x)$ là hàm số liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $g(x) + g(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.
- A. $I = 2018$. B. $I = \frac{1009}{2}$. C. $I = 4036$. D. $I = 1008$.
- Câu 16. (Sở Kiên Giang - 2018)** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = -\frac{4}{15}$. B. $I = \frac{1}{15}$. C. $I = \frac{4}{75}$. D. $I = \frac{1}{25}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Biết $\int_0^{x^2} f(t)dt = x \cos(\pi x)$. Giá trị của $f(4)$ là:

A. $f(4) = 1$. B. $f(4) = 4$. C. $f(4) = \frac{1}{2}$. D. $f(4) = \frac{1}{4}$.

Câu 18. [Lương Thế Vinh - Hà Nội - lần 3 - 2018] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

Biết $\int_0^{x^2} f(t)dt = e^{x^2} + x^4 - 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(4)$ là:

A. $f(4) = e^4 + 4$. B. $f(4) = 4e^4$. C. $f(4) = e^4 + 8$. D. $f(4) = 1$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn

$g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t)dt$ và $g(x) = f^2(x)$. Tính $\int_0^1 \sqrt{g(x)}dx$.

A. $\frac{1011}{2}$ B. $\frac{1009}{2}$ C. $\frac{2019}{2}$ D. 505

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[1;2]$. Biết $\int_x^{x^2} f(t)dt = 2x^2 + x - 1$ với $\forall x \in [1;2]$.

Tính tích phân $\int_1^2 f(x)dx = a + \frac{b}{c} \ln d$. Biết a, b, c, d đều là các số nguyên tố. Tính

$T = a + b + c + d$.

A. $T = 10$ B. $T = 11$ C. $T = 17$ D. $T = 16$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f(x^3 + 2x - 2) = 3x - 1$. Tính

$I = \int_1^{10} f(x)dx$.

A. $I = \frac{45}{4}$. B. $I = \frac{9}{4}$. C. $I = \frac{135}{4}$. D. $I = \frac{27}{4}$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f(x^3 + 1) = 2x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$I = \int_0^2 f(x)dx$.

A. $I = -2$. B. $I = \frac{5}{2}$. C. $I = -4$. D. $I = 6$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_1^5 x.f'(x)dx$

A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{17}{4}$. C. $\frac{33}{4}$. D. -1761 .

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f^3(x) + f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$I = \int_0^2 f(x)dx$

A. $I = 2$. B. $I = \frac{3}{2}$. C. $I = \frac{1}{2}$. D. $I = \frac{5}{4}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $2f^3(x) - 3f^2(x) + 6f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính tích phân $I = \int_0^5 f(x) dx$.

- A. $I = \frac{5}{4}$. B. $I = \frac{5}{2}$. C. $I = \frac{5}{12}$. D. $I = \frac{5}{3}$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $x + f^3(x) + 2f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$I = \int_{-2}^1 f(x) dx$.

- A. $I = \frac{7}{4}$. B. $I = \frac{7}{2}$. C. $I = \frac{7}{3}$. D. $I = \frac{5}{4}$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x).f(1-x) = 1$ với

$\forall x \in [0;1]$. Tính giá trị của $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$.

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. 2.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} , ta có $f(x) > 0$ và $f(0).f(2018-x) = 1$. Giá trị của

tích phân $I = \int_0^{2018} \frac{dx}{1+f(x)}$

- A. $I = 2018$. B. $I = 0$ C. $I = 1009$ D. 4016

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(4-x) = f(x)$. Biết

$\int_1^3 xf(x) dx = 5$. Tính tích phân $\int_1^3 f(x) dx$.

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{7}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{11}{2}$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(x) - f(3-x) = 0$. Biết

$\int_{-1}^4 xf(x) dx = 2$. Tính $\int_{-1}^4 f(x) dx$.

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 31. Tính $I = \int_0^2 \min\{x; \sqrt[3]{2-x}\} dx$.

- A. $I = 2$. B. $I = \frac{3}{4}$. C. $I = 1$. D. $I = \frac{5}{4}$.

Câu 32. Tính tích phân $I = \int_0^2 \max\{x; x^3\} dx$.

- A. $\frac{17}{4}$. B. 2. C. $\frac{15}{4}$. D. $\frac{7}{4}$.

Câu 33. Tính tích phân $I = \int_0^3 \max\{x^3; 4x^2 - 3x\} dx$.

- A. $\frac{117}{2}$. B. $\frac{707}{2}$. C. $\frac{275}{12}$. D. $\frac{119}{6}$.

TÍCH PHÂN HÀM ẨN – PHẦN 2

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. [Trường Đức Thọ - Hà Tĩnh - 2018] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx$$

A. 2.

B. 4.

C. -1.

D. 6.

Lời giải**Cách 1: (Dùng công thức - Dạng 2)**

$$\text{Biến đổi } f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow f(x) - 2 \cdot 3x^2 \cdot f(x^3) = -\frac{6}{\sqrt{3x+1}} \text{ với } A=1,$$

$$B=-2.$$

$$\text{Áp dụng công thức ta có: } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{1+(-2)} \int_0^1 -\frac{6}{\sqrt{3x+1}} dx = 4.$$

Cách 2: (Dùng công thức biến đổi - nếu không nhớ công thức)

$$\text{Từ } f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 3x^2 f(x^3) dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$$

$$\text{Đặt } u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx; \text{ Với } x=0 \Rightarrow u=0 \text{ và } x=1 \Rightarrow u=1.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 3x^2 f(x^3) dx = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx \text{ thay vào (*)}, \text{ ta được:}$$

$$\int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 f(x) dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx = 4.$$

Câu 2. [Chu Văn An - Hà Nội - 2018] Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều

$$\text{kiện } 4xf(x^2) + 3f(x-1) = \sqrt{1-x^2}. \text{ Tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $I = \frac{\pi}{4}.$

B. $I = \frac{\pi}{6}.$

C. $I = \frac{\pi}{20}.$

D. $I = \frac{\pi}{16}.$

Lời giải

$$\text{Từ } 4x.f(x^2) + 3f(x-1) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2 \int_0^1 2xf(x^2) dx + 3 \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (*)$$

$$+) \text{ Đặt } u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx; \text{ Với } x=0 \Rightarrow u=0 \text{ và } x=1 \Rightarrow u=1.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 2xf(x^2) dx = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx \quad (1)$$

$$+) \text{ Đặt } t = 1-x \Rightarrow dt = -dx; \text{ Với } x=0 \Rightarrow t=1 \text{ và } x=1 \Rightarrow t=0.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 f(1-x) dx = \int_1^0 f(t) dt = -\int_0^1 f(x) dx \quad (2)$$

Thay (1), (2) vào (*) ta được:

$$2 \int_0^1 f(x) dx + 3 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{5} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{20}.$$

Câu 3. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) + f(2-x) = 2x$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$.

- A. $I = -4$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = \frac{4}{3}$. D. $I = 2$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức - Dạng 2)

Với $f(x) + f(2-x) = 2x$ ta có $A=1$; $B=1$, suy ra: $I = \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{1+1} \int_0^2 2x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2$.

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến - nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x) + f(2-x) = 2x \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(2-x) dx = \int_0^2 2x dx = 4$ (*)

Đặt $u = 2-x \Rightarrow du = -dx$; Với $x=0 \Rightarrow u=2$ và $x=2 \Rightarrow u=0$.

Suy ra $\int_0^2 f(2-x) dx = \int_2^0 f(u) du = -\int_0^2 f(u) du = -I$.

Thay vào (*), ta được $2 \int_0^2 f(x) dx = 4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2$. **Chọn D**

Chú ý: Qua **Câu 1, Câu 2, Câu 3** ta có thể đưa ra dạng tổng quát cho **Dạng 2** như sau :

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn : $A.f(x) + B.u'.f(u) + C.f(a+b-x) = g(x)$

+) Với $\begin{cases} u(a)=a \\ u(b)=b \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{A+B+C} \int_a^b g(x) dx$.

+) Với $\begin{cases} u(a)=b \\ u(b)=a \end{cases}$ thì $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{A-B+C} \int_a^b g(x) dx$.

Trong đề bài thường sẽ bị khuyết một trong các hệ số A, B, C .

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Câu 4. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn $f(x) + 2xf(x^2-2) + 3f(1-x) = 4x^3$.

Tính giá trị của tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$.

- A. $I = 5$. B. $I = \frac{5}{2}$. C. $I = 3$. D. $I = 15$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức - Dạng 2)

Với: $f(x) + (2x)f(x^2-2) + 3f(1-x) = 4x^3$. Ta có:

$A=1; B=1; C=3$ và $u = x^2-2$ thỏa mãn $\begin{cases} u(-1) = -1 \\ u(2) = 2 \end{cases}$.

Khi đó áp dụng công thức (Xem phần chú ý sau lời giải Câu 3) ta có:

$$I = \int_{-1}^2 f(x) dx = \frac{1}{1+1+3} \int_{-1}^2 4x^3 dx = \frac{x^4}{5} \Big|_{-1}^2 = 3.$$

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến - nếu không nhớ công thức)

Từ $f(x) + 2xf(x^2 - 2) + 3f(1 - x) = 4x^3$.

$$\Rightarrow \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_{-1}^2 2x.f(x^2 - 2) dx + 3 \int_{-1}^2 f(1 - x) dx = \int_{-1}^2 4x^3 dx = 15 \quad (*)$$

+) Đặt $u = x^2 - 2 \Rightarrow du = 2x dx$; với $x = -1 \Rightarrow u = -1$ và $x = 2 \Rightarrow u = 2$.

Khi đó $\int_{-1}^2 2x.f(x^2 - 2) dx = \int_{-1}^2 f(u) du = \int_{-1}^2 f(x) dx \quad (1)$

+) Đặt $t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$; Với $x = -1 \Rightarrow t = 2$ và $x = 2 \Rightarrow t = -1$.

Khi đó $\int_{-1}^2 f(1 - x) dx = \int_{2}^{-1} f(t) dt = \int_{-1}^2 f(x) dx \quad (2)$

Thay (1), (2) vào (*) ta được: $5 \int_{-1}^2 f(x) dx = 15 \Rightarrow \int_{-1}^2 f(x) dx = 3$.

Câu 5. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) = \sqrt{x+2} + xf(3-x^2)$.

Tính giá trị của tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$

A. $I = \frac{14}{3}$.

B. $I = \frac{28}{3}$.

C. $I = \frac{4}{3}$.

D. $I = 2$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức dạng 2).

Với $f(x) = \sqrt{x+2} + xf(3-x^2) \Rightarrow f(x) + \frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot f(3-x^2) = \sqrt{x+2}$

$A = 1; B = \frac{1}{2}; C = 0$ và $u = 3 - x^2$ thỏa mãn $\begin{cases} u(-1) = 2 \\ u(2) = -1 \end{cases}$

Khi đó áp dụng công thức (xem phần **chú ý** sau lời giải **câu 3**) ta có:

$$I = \int_{-1}^2 f(x) dx = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} + 0} \int_{-1}^2 \sqrt{x+2} dx = \frac{28}{3}.$$

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến).

Từ $f(x) - xf(3-x^2) = \sqrt{x+2} \Rightarrow \int_{-1}^2 f(x) dx - \int_{-1}^2 xf(3-x^2) dx = \int_{-1}^2 \sqrt{x+2} dx = \frac{14}{3} \quad (*)$

Đặt $u = 3 - x^2 \Rightarrow du = -2x dx$ với $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow u = 2 \\ x = 2 \Rightarrow u = -1 \end{cases}$

Khi đó $\int_{-1}^2 xf(3-x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{2}^{-1} f(u) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 f(x) dx$ thay vào (*) ta được

$$\int_{-1}^2 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^2 f(x) dx = \frac{14}{3} \Leftrightarrow \int_{-1}^2 f(x) dx = \frac{28}{3}.$$

Câu 6. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x) + xf(1-x^2) + 3f(1-x) = \frac{1}{x+1}$.

Tính giá trị của tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = \frac{9}{2} \ln 2$.

B. $I = \frac{2}{9} \ln 2$.

C. $I = \frac{4}{3}$.

D. $I = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức - Dạng 2)

Với: $f(x) - \frac{1}{2} \cdot (-2x)f(1-x^2) + 3f(1-x) = 2x$. Ta có:

$$A = 1; B = \frac{-1}{2}; C = 3 \text{ và } u = x^2 - 2 \text{ thỏa mãn } \begin{cases} u(0) = 1 \\ u(1) = 0 \end{cases}.$$

Khi đó áp dụng công thức (Xem phần **Chú ý** sau lời giải **Câu 3**) ta có:

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 3} \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \frac{2}{9} \ln|x+1| \Big|_0^1 = \frac{2}{9} \ln 2.$$

Cách 2: (Dùng công thức đổi biến nếu không nhớ công thức)

$$\text{Từ } f(x) + xf(1-x^2) + 3f(1-x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 xf(1-x^2)dx + 3 \int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \ln|x+1| \Big|_0^1 = \ln 2. (*)$$

+) Đặt $u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2xdx$; Với $x = 0 \Rightarrow u = 1$ và $x = 1 \Rightarrow u = 0$.

$$\text{Khi đó } \int_0^1 xf(1-x^2)dx = \frac{1}{2} \int_1^0 f(u)du = -\frac{1}{2} \int_0^1 f(u)du = -\frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx \quad (1).$$

+) Đặt $u = 1 - x \Rightarrow du = -dx$; Với $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

$$\text{Khi đó } \int_0^1 xf(1-x)dx = \int_1^0 f(t)dt = -\int_0^1 f(x)dx \quad (2). \text{ Thay (1), (2) vào (*) ta được:}$$

$$\int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx + 3 \int_0^1 f(x)dx = \ln 2 \Rightarrow \frac{9}{2} \int_0^1 f(x)dx = \ln 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{9} \ln 2.$$

Câu 7. [Chuyên Thái Nguyên - Lần 3 - 2018] Cho hàm số $y = f(x)$ và thỏa mãn

$$f(x) - 8x^3 f(x^4) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0. \text{ Tích phân } I = \int_0^1 f(x)dx = \frac{a-b\sqrt{2}}{c} \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ và}$$

$\frac{a}{c}; \frac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$

A. 6.

B. -4.

C. 4.

D. -10.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức - Dạng 2)

$$\text{Biến đổi } f(x) - 8x^3 f(x^4) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow f(x) - 2 \cdot (4x^3) f(x^4) = -\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} \text{ với}$$

$$A=1; B=-2$$

$$\text{Áp dụng công thức ta có: } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{1+(-2)} \int_0^1 \left(-\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow t dt = x dx; \text{ Với } x=0 \Rightarrow t=1 \text{ và } x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}.$$

$$\text{Khi đó: } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{t} \cdot t dt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1) dt = \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{a-b\sqrt{2}}{c}$$

$$\text{Suy ra } a=2; b=1; c=3 \Rightarrow a+b+c=6.$$

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến - nếu không nhớ công thức)

$$\text{Từ } f(x) - 8x^3 f(x^4) + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 4x^3 f(x^4) dx + \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx = 0 (*)$$

$$\text{Đặt } u = x^4 \Rightarrow du = 4x^3 dx; \text{ Với } x=0 \Rightarrow u=0 \text{ và } x=1 \Rightarrow u=1.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 4x^3 f(x^4) dx = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx \text{ thay vào } (*), \text{ ta được:}$$

$$\int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow t dt = x dx; \text{ Với } x=0 \Rightarrow t=1 \text{ và } x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}.$$

$$\text{Khi đó: } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{t} \cdot t dt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1) dt = \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{a-b\sqrt{2}}{c}$$

$$\text{Suy ra } a=2; b=1; c=3 \Rightarrow a+b+c=6.$$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2; \ln 2]$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của $P = a + b$.

A. $P = \frac{1}{2}$.

B. $P = -2$.

C. $P = -1$.

D. $P = 2$.

Lời giải

Cách 1: Dùng công thức - Dạng 2.

Với $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$ ta có $A=1; B=1$, suy ra

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = \frac{1}{1+1} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 1}$$

Cách 2: Dùng phương pháp đổi biến nếu không nhớ công thức

$$\text{Từ } f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1} \Rightarrow \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx + \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 1} (*)$$

$$\text{Đặt } u = -x \Rightarrow du = -dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(u) du = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx \text{ thay vào } (*) \text{ ta được:}$$

$$2 \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 1} \Leftrightarrow \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 1}$$

$$\text{Đặt } t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx; \text{ Với } x = -\ln 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}, x = \ln 2 \Rightarrow t = 2$$

$$\Rightarrow \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 1} = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{e^x dx}{e^x(e^x + 1)} = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dt}{t(t+1)} = \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \ln 2$$

$$\text{Khi đó: } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = \frac{1}{2} \ln 2 = a \ln 2 + b \ln 3 \xrightarrow{a, b \in \mathbb{Q}} a = \frac{1}{2}, b = 0 \Rightarrow P = a + b = \frac{1}{2}.$$

Câu 9. [Chuyên Vinh- Lần 3 - 2018] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} ,

$f(0) = 0$ và $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f'(x) dx$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{\pi}{4}$.

D. $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức theo góc nhìn dạng 2)

Với $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$, ta có $A = 1; B = 1$.

$$\text{Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{1+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{4}.$$

Cách 2: (Dùng phương pháp đổi biến - nếu nhớ công thức)

$$\text{Từ } f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} (*)$$

$$\text{Đặt } u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow du = -dx$$

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx, \text{ thay vào } (*) \text{ ta được}$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx (*)$$

Từ điều kiện $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x$ suy ra

$$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = 0 \\ f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (2).$$

Thay (1), (2) vào (*), ta được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx = -\frac{1}{4}$.

Câu 10. [Diễn Châu- Nghệ An- lần 3- 2018] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn

$$f(1+2x) + f(1-2x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ tính tích phân } I = \int_{-1}^3 f(x)dx.$$

A. $I = 2 - \frac{\pi}{2}$.

B. $I = 1 - \frac{\pi}{4}$.

C. $I = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$.

D. $I = \frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Đặt $t = 1 + 2x \Rightarrow 1 - 2x = 2 - t$ và $x = \frac{t-1}{2}$, khi đó điều kiện trở thành

$$f(t) + f(2-t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 - 2t + 5} \Rightarrow f(x) + f(2-x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5} (*)$$

Cách 1: (Dùng công thức- theo góc nhìn dạng 2)

Với $f(x) + f(2-x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5}$ ta có $A = 1; B = 1$.

$$\text{Suy ra } \int_{-1}^3 f(x)dx = \frac{1}{1+1} \int_{-1}^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5} dx \approx 0,429 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Cách 2: (Dùng công thức đổi biến - nếu nhớ công thức)

Từ (*), ta có $f(x) + f(2-x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5}$

$$\Rightarrow \int_{-1}^3 f(x)dx + \int_{-1}^3 f(2-x)dx = \int_{-1}^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5} dx \quad (2*)$$

Đặt $u = 2 - x \Rightarrow du = -dx$. Với $x = -1 \Rightarrow u = 3; x = 3 \Rightarrow u = -1$.

Suy ra $\int_{-1}^3 f(2-x)dx = \int_{-1}^3 f(u)du = \int_{-1}^3 f(x)dx$, thay vào (*), ta được:

$$2 \int_{-1}^3 f(x)dx = \int_{-1}^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5} dx \Rightarrow \int_{-1}^3 f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5} dx \approx 0,429 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

TÓM TẮT HÀM ẨN DẠNG 3:

Cách giải: Lần lượt đặt $t = u(x)$ và $t = v(x)$ để giải hệ phương trình hai ẩn (trong đó có ẩn $f(x)$) để suy ra hàm số $f(x)$ (nếu $u(x) = x$ thì chỉ cần đặt một lần $t = v(x)$).

Các kết quả đặc biệt:

Cho $A.f(ax+b) + B.f(-ax+c) = g(x)$ với $A^2 \neq B^2$) khi đó

$$f(x) = \frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right) - B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2 - B^2} \quad (*)$$

+) Hệ quả 1 của (*): $A.f(x) + B.f(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{A.g(x) - B.g(-x)}{A^2 - B^2}$

+) Hệ quả 2 của (*): $A.f(x) + B.f(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$.

A. $I = \frac{3}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = -1$.

Lời giải

Đặt, $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t}$ khi đó điều kiện trở thành $f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) = \frac{3}{t} \Rightarrow 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$.

Hay $4f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x}$, kết hợp với điều kiện $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Suy ra :

$$3f(x) = \frac{6}{x} - 3x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x^2} - 1 \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{2}{x^2} - 1 \right) dx = \left(\frac{-2}{x} - x \right) \Bigg|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{3}{2}.$$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x$. Tính

giá trị của $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

A. $I = \frac{2}{2019}$.

B. $I = \frac{2}{1009}$.

C. $I = \frac{4}{2019}$.

D. $I = \frac{1}{1009}$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức - theo góc nhìn dạng 2)

Với $f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x$ ta có $A=1; B=2018$

$$\text{Suy ra } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{1+2018} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{4}{2019}$$

Cách 2: (Dùng công thức - theo góc nhìn dạng 3)

Áp dụng Hệ quả 2: $A.f(x) + Bf(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{A+B}$ với $g(x)$ là hàm số chẵn.

Ta có $f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x \Rightarrow f(x) = \frac{2x \sin x}{2019}$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{2}{2019} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{4}{2019}$$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = e^x$. Tính giá trị

của $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$

A. $I = \frac{e^2 - 1}{2019e}$. **B.** $I = \frac{e^2 - 1}{2018e}$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = \frac{e^2 - 1}{e}$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức - theo góc nhìn dạng 2).

Với $f(-x) + 2018f(x) = e^x$ ta có $A = 1; B = 2018$.

$$\text{Suy ra } I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{1 + 2018} \int_{-1}^1 e^x dx = \frac{1}{2019} e^x \Big|_{-1}^1 = \frac{e^2 - 1}{2019e}.$$

Cách 2: (Dùng công thức -theo góc nhìn dạng 3)

$$\text{Áp dụng Hệ quả 1: } A.f(x) + B.f(-x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{A.g(x) - B.g(-x)}{A^2 - B^2}.$$

Ta có:

$$f(-x) + 2018f(x) = e^x \Rightarrow f(x) = \frac{2018e^x - e^{-x}}{2018^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2019 \cdot 2017} \int_{-1}^1 (2018e^x - e^{-x}) dx$$

$$\approx 1,164 \cdot 10^{-3} \approx \frac{e^2 - 1}{2019e} \text{ (Casio).}$$

Câu 14. [Chuyên Hà Tĩnh - 2018] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn $2f(2x) + f(1-x) = 12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y = 2x + 2$. **B.** $y = 4x - 6$. **C.** $y = 2x - 6$. **D.** $y = 4x - 2$.

Lời giải

Áp dụng kết quả Dạng 3:

“Cho $A.f(ax+b) + B.f(-ax+c) = g(x)$ (với $A^2 \neq B^2$)

$$\text{khi đó } f(x) = \frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right) - B.g\left(\frac{x-c}{a}\right)}{A^2 - B^2}.”$$

Ta có

$$\begin{aligned} 2f(2x) + f(1-x) = 12x^2 = g(x) &\Leftrightarrow f(x) = \frac{2.g\left(\frac{x}{2}\right) - g\left(\frac{x-1}{-2}\right)}{2^2 - 1} \\ &= \frac{6x^2 - 3(x-1)^2}{3} = x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

Suy ra $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 4 \end{cases}$, khi đó phương trình tiếp tuyến cần lập là: $y = 4x - 2$.

Câu 15. [Chuyên Thái Bình - Lần 6 - 2018] Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 2018$ và $g(x)$ là hàm số liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $g(x) + g(-x) = 1$,

$\forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

- A.** $I = 2018$. **B.** $I = \frac{1009}{2}$. **C.** $I = 4036$. **D.** $I = 1008$.

Lời giải

Áp dụng Hệ quả 2 (của Dạng 3):

$$A.g(x) + B.g(-x) = h(x) \Rightarrow g(x) = \frac{h(x)}{A+B} \text{ với } h(x) \text{ là hàm số chẵn.}$$

$$\text{Ta có: } g(x) + g(-x) = 1 = h(x) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện $f(x)$ là hàm số chẵn, ta có:

$$I = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 2018.$$

Chú ý: Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-a; a] \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.

Câu 16. (Sở Kiên Giang - 2018) Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x)dx.$$

- A.** $I = -\frac{4}{15}$. **B.** $I = \frac{1}{15}$. **C.** $I = \frac{4}{75}$. **D.** $I = \frac{1}{25}$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng công thức - theo góc nhìn dạng 2)

Với $2f(x) + 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}$ ta có $A = 2; B = 3$.

$$\text{Suy ra: } \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2+3} \int_0^1 x\sqrt{1-x}dx \stackrel{\text{Casio}}{=} 0,05(3) = \frac{4}{75}.$$

Cách 2: (Dùng công thức - theo góc nhìn dạng 3)

Áp dụng kết quả của Dạng 3:

“Cho $A.f(ax+b) + B.f(-ax+c) = g(x)$ (Với $A^2 \neq B^2$) khi đó

$$f(x) = \frac{A.g\left(\frac{x-b}{a}\right) - B.g\left(\frac{x-c}{-a}\right)}{A^2 - B^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2f(x) + 3f(1-x) &= x\sqrt{1-x} = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{2g(x) - 3g(1-x)}{2^2 - 3^2} \\ &= \frac{2x\sqrt{1-x} - 3(1-x)\sqrt{x}}{-5}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{2x\sqrt{1-x} - 3(1-x)\sqrt{x}}{-5} dx \stackrel{\text{Casio}}{=} 0,05(3) = \frac{4}{75}.$$

Cách 3: (Dùng phương pháp đổi biến - nếu không nhớ công thức)

$$\begin{aligned} \text{Từ } 2f(x) + 3f(1-x) &= x\sqrt{1-x} \Rightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx + 3 \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx \\ &\stackrel{\text{Casio}}{=} 0,2(6) = \frac{4}{15} (*) \text{ Đặt } u = 1-x \Rightarrow du = -dx; \text{ Với } x=0 \Rightarrow u=1 \text{ và } x=1 \Rightarrow u=0. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(1-x) dx = \int_1^0 f(u) du = - \int_0^1 f(x) dx \text{ thay vào } (*), \text{ ta được:}$$

$$5 \int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{15} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{75}.$$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Biết $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cos(\pi x)$. Giá trị của $f(4)$ là:

- A.** $f(4) = 1$. **B.** $f(4) = 4$. **C.** $f(4) = \frac{1}{2}$. **D.** $f(4) = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Sử dụng công thức $\left(\int_a^{u(x)} f(t) dt \right)' = u' \cdot f(u)$ (xem lại **DẠNG 4**), ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^{x^2} f(t) dt &= x \cos(\pi x) \Rightarrow \left(\int_0^{x^2} f(t) dt \right)' = (x \cos(\pi x))' \\ &\Leftrightarrow 2xf'(x^2) = \cos(\pi x) - \pi x \sin(\pi x) \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Thay } x=2 \text{ vào } (*), \text{ ta được: } 4f(4) = \cos(2\pi) - 2\pi \cdot \sin(2\pi) = 1 \Rightarrow f(4) = \frac{1}{4}.$$

Câu 18. [Lương Thế Vinh - Hà Nội - lần 3 - 2018] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

Biết $\int_0^{x^2} f(t) dt = e^{x^2} + x^4 - 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(4)$ là:

- A.** $f(4) = e^4 + 4$. **B.** $f(4) = 4e^4$. **C.** $f(4) = e^4 + 8$. **D.** $f(4) = 1$.

Lời giải

Sử dụng công thức $\left(\int_a^{u(x)} f(t) dt \right)' = u' \cdot f(u)$ (xem lại **DẠNG 4**), ta có:

$$\int_0^{x^2} f(t) dt = e^{x^2} + x^4 - 1 \Rightarrow \left(\int_0^{x^2} f(t) dt \right)' = (e^{x^2} + x^4 - 1)'$$

$$\Leftrightarrow 2xf(x^2) = 2x \cdot e^{x^2} + 4x^3.$$

$$\text{Suy ra: } f(x^2) = e^{x^2} + 2x^2 \Rightarrow f(x) = e^x + 2x$$

$$\Rightarrow f(4) = e^4 + 8.$$

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn

$$g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt \text{ và } g(x) = f^2(x). \text{ Tính } \int_0^1 \sqrt{g(x)} dx.$$

A. $\frac{1011}{2}$

B. $\frac{1009}{2}$

C. $\frac{2019}{2}$

D. 505

Lời giải

Sử dụng công thức $\left(\int_0^{u(x)} f(t) dt \right)' = u' \cdot f(u)$, ta có

$$g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt \Rightarrow g'(x) = 2018 f(x) \xrightarrow[\substack{g(x)=f^2(x) \\ f(x)>0}]{\substack{g(x)=f^2(x) \\ f(x)>0}} g'(x) = 2018 \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} = 2018.$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} dx = \int 2018 dx \Leftrightarrow 2\sqrt{g(x)} = 2018x + C (*)$$

Từ điều kiện $g(x) = 1 + 2018 \int_0^x f(t) dt \Rightarrow g(0) = 1$ thay vào (*) suy ra $C = 2$.

$$\text{Khi đó } \sqrt{g(x)} = 1009x + 1 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{g(x)} dx = \int_0^1 (1009x + 1) dx = \frac{1011}{2}.$$

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[1;2]$. Biết $\int_x^{x^2} f(t) dt = 2x^2 + x - 1$ với $\forall x \in [1;2]$. Tính

tích phân $\int_1^2 f(x) dx = a + \frac{b}{c} \ln d$. Biết a, b, c, d đều là các số nguyên tố. Tính

$$T = a + b + c + d.$$

A. $T = 10$

B. $T = 11$

C. $T = 17$

D. $T = 16$

Lời giải

Sử dụng công thức $\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt \right)' = u' \cdot f(u) - v' \cdot f(v)$, ta có

$$\int_x^{x^2} f(t) dt = 2x^2 + x - 1 \Rightarrow \left(\int_x^{x^2} f(t) dt \right)' = (2x^2 + x - 1)' \Leftrightarrow 2x \cdot f(x) - f(x) = 4x + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4x+1}{2x-1}, \forall x \in [1; 2]$$

$$\text{Suy ra } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{4x+1}{2x-1} dx = \int_1^2 \left(2 + \frac{3}{2x-1} \right) dx = \left(2x + \frac{3}{2} \ln|2x-1| \right) \Big|_1^2 = 2 + \frac{3}{2} \ln 3$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a=c=2 \\ b=d=3 \end{cases} \Rightarrow T=10.$$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f(x^3 + 2x - 2) = 3x - 1$. Tính $I = \int_1^{10} f(x) dx$.

A. $I = \frac{45}{4}$.

B. $I = \frac{9}{4}$.

C. $I = \frac{135}{4}$.

D. $I = \frac{27}{4}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = x^3 + 2x - 2 \Rightarrow \begin{cases} dt = (3x^2 + 2) dx \\ f(t) = 3x - 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta viết lại } I = \int_1^{10} f(x) dx = \int_1^{10} f(t) dt.$$

$$\text{Đổi cận: Với } t = 1 \Rightarrow 1 = x^3 + 2x - 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ và } t = 10 \Rightarrow 10 = x^3 + 2x - 2 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^{10} f(t) dt = \int_1^3 (3x - 1)(3x^2 + 2) dx = \frac{135}{4}.$$

Chú ý: Đây là lớp câu hỏi thuộc **dạng 5**, ta có thể tóm tắt hàm ẩn dạng 5 dưới phát biểu của bài toán sau:

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(u(x)) = v(x)$ và $v(x)$ là hàm đơn điệu (luôn đồng biến hoặc nghịch biến) trên \mathbb{R} . Hãy đi tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$.

$$\text{Cách giải: Đặt } t = u(x) \Rightarrow \begin{cases} dt = u'(x) dx \\ f(t) = v(x) \end{cases}.$$

$$\text{Ta viết lại } I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

$$\text{Đổi cận: Với } t = a \Rightarrow u(x) = a \Leftrightarrow x = \alpha \text{ và } t = b \Rightarrow b = u(x) \Leftrightarrow x = \beta.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta v(x) \cdot u'(x) dx.$$

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f(x^3 + 1) = 2x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I = \int_0^2 f(x) dx.$$

A. $I = -2$.

B. $I = \frac{5}{2}$.

C. $I = -4$.

D. $I = 6$.

Lời giải

Đặt $t = x^3 + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = 3x^2 dx \\ f(t) = 2x - 1 \end{cases}$.

Ta viết lại $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(t) dt$.

Đổi cận: Với $t = 0 \Rightarrow 0 = x^3 + 1 \Leftrightarrow x = -1$ và $t = 1 \Rightarrow 1 = x^3 + 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi đó $I = \int_0^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 (2x - 1) \cdot 3x^2 dx = -2$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_1^5 x \cdot f'(x) dx$.

A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{17}{4}$.

C. $\frac{33}{4}$.

D. -1761 .

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = xf(x) \Big|_1^5 - \int_1^5 f(x) dx$.

Từ $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2 \Rightarrow \begin{cases} f(5) = 5 & (x = 1) \\ f(1) = 2 & (x = 0) \end{cases}$, suy ra $I = 23 - \int_1^5 f(x) dx$.

Đặt $t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = (3x^2 + 3) dx \\ f(t) = 3x + 2 \end{cases}$

Đổi cận: Với $t = 1 \Rightarrow 1 = x^3 + 3x + 1 \Leftrightarrow x = 0$ và $t = 5 \Rightarrow x^3 + 3x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi đó $I = 23 - \int_1^5 f(x) dx = 23 - \int_0^1 (3x + 2)(3x^2 + 3) dx \stackrel{\text{Casio}}{=} \frac{33}{4}$

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f^3(x) + f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$I = \int_0^2 f(x) dx$

A. $I = 2$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Đặt $y = f(x) \Rightarrow x = y^3 + y \Rightarrow dx = (3y^2 + 1) dy$

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow y^3 + y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \\ x = 2 \rightarrow y^3 + y = 2 \Leftrightarrow y = 1 \end{cases}$

Khi đó $I = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 y(3y^2 + 1) dy = \int_0^1 (3y^3 + y) dy = \frac{5}{4}$

Chú ý: Đây là lớp câu hỏi thuộc **Dạng 6**, ta có thể **TÓM TẮT HÀM ẨN DẠNG 6** dưới phát biểu của bài toán sau:

Bài toán: “ Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $g[f(x)] = x$ và $g(t)$ là hàm đơn điệu (luôn đồng biến hoặc nghịch biến) trên \mathbb{R} . Hãy tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$ ”

Cách giải: Đặt $y = f(x) \Rightarrow x = g(y) \Rightarrow dx = g'(y) dy$

$$\text{Đổi cận} \begin{cases} x = a \rightarrow g(y) = a \Leftrightarrow y = \alpha \\ x = b \rightarrow g(y) = b \Leftrightarrow y = \beta \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta yg(y) dy$$

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $2f^3(x) - 3f^2(x) + 6f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_0^5 f(x) dx$.

A. $I = \frac{5}{4}$.

B. $I = \frac{5}{2}$.

C. $I = \frac{5}{12}$.

D. $I = \frac{5}{3}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } y = f(x) \Rightarrow x = 2y^3 - 3y^2 + 6y \Rightarrow dx = 6(y^2 - y + 1) dy.$$

$$\text{Đổi cận: với } x = 0 \Rightarrow 2y^3 - 3y^2 + 6y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ và } x = 5 \Rightarrow 2y^3 - 3y^2 + 6y = 5 \Leftrightarrow y = 1.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 y \cdot 6(y^2 - y + 1) dy = 6 \int_0^1 (y^3 - y^2 + y) dy = \frac{5}{2}.$$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $x + f^3(x) + 2f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_{-2}^1 f(x) dx$.

A. $I = \frac{7}{4}$.

B. $I = \frac{7}{2}$.

C. $I = \frac{7}{3}$.

D. $I = \frac{5}{4}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } y = f(x) \Rightarrow x = -y^3 - 2y + 1 \Rightarrow dx = (-3y^2 - 2) dy.$$

$$\text{Đổi cận: Với } x = -2 \Rightarrow -y^3 - 2y + 1 = -2 \Leftrightarrow y = 1; x = 1 \Rightarrow -y^3 - 2y + 1 = 1 \Leftrightarrow y = 0.$$

$$\text{Khi đó: } I = \int_1^0 y(-3y^2 - 2) dy = \frac{7}{4}.$$

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x) \cdot f(1-x) = 1$ với $\forall x \in [0;1]$. Tính giá trị của $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$.

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt } t = 1 - x &\Rightarrow \begin{cases} dt = -dx \\ f(x) = \frac{1}{f(t)} \end{cases} \text{ và } x = a \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 0. \text{ Khi đó } I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + f(x)} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{1}{f(t)}} = \int_0^1 \frac{f(t)dt}{1 + f(t)}. \\ 2I &= \int_0^1 \frac{dx}{1 + f(x)} + \int_0^1 \frac{f(x)dx}{1 + f(x)} = \int_0^1 dx = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Chú ý: Đây là câu hỏi thuộc **Dạng 7**, ta có thể **TÓM TẮC HÀM ẨN DẠNG 7** dưới phát biểu của bài toán sau:

Bài toán: “ Cho $f(x) \cdot f(a + b - x) = k^2$, khi đó $I = \int_a^b \frac{dx}{k + f(x)} = \frac{b - a}{2k}$

Chứng minh:

$$\text{Đặt } t = a + b - x \Rightarrow \begin{cases} dt = -dx \\ f(x) = \frac{k^2}{f(t)} \end{cases} \text{ và } x = a \Rightarrow t = b; x = b \Rightarrow t = a.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_a^b \frac{dx}{k + f(x)} = \int_a^b \frac{dx}{k + \frac{k^2}{f(t)}} = \frac{1}{k} \int_a^b \frac{f(t)dt}{k + f(t)}.$$

$$2I = \int_a^b \frac{dx}{k + f(x)} + \frac{1}{k} \int_a^b \frac{f(x)dx}{k + f(x)} = \frac{1}{k} \int_a^b dx = \frac{1}{k}(b - a) \Rightarrow I = \frac{b - a}{2k}.$$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} , ta có $f(x) > 0$ và $f(0) \cdot f(2018 - x) = 1$. Giá trị của

tích phân $I = \int_0^{2018} \frac{dx}{1 + f(x)}$

A. $I = 2018$.

B. $I = 0$

C. $I = 1009$

D. 4016

Lời giải

Áp dụng kết quả của dạng 7 (xem lại câu 27), ta có $I = \int_0^{2018} \frac{1}{1 + f(x)} dx = \frac{2018 - 0}{2 \cdot 1} = 1009$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(4 - x) = f(x)$. Biết

$\int_1^3 xf(x)dx = 5$. Tính tích phân $\int_1^3 f(x)dx$.

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. $\frac{9}{2}$.

D. $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Đặt $t = 4 - x \Rightarrow dt = -dx$ và $x = 1 \Rightarrow t = 3; x = 3 \Rightarrow t = 1$.

Khi đó: $5 = \int_1^3 xf(x)dx = \int_1^3 (4 - t)f(4 - t)dt = \int_1^3 (4 - x)f(4 - x)dx = \int_1^3 (4 - x)f(x)dx$.

$$\text{Suy ra: } 10 = \int_1^3 xf(x)dx + \int_1^3 (4-x)f(x)dx = 4 \int_1^3 f(x)dx = \frac{5}{2}.$$

Chú ý: Đây là câu hỏi thuộc **dạng 8**, ta có thể **TÓM TẮT HÀM ẨN DẠNG 8** dưới phát biểu của bài toán sau:

Bài toán: Cho
$$\begin{cases} f(a+b-x) = f(x) \\ \int_a^b xf(x)dx = I \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \frac{2I}{a+b}.$$

Chứng minh: Đặt $t = a+b-x \Rightarrow \begin{cases} dt = -dx \\ x = a \Rightarrow t = b \\ x = b \Rightarrow t = a \end{cases}$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b (a+b-t)f(a+b-t)dt \\ &= \int_a^b (a+b-x)f(a+b-x)dx = \int_a^b (a+b-x)f(x)dx. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } 2I = \int_a^b xf(x)dx + \int_a^b (a+b-x)f(x)dx = (a+b) \int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \frac{2I}{a+b}.$$

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(x) - f(3-x) = 0$. Biết

$$\int_{-1}^4 xf(x)dx = 2. \text{ Tính } \int_{-1}^4 f(x)dx.$$

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Áp dụng kết quả Dạng 8 (bài 29) ta có: $\int_{-1}^4 f(x)dx = \frac{2I}{a+b} = \frac{2 \cdot 2}{(-1)+4} = \frac{4}{3}.$

Câu 31. Tính $I = \int_0^2 \min\{x; \sqrt[3]{2-x}\}dx.$

A. $I = 2$.

B. $I = \frac{3}{4}$.

C. $I = 1$.

D. $I = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Ta xét dấu $f(x) = x - \sqrt[3]{2-x}$ trên đoạn $[0; 2]$.

$$\text{Ta có } x - \sqrt[3]{2-x} = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng xét dấu

x	0		1		2
$f(x)$		-	0	+	

$$\text{Do đó } \min\{x; \sqrt[3]{2-x}\} = \begin{cases} x & \text{khi } x \in [0; 1] \\ \sqrt[3]{2-x} & \text{khi } x \in [1; 2] \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^2 \min \{x; \sqrt[3]{2-x}\} dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 \sqrt[3]{2-x} dx = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

Câu 32. Tính tích phân $I = \int_0^2 \max \{x; x^3\} dx$.

A. $\frac{17}{4}$.

B. 2.

C. $\frac{15}{4}$.

D. $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Trên đoạn $[0; 2]$, xét $x \geq x^3 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) \leq 0 \xrightarrow{x \in [0; 2]} 0 \leq x \leq 1$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} x \in [0; 1] \Rightarrow x \geq x^3 \\ x \in [1; 2] \Rightarrow x \leq x^3 \end{cases} \Rightarrow \max_{[0; 2]} \{x; x^3\} = \begin{cases} x & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^2 \max \{x; x^3\} dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 x^3 dx = \frac{1}{2} + \frac{15}{4} = \frac{17}{4}.$$

Chú ý: Đây là câu hỏi thuộc **Dạng 9 (Tích phân cho bởi nhiều công thức dưới hình thức bài toán min, max)** ta có thể **TÓM TẮT HÀM ẨN DẠNG 9** dưới phát biểu của bài toán sau:

Bài toán: Tính tích phân $I = \int_a^b \max \{f(x); g(x)\} dx$ hoặc $I = \int_a^b \min \{f(x); g(x)\} dx$.

Cách giải: (tham khảo qua lời giải của Câu 31, 32, 33).

Câu 33. Tính tích phân $I = \int_0^3 \max \{x^3; 4x^2 - 3x\} dx$.

A. $\frac{117}{2}$.

B. $\frac{707}{2}$.

C. $\frac{275}{12}$.

D. $\frac{119}{6}$.

Lời giải

Trên đoạn $[0; 3]$:

$$\text{Xét } x^3 \geq 4x^2 - 3x \Leftrightarrow x(x-1)(x-3) \geq 0 \xrightarrow{x \in [0; 3]} x \in [0; 1].$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x \in [0; 1] \Rightarrow x^3 \geq 4x^2 - 3x \\ x \in [1; 3] \Rightarrow x^3 \leq 4x^2 - 3x \end{cases} \Rightarrow \max_{[0; 3]} \{x^3; 4x^2 - 3x\} = \begin{cases} x^3 & \text{khi } x \in [0; 1] \\ 4x^2 - 3x & \text{khi } x \in [1; 3] \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^3 \max \{x^3; 4x^2 - 3x\} dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^3 (4x^2 - 3x) dx = \frac{275}{12}.$$