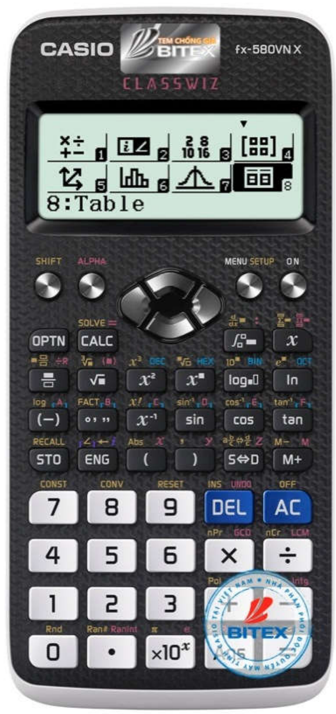
MÁY TÍNH CẦM TAY CASIO FX-580VN X
HỖ TRỢ MỘT SỐ DẠNG TOÁN NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

Với hình thức thi Trắc nghiệm thì việc sử dụng máy tính thành thạo và hiệu quả giúp học sinh hạn chế tính nhẩm. tránh trường hợp sai số đáng tiếc (cầu trúc đề bài có các đáp án nhiễu). Mặt khác tối ưu thời gian làm bài.

Nội dung sau đây Diễn đàn Toán CASIO khái quát lại các kỹ thuật thường sử dụng trong Chương IV – Nguyên hàm, Tích phân và ứng dụng. Ngoài việc giới thiệu, Diễn đàn có phân tích và bình luận, kèm những lưu ý đối với mỗi kỹ thuật đó.

Gồm có:

1. *Kỹ thuật phân tích phân thức hữu tỷ*
2. *Kỹ thuật thế thông thường*
3. *Kỹ thuật tính những bài toán phức tạp hơn.*
4. *Kỹ thuật nhân đa thức*
5. *Kỹ thuật chuyển nguyên hàm thành tích phân*
6. *Kỹ thuật chuyển nguyên hàm thành đạo hàm*



Đầu tiên là kỹ thuật phân tích phân thức hữu tỷ hay các bạn học sinh thường gọi với cái tên "nhảy tầng lầu" ☺

1. Kỹ thuật phân tích phân thức hữu tỷ

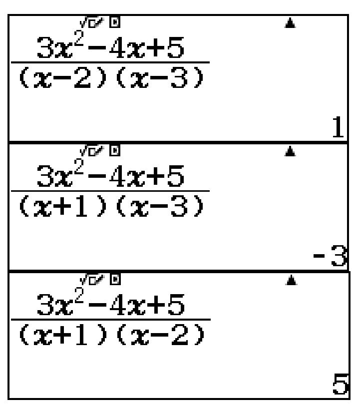
Bài toán 1: Cho

$\int \frac{3x^2-4x+5}{x^3-4x^2+x+6}dx = \int\left(\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x-3}\right)dx$. Tính $S = a+b+c$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn trên máy tính CASIO fx-570VN PLUS:

Tìm các số a,b,c:
$$\begin{cases} a = \left(\dfrac{3x^2-4x+5}{(x-2)(x-3)}\right)\Bigg|_{x=-1} = 1 \\ b = \left(\dfrac{3x^2-4x+5}{(x+1)(x-3)}\right)\Bigg|_{x=2} = -3 \\ c = \left(\dfrac{3x^2-4x+5}{(x+1)(x-2)}\right)\Bigg|_{x=3} = 5 \end{cases}$$



Vậy chọn đáp án A.

Nhận xét: Vận dụng thành thạo kỹ thuật này sẽ hỗ trợ tốt trong quá trình kiểm tra với hình thức tự luận đang được duy trì ở các tỉnh thành.

Bài toán 2: Cho $\int \frac{11x+8-x^2}{x^3-x^2-5x-3}dx = \int\left(\frac{a}{(x+1)^2}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-3}\right)dx$. Tính $S=a+b+c$

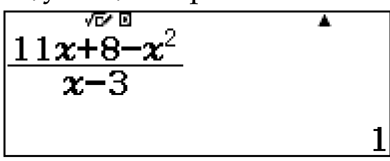
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

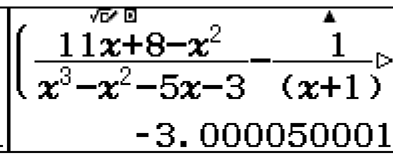
Hướng dẫn trên máy tính CASIO fx-570VN PLUS:

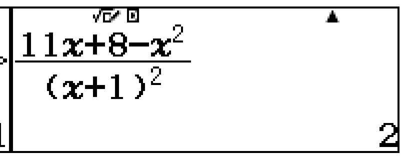
Tìm các số a,b,c:

$$\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{11x+8-x^2}{x-3}=1 \\ b=\lim\limits_{x\to -1}\left[\left(\dfrac{11x+8-x^2}{x^3-x^2-5x-3}-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)(x+1)\right]=\left(\dfrac{11x+8-x^2}{x^3-x^2-5x-3}-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)(x+1)\Big|_{\text{CALC } x=-1+0,0001}=-3 \\ c=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{11x+8-x^2}{(x+1)^2}\right)=2 \end{cases}$$

Vậy Chọn đáp án A.







2. Kỹ thuật thế thông thường

Bài toán 1: Biết $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}dx = a\ln 5+b\ln 3$. Giá trị của a,b là:

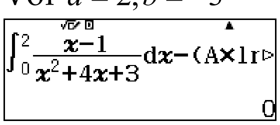
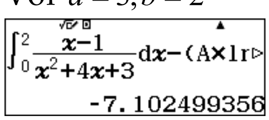
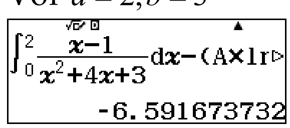
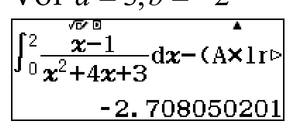
A. $a=2;b=-3$ B. $a=3;b=2$

C. $a=2;b=3$ D. $a=3;b=-2$

Giải trên máy tính CASIO fx-570VN PLUS.

① Nhập biểu thức $\int_0^2 \frac{X-1}{X^2+4X+3}dx-(A\ln 5+B\ln 3)$ vào máy.

② CALC tại các đáp án:

Đáp án A:	Đáp án B:	Đáp án C:	Đáp án D:
Với $a=2;b=-3$ 	Với $a=3;b=2$ 	Với $a=2;b=3$ 	Với $a=3;b=-2$ 
Nhận	Loại	Loại	Loại

Bài toán 2: Tìm a thỏa $\int_0^a \frac{dx}{x^2-4}=\frac{1}{4}, 0<a<2$

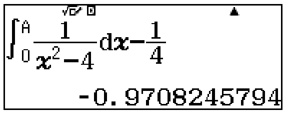
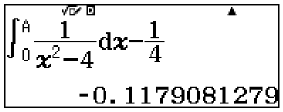
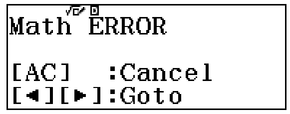
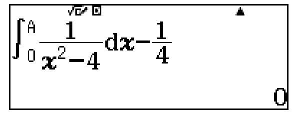
A. $a=\frac{3+2e}{2+e}$ B. $a=\frac{3-2e}{2+e}$

C. $a=\frac{2+2e}{2-e}$ D. $a=\frac{2-2e}{1+e}$

Cũng tương tự Bài toán 1:

① Nhập biểu thức $\int_0^A \frac{dx}{X^2-4} - \frac{1}{4}$ vào máy.

② CALC tại các đáp án, kết quả bằng 0 được chọn:

Đáp án A:	Đáp án B:	Đáp án C:	Đáp án D:
Với $a = \frac{3+2e}{2+e}$ 	Với $a = \frac{3-2e}{2+e}$ 	Với $a = \frac{2+2e}{2-e}$ 	Với $a = \frac{2-2e}{1+e}$ 
Loại	Loại	Hàm không liên tục	Nhận

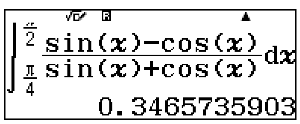
3. Kỹ thuật tính những bài toán phức tạp hơn.

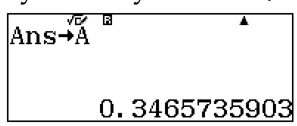
Bài toán 1: Kết quả tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$ được viết dưới dạng $\frac{\ln a}{b}$ $(a;b \in \mathbb{Q})$ thì $a+b$ là?

A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn trên máy tính CASIO fx-570VN PLUS

Tính kết quả tích phân trên và lưu vào ô nhớ A, lưu ý để máy ở chế độ Radian.

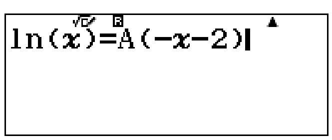


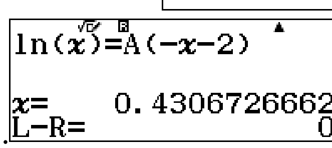


① Giả sử $a+b=-2$, nghĩa là thu được hệ phương trình: $\begin{cases} a+b=-2 \\ \frac{\ln a}{b} = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a-2 \\ \frac{\ln a}{-a-2} = A \end{cases}$

Giải phương trình $\frac{\ln a}{-a-2} = A \Leftrightarrow \ln a = A(-a-2)$ và giải tìm nghiệm a của phương trình này bằng phím SOLVE.

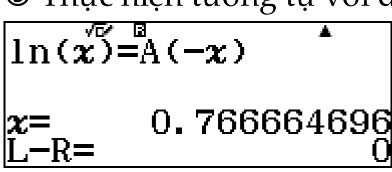
② Nhập vào máy tính:

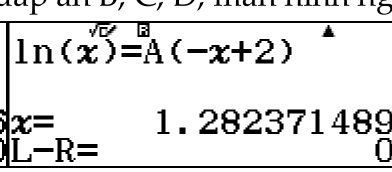


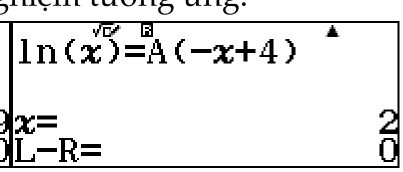
SHIFT SOLVE tại X=0 được 

.

③ Thực hiện tương tự với đáp án B, C, D, màn hình nghiệm tương ứng:







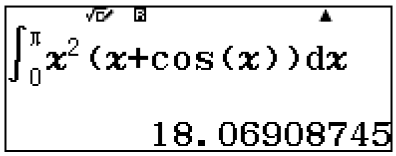
Vậy chọn đáp án D.

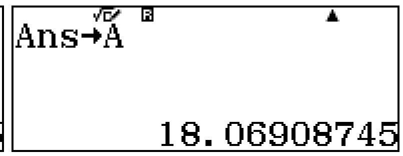
Bài toán 2: Kết quả tích phân $\int\limits_0^{\pi} x^2\left(x+\cos x\right)dx$ được viết dưới dạng $a\pi^4+b\pi \quad \left(a,b\in\mathbb{Q}\right)$ thì a^2+b^2 bằng bao nhiêu?

A. $\frac{65}{16}$. **B.** $\frac{65}{16}$. **C.** $\frac{35}{9}$. **D.** $\frac{9}{35}$.

Hướng dẫn trên máy tính CASIO fx-570VN PLUS

Tính kết quả tích phân trên và lưu vào ô nhớ A, lưu ý để máy ở chế độ Radian.



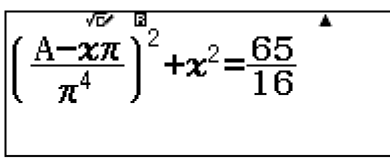


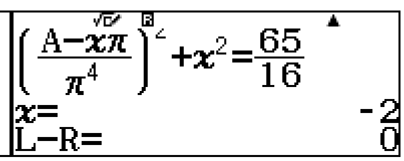
① Giải hệ phương trình:

$\begin{cases} a\pi^4+b\pi=A \\ a^2+b^2=B \end{cases}$ Trong đó B là giá trị có trong các đáp án.

② Với đáp án A ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a\pi^4+b\pi=A \\ a^2+b^2=\dfrac{65}{16} \end{cases}$

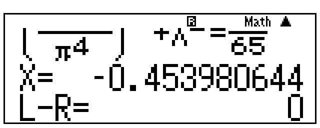
Thế $a=\dfrac{A-b\pi}{\pi^4}$ vào phương trình còn lại, ta được: $\left(\dfrac{A-b\pi}{\pi^4}\right)^2+b^2=\dfrac{65}{16}$ rồi SHIFT SOLVE tìm b, ta được:

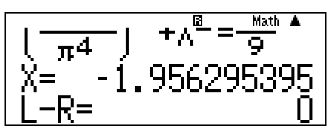


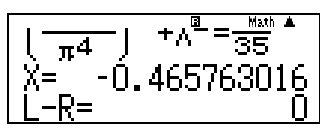


Vậy b tìm được một số hữu tỷ.

③ Với các đáp án còn lại không thu được một số hữu tỷ nên chọn đáp án A.





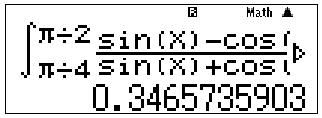


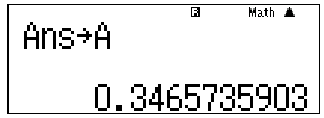
Bài toán 3: Kết quả tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ được viết dưới dạng $\left(a+b\right)\ln 5+c\ln 2 \;\left(a;b\in\mathbb{Q}\right)$ thì $a+b+c$ là?

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn trên máy tính CASIO fx-570VN PLUS

Tính kết quả tích phân trên và lưu vào ô nhớ A, lưu ý để máy ở chế độ Radian.



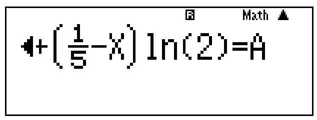


① Giải hệ phương trình:

$\begin{cases}(a+b)\ln 5 + c\ln 2 = A \\ a+b+c = B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a'\ln 5 + c\ln 2 = A \\ a'+c = B\end{cases}$ với $a' = a+b$ và B là giá trị ở các đáp án.

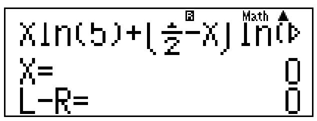
② Với đáp án A ta có hệ phương trình: $\begin{cases}a'\ln 5 + c\ln 2 = A \\ a'+c = \dfrac{1}{5}\end{cases}$

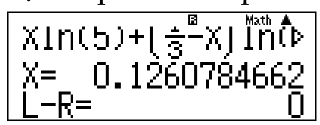
Thay $c = \frac{1}{5} - a'$ vào phương trình còn lại, ta được $a'\ln 5 + \left(\frac{1}{5} - a'\right)\ln 2 = A$ rồi SHIFT SOLVE thu được nghiệm:

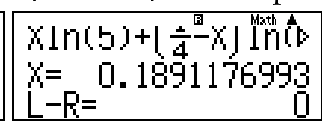


③ Với đáp án B (không nhập dấu "=" trong phương trình)

Lưu ý: Nếu nhập dấu "=" thì để nhận được đáp án B thì phải loại bỏ được các đáp án còn lại).





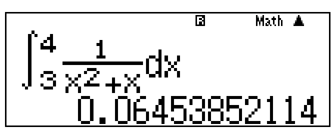


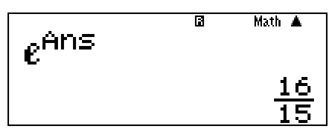
Bài toán 4 (Đề minh họa lần 2): Biết $\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$, với *a, b, c* là các số nguyên. Tính $S = a+b+c$

A. $S = 6$ **B.** $S = 2$ **C.** $S = -2$ **D.** $S = 0$

Nhận xét: $a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5 = \ln\left(2^a.3^b.5^c\right)$ nên các bước trên máy tính CASIO fx-570VN PLUS như sau:

① Tính tích phân rồi lấy lũy thừa cơ số e:





② Phân tích:

$\frac{16}{15} = 2^4.3^{-1}.5^{-1} \Rightarrow a = 4; b = -1; c = -1$. Vậy $S = a+b+c = 2$. Chọn đáp án B.

Bình luận: Trong hầu hết các bài toán trắc nghiệm ở các đề thi thử năm học 2016-2017, với những bài gắn a, b vào kết quả và yêu cầu tìm một hệ thức đúng giữa a, b. Các bạn học sinh yêu thích sự sử dụng máy tính để tìm kết quả chính xác, hạn chế tính nhẩm thường thực hiện được ở các bài toán mà hệ thức liên quan giữa a, b được cho chính xác. Ví dụ $a+b=5; a^3+b^3=9$. Trong trường hợp đề bài thay đổi, ví dụ $a+b \ge 5; a^3+b^3 \in (0;\ 9)$ thì tốt hơn hết nên thực hiện bằng việc tính tay đi tìm lời giải ngay từ ban đầu.

Với các hệ thức chứa $a,\ b,\ c$ mà hệ thức liên quan có chứa c hoặc tổng quát số biến lớn hơn số phương trình thì tùy thuộc vào từng bài toán mà có hướng giải khác nhau. Một số bạn sử dụng TABLE linh hoạt để tìm ra c, với cách làm này đòi hỏi sự phán đoán và biến đổi nhanh nhạy.
Một số bài toán tương tự (Trích dẫn trong đề thi thử của các cụm trong TP. Hồ Chí Minh):

Bài 1: Biết rằng $\int\limits_1^e x^2\ln x\mathrm{d}x=\frac{a}{b}e^3+\frac{c}{d}$, với $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ là hai phân số tối giản. Khi đó, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=-\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{1}{9}$.
C. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=-\frac{1}{3}$.

Bài 2: Cho $\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=a+b\ln\frac{1+e}{2}$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=2$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=1$.

Bài 3: Biết $I=\int\limits_0^2(3x-1)e^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=a+be$ với a,b là các số nguyên. Tính $S=a+b$.

A. $S=12$. **B.** $S=16$. **C.** $S=8$. **D.** $S=10$.

Bài 4: Biết $I=\int\limits_{\ln 3}^{\ln 6}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+2e^{-x}-3}=3\ln a-\ln b$ với $a,\ b$ là các số nguyên dương. Tính $P=ab$.

A. $P=10$. **B.** $P=-10$. **C.** $P=15$. **D.** $P=20$.

Bài 5: Giá trị của $I=\int\limits_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ được viết dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ ($a,\ b$ là các số nguyên dương). Khi đó giá trị của $a-7b$ bằng:

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -1.

4. Kỹ thuật nhân đa thức

Kỹ thuật khai triển đa thức trên máy tính cầm tay không còn xa lạ với các bạn học sinh. Bằng các phương pháp CALC 100, CALC 1000 với những đa thức thu được có dạng bậc hai đơn giản. Cho tới kỹ thuật dùng giới hạn khi $X\to 100; X\to 1000$ nhằm tìm ra các hệ số của đa thức trong khai triển. Với một bài toán nguyên hàm hoặc tích phân nhằm đánh giá kỹ thuật biến đổi và áp dụng công thức $\int x^\alpha\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1)$ như trong ví dụ dưới đây:

Bài toán 1: Tính nguyên hàm $\int(3x^2-6x+2)(x^3-3x^2+2x+4)\mathrm{d}x$.

Việc sử dụng Máy tính cầm tay cụ thể là CASIO fx-570VN PLUS sẽ hỗ trợ việc nhân đa thức, tối ưu thời gian làm bài.
Nhận xét: Kết quả nhân đa thức $(3x^2-6x+2)(x^3-3x^2+2x+4)$ có dạng đa thức bậc 5.

Bước 1: Nhập biểu thức cần khai triển lên màn hình:	◂+2)(x³−3x²+2x+4)
Bước 2: Chia biểu thức đã nhập cho X^5 rồi CALC tại $X=100$ thu được: Kết quả xấp xỉ 3. Nên hệ số đứng trước X^5 là 3.	(3x²−6x+2)(x³−3x²·▹ 2.852593801
Bước 3: Sửa lại biểu thức trên màn hình thành $\left[\left(3x^2-6x+2\right)\left(x^3-3x^2+2x+4\right)-3x^5\right]\div x^4$ rồi CALC tại $X=100$ thu được: Kết quả xấp xỉ -15. Nên hệ số đứng trước X^4 là -15.	((3x²−6x+2)(x³−3x▹ -14.74061992
Bước 4: Sửa lại biểu thức trên màn hình thành $\left[\left(3x^2-6x+2\right)\left(x^3-3x^2+2x+4\right)-3x^5+15x^4\right]\div x^3$ rồi CALC tại $X=100$ thu được: Kết quả xấp xỉ 26. Nên hệ số đứng trước X^3 là 26.	((3x²−6x+2)(x³−3x▹ 25.938008
Bước 5: Sửa lại biểu thức trên màn hình thành $\left[\left(3x^2-6x+2\right)\left(x^3-3x^2+2x+4\right)-3x^5+15x^4-26x^3\right]\div x^2$ rồi CALC tại $X=100$ thu được: Kết quả xấp xỉ -6. Nên hệ số đứng trước X^2 là -6.	((3x²−6x+2)(x³−3x▹ -6.1992
Bước 6: Tìm hệ số tự do: $\left[\left(3x^2-6x+2\right)\left(x^3-3x^2+2x+4\right)-3x^5+15x^4-26x^3+6x^2\right]$ rồi CALC tại $X=0$ thu được: Kết quả xấp xỉ 8. Nên hệ số tự do là 8.	((3x²−6x+2)(x³−3x▹ 8
Bước 7: Sửa biểu thức trên màn hình thành $\left[\left(3x^2-6x+2\right)\left(x^3-3x^2+2x+4\right)-3x^5+15x^4-26x^3+6x^2-8\right]$ rồi CALC tại $X=1$ thu được: Kết quả xấp xỉ -26. Nên hệ số tự do là -26.	((3x²−6x+2)(x³−3x▹ -20

Vậy $\left(3x^2-6x+2\right)\left(x^3-3x^2+2x+4\right)=3x^5-15x^4+26x^3-6x^2-20x+8$.

Áp dụng công thức tính nguyên hàm thu được:

$$\int\left(3x^5-15x^4+26x^3-6x^2-20x+8\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^6-3x^5+6x^4-2x^3-10x^2+8x+C$$

Ghi chú: Kỹ thuật khai triển đa thức cũng tương tự như Kỹ thuật chia đa thức (chia hết) khi kết quả thu được là những đa thức.

Làm sao để biết được chia hết? Xét đa thức chia có dạng bậc 2, bậc 3. Tìm nghiệm của những đa thức này bằng chức năng EQN và ghi nhớ kết quả nghiệm vào các ô nhớ. Sau đó CALC các ô nhớ này vào đa thức bị chia ban đầu, kết quả ra 0 thì chứng tỏ phép chia hết, ngược lại là phép chia có dư.

5. Kỹ thuật chuyển nguyên hàm thành tích phân

Áp dụng định nghĩa của tích phân:

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;\ b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;\ b]$.

Hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;\ b]$) của hàm số $f(x)$, ký hiệu và viết lại là:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

<u>Bài toán 1:</u> Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3)=\ln 2-1$

B. $F(3)=\ln 2+1$

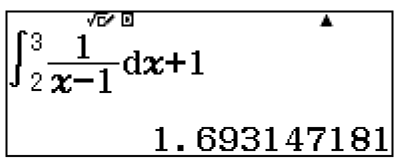
C. $F(3)=\dfrac{1}{2}$

D. $F(3)=\dfrac{7}{4}$

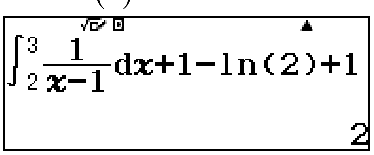
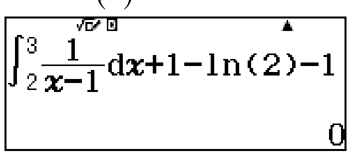
Phân tích: $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ liên tục trên $[2;\ 3]$ nên theo định nghĩa tích phân, ta có:

$$\int_2^3 \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x = F(3)-F(2) \Leftrightarrow F(3)=\int_2^3 \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x + F(2)$$

Nhập vào máy tính $\int_2^3 \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x+1$, thu được:



So sánh kết quả này với các đáp án A, B, C, D bằng cách lấy hiệu:

Đáp án A:	Đáp án B:	Đáp án C:	Đáp án D:
Với $F(3)=\ln 2-1$ 	Với $F(3)=\ln 2+1$ 	**Đã chọn B**	
Loại	**Nhận và không thử tiếp C, D**		

6. Kỹ thuật chuyển nguyên hàm thành đạo hàm

Xuất phát từ định nghĩa nguyên hàm.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K.

Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in K$.

Nên đạo hàm của hàm số $F(x)$ tại một điểm $x_0\in K$ bằng giá trị của $f(x_0)$.

Hay viết bằng cú pháp trên máy tính CASIO fx-570VN PLUS:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(x)\right)\Big|_{x=x_0} - f(x_0) = 0$$

Thay lần lượt 4 đáp án nguyên hàm vào đây

🕭 **Lưu ý 1:** Nên nhập x_0 không quá lớn, và không nên nhập các giá trị đặc biệt như $e,\ \pi,\ 1,\ 0,\ \ldots$

🕭 **Lưu ý 2**: Chuyển chế độ cho máy tính về Radian khi gặp các hàm số lượng giác.

🕭 **Lưu ý 3:** Kết quả chấp nhận được khi

Bài toán 1: Tìm nguyên hàm của hàm số sau: $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x}$.

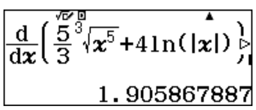
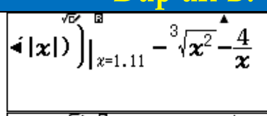
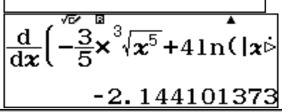
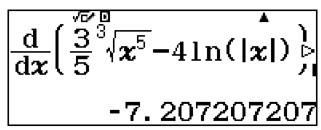
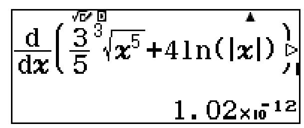
A. $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C$.

B. $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C$.

C. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-4\ln|x|+C$.

D. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C$.

Giải trên máy tính CASIO fx-570VN PLUS:

Đáp án A:	Đáp án B:	Đáp án C:	Đáp án D:
	 		
Loại	Loại	Loại	Nhận

PHỤ LỤC

☆ **Bảng nguyên hàm cơ bản:**

1	$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
2	$\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$	$\int u^{\alpha}du = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+C$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\|+C\ (x\neq 0)$	$\int \frac{du}{u} = \ln\|u\|+C\ (u\neq 0)$
4	$\int e^{x}dx = e^{x}+C$	$\int e^{u}du = e^{u}+C$
5	$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a}+C\ (0<a\neq 1)$	$\int a^{u}du = \frac{a^{u}}{\ln a}+C\ (0<a\neq 1)$

6	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
7	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
8	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C$
9	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C$

☆ **Các công thức nguyên hàm mở rộng:**

1. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$. Đặc biệt $\int \frac{dx}{x^2 - 1^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| \sqrt{x^2 + a^2} + x \right| + C$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| \sqrt{x^2 - a^2} + x \right| + C$

4. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$

5. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$

6. $\int \frac{xdx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + a^2 \right| + C$

7. $\int \frac{xdx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2} \ln \left| x^2 - a^2 \right| + C$

8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C$

9. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2} + C$

10. $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$

11. $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$