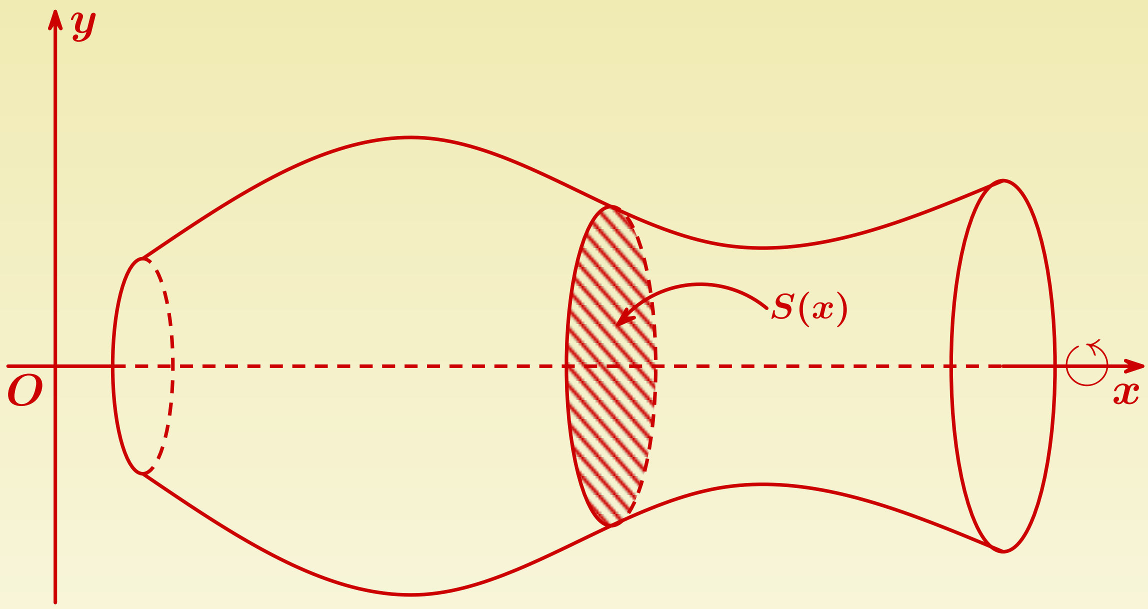
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

TRƯỜNG THCS-THPT HOA SEN

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

TRONG CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ



NĂM HỌC 2020-2021

MỤC LỤC

Ⓐ BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ VẬN TỐC QUÃNG ĐƯỜNG

Câu 1. Cho hai quả bóng A, B di chuyển ngược chiều nhau va chạm với nhau. Sau va chạm mỗi quả bóng nảy ngược lại một đoạn thì dừng hẳn. Biết sau khi va chạm, quả bóng A nảy ngược lại với vận tốc $v_A(t) = 8 - 2t\,(\mathrm{m/s})$ và quả bóng B nảy ngược lại với vận tốc $v_B(t) = 12 - 4t\,(\mathrm{m/s})$. Tính khoảng cách giữa hai quả bóng sau khi đã dừng hẳn (Giả sử hai quả bóng đều chuyển động thẳng).

(A) 36 mét. (B) 32 mét. (C) 34 mét. (D) 30 mét.

Lời giải.

Thời gian quả bóng A chuyển động từ lúc va chạm đến khi dừng hẳn $v_A(t) = 0 \Leftrightarrow 8 - 2t = 0 \Rightarrow t = 4s$.

Quãng đường quả bóng A di chuyển $S_A = \displaystyle\int_0^4 (8 - 2t)\,\mathrm{d}x = 16m$

Thời gian quả bóng B chuyển động từ lúc va chạm đến khi dừng hẳn $v_B(t) = 0 \Leftrightarrow 12 - 4t = 0 \Rightarrow t = 3s$.

Quãng đường quả bóng B duy chuyển $S_B = \displaystyle\int_0^3 (12 - 4t)\,\mathrm{d}x = 18m$

Vậy: Khoảng cách hai quả bóng sau khi dừng hẳn là $S = S_A + S_B = 34m$.

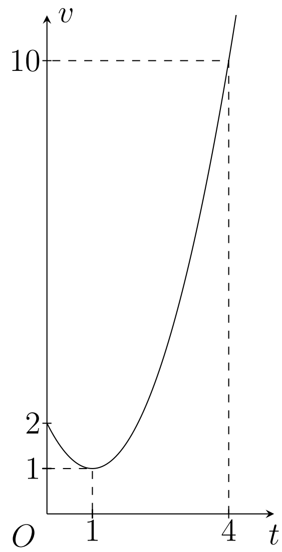
Chọn phương án (C)

Câu 2.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.

(A) $s = 6$ km. (B) $s = 8$ km.

(C) $s = \dfrac{46}{3}$ km. (D) $s = \dfrac{40}{3}$ km.



Lời giải.

Hàm số biểu diễn vận tốc của vật là $v(t) = t^2 - 2t + 2$. Do đó, hàm số biểu diễn quãng đường di chuyển được của vật là $s(t) = \displaystyle\int v(t)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t + C$. Do khi bắt đầu chuyển động thì quãng đường đi được bằng 0 nên $C = 0$. Vậy quãng đường vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát là $s(4) = \dfrac{40}{3}$ km.

Chọn phương án (D)

Câu 3. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t(\mathrm{m/s})$ với t là thời gian tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200(\mathrm{m/s})$ thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

(A) $\dfrac{2500}{3}$ (m). (B) 2000 (m). (C) 500 (m). (D) $\dfrac{4000}{3}$ (m).

Lời giải.

Xét $v(t)=200 \Leftrightarrow t^2+10t-200=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=10 \\ t=-20 \end{array}\right.$

Vậy thời gian máy bay đạt vận tộc 200 m/s là thời điểm $t=10$ s sau khi bắt đầu chuyển động.

Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

$$S=\int_0^{10} v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{10}(t^2+2t)\mathrm{d}t=\frac{2500}{3}.$$

Chọn phương án A

Câu 4. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều và sau đúng 4 giây thì ô tô bắt đầu dừng hẳn. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 20. B. 50. C. 40. D. 30.

Lời giải.

Từ khi người lái đạp phanh ô tô chuyển động chậm dần đều ta có $v=20+at$ với a là gia tốc của ô tô.

Sau 4 giây thì ô tô dừng hẳn nên $20+a\cdot 4=0 \Leftrightarrow a=-5$.

Quảng đường xe đi được là $S=\displaystyle\int_0^4 (20-5t)\,\mathrm{d}t=\left(20t-\frac{5}{2}t^2\right)\Big|_0^4=40$.

Chọn phương án C

Câu 5. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t)=7t(\mathrm{m/s})$. Đi được 5(s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-35(\mathrm{m/s^2})$. Tính quãng đường của ô tô đi được tính từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. 87.5 mét. B. 96.5 mét. C. 102.5 mét. D. 105 mét.

Lời giải.

Quãng đường ô tô đi được trong 5(s) đầu là

$$s_1=\int_0^5 v(t)\mathrm{d}t=\int_0^5 7t\mathrm{d}t=\frac{7}{2}t^2\Big|_0^5=\frac{175}{2}(\mathrm{m}).$$

Phương trình vận tốc khi ô tô phanh là $v(t)=35-35t$, do đó quãng đường ô tô đi được từ khi phanh đến khi dừng hẳn là

$$s_2=\int_0^1(35-35t)\mathrm{d}t=35\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{35}{2}(\mathrm{m}).$$

Vậy quãng đường cần tính là $s=s_1+s_2=105(\mathrm{m})$.

Chọn phương án D

Câu 6. Một ô-tô đang chạy thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô-tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-10t+20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô-tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 20 m. B. 25 m. C. 60 m. D. 15 m.

Lời giải.

Khi ô-tô dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy đoạn đường ô-tô di chuyển được là $S = \int\limits_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^2 (20 - 10t)\,\mathrm{d}t = (20t - 5t^2)\Big|_0^2 = 20$ m.

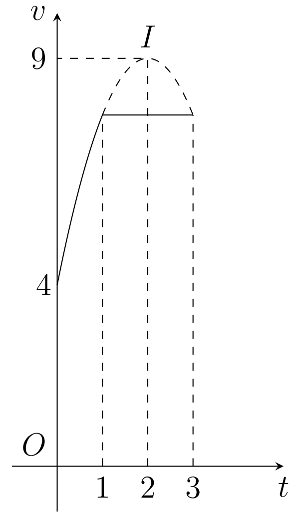
Chọn phương án (A)

Câu 7.

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song với trục hoành. Tính quãng đường S mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

(A) $S = 15{,}50$ (km). (B) $S = 21{,}58$ (km).

(C) $S = 23{,}25$ (km). (D) $S = 13{,}83$ (km).



Lời giải.

Gọi phương trình chuyển động của vật trong 1 giờ đầu là $v(t) = at^2 + bt + c$.

Từ đồ thị ta có $\begin{cases} v(0) = 4 \\ v(2) = 9 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 4a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -\dfrac{5}{4}t^2 + 5t + 4.$

Quãng đường đi được trong giờ đầu là $S_1 = \int\limits_0^1 \left(-\dfrac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right)\mathrm{d}t = \dfrac{73}{12}$ (km).

Tại thời điểm $t = 1$, vận tốc của vật là $v(1) = \dfrac{31}{4}$.

Quãng đường vật đi được trong 2 giờ tiếp theo là $S_2 = \dfrac{31}{4} \times 2 = \dfrac{31}{2}$ (km).

Vậy quãng đường vật di chuyển được trong 3 giờ là $S = S_1 + S_2 = \dfrac{259}{12} \approx 21{,}58$ (km).

Chọn phương án (B)

Câu 8. Một chuyến máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t$ m/s với t là thời gian được tính bằng giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc 200 m/s thì nó rời đường băng. Tính quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng.

(A) $\dfrac{2500}{3}$ m. (B) 2000 m. (C) 500 m. (D) $\dfrac{4000}{3}$ m.

Lời giải.

Khi $v = 200$, ta có

$$t^2 + 10t = 200 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 10 \\ t = -20 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Máy báy di chuyển trên đường băng từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm $t = 10$, do đó quãng đường đi được trên đường băng là

$$s = \int\limits_0^{10} \left(t^2 + 10t\right)\, \mathrm{d}t = \left(\frac{t^3}{3} + 5t^2\right)\Bigg|_0^{10} = \frac{2500}{3} \text{ m.}$$

Chọn phương án A

Câu 9. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s^2). Tính quãng đường $\mathcal{S}$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A $\mathcal{S} = 96{,}25$ (m). **B** $\mathcal{S} = 87{,}5$ (m). **C** $\mathcal{S} = 94$ (m). **D** $\mathcal{S} = 95{,}7$ (m).

Lời giải.

Ta có $v_1(t) = 7t \Rightarrow S_1(t) = \frac{7}{2}t^2$.

Quãng đường xe đi được sau 5s là $S_1 = \frac{7}{2} \times 5^2 = 87{,}5\,(\text{m})$.

Vận tốc của xe sau 5s là $v_0 = 35\,(\text{m/s})$.

Xe chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70\,(\text{m/s}^2)$ nên $v_2(t) = v_0 + at = 35 - 70t\,(\text{m/s})$.

Suy ra quãng đường xe chuyển động được tính theo công thức $S_2(t) = 35t - 35t^2\,(\text{m})$.

Xe dừng hẳn thì $v_2 = 0 \Leftrightarrow 35 - 70t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}\,(\text{s})$.

Quãng đường xe đi thêm cho tới khi dừng hẳn là $S_2 = 35 \times \frac{1}{2} - 35 \times \frac{1}{4} = 8{,}75\,(\text{m})$.

Vậy tổng quãng đường xe đi là $S_1 + S_2 = 96{,}25\,(\text{m})$.

Chọn phương án A

Câu 10. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12$ (m/s^2). Tính quãng đường s (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A $s = 168$ m. **B** $s = 166$ m. **C** $s = 144$ m. **D** $s = 152$ m.

Lời giải.

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe lăn bánh đến khi được phanh

$$s_1 = \int\limits_0^{12} v_1(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{12} 2t\,\mathrm{d}t = 144 \text{ (m).}$$

Vận tốc $v_2(t)$ (m/s) của ô tô từ lúc được phanh đến khi dừng hẳn thỏa mãn

$$v_2(t) \int (-12)\,\mathrm{d}t = -12t + C,\ v_2(12) = v_1(12) = 24 \Rightarrow C = 168 \Rightarrow v_2(t) = -12t + 168 \text{ (m/s).}$$

Thời điểm xe dừng hẳn tương ứng với t thỏa mãn $v_2(t) = 0 \Leftrightarrow t = 14$ (s).

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe được phanh đến khi dừng hẳn

$$s_2 = \int\limits_{12}^{14} v_2(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{12}^{14} (-12t + 168)\,\mathrm{d}t = 24 \text{ (m).}$$

Quãng đường cần tính $s = s_1 + s_2 = 144 + 24 = 168$ (m).

Chọn phương án A

Câu 11. Một ô-tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 (s), người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô-tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s^2). Tính quãng đường S (m) đi được của ô-tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

Ⓐ $S = 87{,}50$ (m). Ⓑ $S = 94{,}00$ (m). Ⓒ $S = 95{,}70$ (m). Ⓓ $S = 96{,}25$ (m).

Lời giải.

Trong 5 giây đầu tiên xe đi được quãng đường $S_2 = \int\limits_0^5 7t\,\mathrm{d}t = \frac{7}{2}t^2\Big|_0^5 = 87{,}5$ m.

Kể từ khi phanh $v_2 = \int(-70)\,\mathrm{d}t = -70t + C$.

Lúc xe bắt đầu phanh $t = 0$ thì $v_2 = 35$ (m/s) suy ra $35 = -70 \cdot 0 + C \Rightarrow C = 35$.

Khi xe dừng hẳn $v_2 = 0 \Rightarrow -70t + 35 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

Quãng đường xe đi được kể từ lúc đạp phanh $S_2 = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (35 - 70t)\,\mathrm{d}t = \frac{35}{4}$ m.

Quãng đường đi được của ô-tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là $S = S_1 + S_2 = 96{,}25$ (m).

Chọn phương án Ⓓ

Câu 12. Một học sinh đang điều khiển xe đạp điện chuyển động thẳng đều với vận tốc a m/s. Khi phát hiện có chướng ngại vật phía trước học sinh đó thực hiện phanh xe. Sau khi phanh, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = a - 2t$ m/s. Tìm giá trị lớn nhất của a để quãng đường xe đạp điện đi được sau khi phanh không vượt quá 9 m.

Ⓐ $a = 7$. Ⓑ $a = 4$. Ⓒ $a = 5$. Ⓓ $a = 6$.

Lời giải.

Khi $v = 0 \Rightarrow t = \frac{a}{2}$. Quãng đường xe đi được kể từ lúc phanh cho đến khi dừng lại là $S = \int\limits_0^{\frac{a}{2}} (a - 2t)\,\mathrm{d}t = \left(at - t^2\right)\Big|_0^{\frac{a}{2}} = \frac{a^2}{4}$. Để quãng đường đi được sau khi phanh không vượt quá 9 m thì $\frac{a^2}{4} \le 9 \Rightarrow a \le 6$.

Chọn phương án Ⓓ

Câu 13. Một ô tô đang đi với vận tốc lớn hơn 72 km/h, phía trước là đoạn đường chỉ cho phép chạy với tốc độ tối đa là 72 km/h, vì thế người lái xe đạp phanh để ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 30 - 2t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc bắt đầu đạp phanh đến lúc đạt tốc độ 72 km/h, ô tô đã di chuyển quãng đường là bao nhiêu mét?

Ⓐ 100 m. Ⓑ 150 m. Ⓒ 175 m. Ⓓ 125 m.

Lời giải.

Thời điểm t ô tô đạt tốc độ 72 km/h (tức 20 m/s) là nghiệm của $30 - 2t = 20 \Leftrightarrow t = 5$ (s).

Quãng đường đi được trong khoảng thời gian 5 s là

$$S = \int\limits_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^5 (30 - 2t)\,\mathrm{d}t = \left(30t - t^2\right)\Big|_0^5 = 30 \cdot 5 - 5^2 = 125 \text{ m}.$$

Chọn phương án Ⓓ

Câu 14. Một ô tô đang chạy với vận tốc 54 km/h thì tăng tốc chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a(t) = 3t - 8$ (m/s^2) trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây. Quãng đường mà ô tô đi được sau 10s kể từ lúc tăng tốc là

(A) 150 m. (B) 250 m. (C) 246 m. (D) 540 m.

Lời giải.

Ta có 54 km/h = 15 m/s.

Vận tốc của ô tô có phương trình $v(t) = \int (3t - 8)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}t^2 - 8t + C$.

Vì $v(0) = 15$ nên $v(t) = \frac{3}{2}t^2 - 8t + 15$.

Quãng đường đi được của ô tô có phương trình

$s(t) = \int \left(\frac{3}{2}t^2 - 8t + 15\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^3 - 4t^2 + 15t + C$.

Vì $s(0) = 0$ nên $C = 0$.

Vậy quãng đường đi được của ô tô sau 10 s là 250 m.

Chọn phương án (B)

Câu 15. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái xe đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/ s) trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

(A) 0.2 m. (B) 2 m. (C) 10 m. (D) 20 m.

Lời giải.

Khi dừng hẳn thì vận tốc lúc đó bằng không nên thời gian ô tô chạy được từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn là

$$0 = -5t + 10 \text{ hay } t = 2.$$

Quảng đường ô tô đi được từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là

$$S = \int_0^2 (-5t + 10)\,\mathrm{d}t = \left(-\frac{5t^2}{2} + 10t\right)\Big|_0^2 = 10\,\mathrm{m}.$$

Chọn phương án (C)

Câu 16. Một xe chuyển động với vận tốc thay đổi là $v(t) = 3at^2 + bt$. Gọi $S(t)$ là quãng đường đi được sau t giây. Biết rằng sau 5 giây thì quãng đường đi được là 150 m, sau 10 giây thì quãng đường đi được là 1100 m. Tính quãng đường xe đi được sau 20 giây.

(A) 8400 m. (B) 600 m. (C) 4200 m. (D) 2200 m.

Lời giải.

Quãng đường đi được sau 5 giây là

$$S_1 = \int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^5 (3at^2 + bt)\,\mathrm{d}t = \left(at^3 + \frac{bt^2}{2}\right)\Big|_0^5 = 125a + \frac{25}{2}b.$$

Quãng đường đi được sau 10 giây là

$$S_2 = \int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{10} (3at^2 + bt)\,\mathrm{d}t = \left(at^3 + \frac{bt^2}{2}\right)\Big|_0^{10} = 1000a + 50b.$$

Theo đề bài, ta có

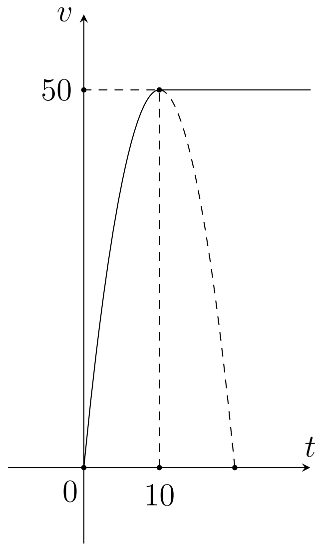
$$\begin{cases} 125a + \frac{25}{2}b = 150 \\ 1000a + 50b = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a + b = 12 \\ 100a + 5b = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}$$

Suy ra $v(t) = 3t^2 + 2t$, nên quãng đường xe đi được sau 20 giây là

$$S = \int_0^{20} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{20} (3t^2 + 2t)\,\mathrm{d}t = (t^3 + t^2)\Big|_0^{20} = 8000 + 400 = 8400 \text{ (m)}.$$

Chọn phương án A

Câu 17.
Một ô tô bắt đầu chuyển động với vận tốc $v(t) = at^2 + bt$ với t tính bằng giây và v tính bằng mét/giây (m/s). Sau 10 giây thì ô tô đạt vận tốc cao nhất $v = 50\ m/s$ và giữ nguyên vận tốc đó, có đồ thị vận tốc như hình bên. Tính quãng đường s ô tô đi được trong 20 giây đầu.



(A) $s = \dfrac{2500}{3}$ m. (B) $s = \dfrac{2600}{3}$ m.
(C) $s = 800$ m. (D) $s = \dfrac{2000}{3}$ m.

Lời giải.
Hàm số $v(t) = at^2 + bt$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 khi $t = 10$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 10 \\ 100a + 10b = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20a + b = 0 \\ 100a + 10b = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = 10. \end{cases}$$

Do đó $v(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + 10t$.
Quãng đường s ô tô đi được trong 20 giây đầu được tính bằng công thức

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{10} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 10t\right) \mathrm{d}t + \int_{10}^{20} 50\,\mathrm{d}t \\ &= \left(-\frac{t^3}{6} + 5t^2\right)\Big|_0^{10} + 50t\Big|_{10}^{20} \\ &= \frac{2500}{3}. \end{aligned}$$

Vậy quãng đường ô tô đi được trong 20 giây đầu là $s = \dfrac{2500}{3}$ m.
Chọn phương án A

Câu 18. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t$ (m/s) với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc 200 (m/s) thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

(A) 500 (m). (B) 2000 (m). (C) $\dfrac{4000}{3}$ (m). (D) $\dfrac{2500}{3}$ (m).

Lời giải.

Ta có $v(t)=200 \Leftrightarrow t^2+10t=200 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=10 \text{ (thoả mãn)} \\ t=-10 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Như vậy khi máy bay chuyển động được 10 giây thì cất cánh.

Quãng đường máy bay di chuyển được tính theo công thức $S(t)=\displaystyle\int (t^2+10t)\,\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}+5t^2$.

Quãng đường máy bay di chuyển trên đường băng là $S=\dfrac{10^3}{3}+5\times 10^2=\dfrac{2500}{3}$ (m).

Chọn phương án D

Câu 19. Một người lái xe ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào ngăn đường ở phía trước cách 45 m (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào) vì vậy, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe ô tô còn cách hàng rào ngăn cách bao nhiêu mét (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào)?

A 5 m. B 6 m. C 4 m. D 3 m.

Lời giải.

Khi xe dừng hẳn thì

$$v(t)=0 \Leftrightarrow -5t+20=0 \Leftrightarrow t=4.$$

Quãng đường xe đi được kể từ khi đạp phanh đến lúc dùng lại là

$$S=\int_0^4 (-5t+20)\,\mathrm{d}t=\left(-\frac{5}{2}t^2+20t\right)\Big|_0^4=40.$$

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe ô tô còn cách hàng rào ngăn $45-40=5$ m.

Chọn phương án A

Câu 20. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A 25 m. B $\dfrac{44}{5}$ m. C $\dfrac{25}{2}$ m. D $\dfrac{45}{4}$ m.

Lời giải.

Khi $v=0$ thì $t=5$, khi đó quãng đường ô tô đi được đến khi dừng hẳn là

$$S=\int_0^5 (10-2t)\,\mathrm{d}t=25 \quad \text{(m)}.$$

Chọn phương án A

Câu 21. Một xe buýt bắt đầu đi từ một nhà chờ xe buýt A với vận tốc $v(t)=10+3t^2$ (m/s) (khi bắt đầu chuyển động từ A thì $t=0$) đến nhà chờ xe buýt B cách đó 175 m. Hỏi thời gian xe đi từ A đến B là bao nhiêu giây?

A 7 . B 8 . C 9 . D 5 .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^b v(t)\,\mathrm{d}t = 175\\
\Leftrightarrow\ &\int\limits_0^b (10+3t^2)\,\mathrm{d}t = 175\\
\Leftrightarrow\ &(10t+t^3)\Big|_0^b = 175\\
\Leftrightarrow\ &10b+b^3 = 175\\
\Leftrightarrow\ &b = 5.
\end{aligned}$$

Vậy xe đi từ A đến B mất 5 giây.

Chọn phương án D

Câu 22. Tại một thời điểm t trước lúc đỗ xe ở điểm dừng xe, một chiếc xe đang chuyển động đều với vận tốc là 60 km/h. Chiếc xe di chuyển trong trạng thái đó 5 phút rồi bắt đầu đạp phanh và chuyển động chậm dần đều thêm 8 phút nữa rồi mới dừng hẳn ở điểm đỗ xe. Tính quãng đường mà xe đi được từ thời điểm t nói trên đến khi dừng hẳn.

(A) 4 km. (B) 5 km. (C) 9 km. (D) 6 km.

Lời giải.

Vận tốc xe khi bắt đầu phanh là $v = 60 + at$ (km/h), mà xe dừng khi chạy được 8 phút $= \dfrac{2}{15}$ giờ thì dừng hẳn nên $0 = 60 + \dfrac{2a}{15} \Leftrightarrow a = -450$ (m/h^2). Khi đó quãng đường xe đi được kể từ lúc đạp phanh là

$$\int\limits_0^{\frac{2}{15}} (60-450t)\,\mathrm{d}t = 4.$$

Vậy tổng quãng đường cần tính là $60\cdot\dfrac{5}{60} + 4 = 9$ km.

Chọn phương án C

Câu 23. Một vật chuyển động thẳng có vận tốc và gia tốc tại thời điểm t lần lượt là $v(t)$ m/s và $a(t)$ m/s^2. Biết rằng 1 giây sau khi chuyển động, vận tốc của vật là 1 m/s đồng thời $a(t) + v^2(t)\cdot(2t-1) = 0$. Tính vận tốc của vật sau 3 giây.

(A) $v(3) = \dfrac{1}{13}$ m/s. (B) $v(3) = \dfrac{1}{7}$ m/s. (C) $v(3) = \dfrac{1}{12}$ m/s. (D) $v(3) = \dfrac{1}{6}$ m/s.

Lời giải.

Ta có $a(t) + v^2(t)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a(t)}{v^2(t)} = 1 - 2t \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{v(t)}\right)' = 2t - 1.$

$\Rightarrow \dfrac{1}{v(t)} = t^2 - t + C.$

Mà $v(1) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow v(t) = \dfrac{1}{t^2-t+1} \Rightarrow v(3) = \dfrac{1}{7}$ (m/s).

Chọn phương án B

Câu 24. Một ô tô đang chạy với vận tốc v_0 m/s thì gặp chướng ngại vật nên người lái xe đã đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a(t) = -8t$ m/s^2 trong đó t là thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được 12 m. Tính v_0.

(A) $\sqrt[3]{1269}$ m/s. (B) $\sqrt[3]{36}$ m/s. (C) 12 m/s. (D) 16 m/s.

Lời giải.

Ta có $v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = -4t^2 + C$.

- Tại thời điểm $t = 0$, ta có $v_0 = C$.
- Tại thời điểm ô tô dừng hẳn $t = t_1$ ta có $v(t_1) = 0 \Leftrightarrow -4t_1^2 + C = 0 \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{\sqrt{C}}{2}$.

Kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được 12 m, do đó

$$\int_0^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t = 12 \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{3}t^3 + Ct\right)\bigg|_0^{t_1} = 12$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{4}{3}t_1^3 + Ct_1 = 12 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}\cdot\frac{C\sqrt{C}}{8} + \frac{C\sqrt{C}}{2} = 12$$

$$\Leftrightarrow \quad C\sqrt{C} = 36 \Leftrightarrow C = \sqrt[3]{1296}.$$

Vậy $v_0 = \sqrt[3]{1296}$.

Chọn phương án A

Câu 25. Một ô tô chuyển động thẳng với vận tốc ban đầu bằng 10 m/s và gia tốc $a(t) = -2t + 8$ m/s^2, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây. Hỏi từ lúc chuyển động đến lúc có vận tốc lớn nhất thì xe đi được quãng đường bao nhiêu?

A. $\dfrac{128}{3}$ m. B. $\dfrac{248}{3}$ m. C. 70 m. D. 80 m.

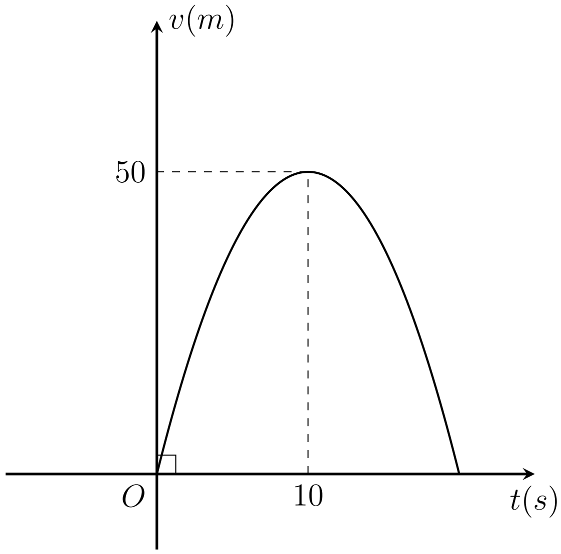
Lời giải.

Ta có vận tốc ô tô là $v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t = \int(-2t+8)\mathrm{d}t = -t^2 + 8t + C$. Vì vận tốc ban đầu là 10 m/s nên ta có $v(t) = -t^2 + 8t + 10 = -(t-4)^2 + 26 \geq 26$. Vậy vận tốc lớn nhất của ô tô bằng 26 m/s, đạt được khi $t = 4$. Do đó quãng đường xe đi được kể từ lúc chuyển động đến lúc có vận tốc lớn nhất là:

$$S = \int_0^4 v(t)\mathrm{d}t = \int_0^4 (-t^2 + 8t + 10)\mathrm{d}t = \frac{248}{3}.$$

Chọn phương án B

Câu 26. Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol có hình bên dưới.



Biết rằng sau 10 s thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 50 m/s và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?

Ⓐ $\dfrac{1000}{3}$ m. Ⓑ $\dfrac{1100}{3}$ m. Ⓒ $\dfrac{1400}{3}$ m. Ⓓ 300 m.

Lời giải.

Quãng đường xe đi được chính bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và trục Ox.
Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do (P) qua gốc tọa độ nên $c = 0$.

Đỉnh (P) là $I(10;50)$ nên $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 10 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -20a \\ b^2 = -200a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^{10} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 10x\right) \mathrm{d}x = \frac{1000}{3}$.

Vậy quãng đường xe đi được bằng $\dfrac{1000}{3}$ m.

Chọn phương án Ⓐ

Câu 27. Một ô tô đang chạy với vận tốc 200 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 200 + at$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh và $a\left(\mathrm{m/s^2}\right)$ là gia tốc. Biết rằng khi đi được 1500 m thì xe dừng hẳn, hỏi gia tốc của xe bằng bao nhiêu?

Ⓐ $a = -\dfrac{200}{13}$ m/s^2. Ⓑ $a = -\dfrac{100}{13}$ m/s^2. Ⓒ $a = \dfrac{40}{3}$ m/s^2. Ⓓ $a = -\dfrac{40}{3}$ m/s^2.

Lời giải.

Thời điểm xe dừng hẳn là $200 + at = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{200}{a}$.
Khi đó ta có

$$\int\limits_0^{-\frac{200}{a}} (200 + at)\,\mathrm{d}t = 1500 \Leftrightarrow -\frac{200^2}{2a} = 1500 \Leftrightarrow a = -\frac{40}{3}.$$

Chọn phương án Ⓓ

Câu 28. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s) có gia tốc là $v'(t) = \dfrac{3}{t+1}$ (m/s^2). Vận tốc ban đầu của vật là 6 m/s. Tính vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Ⓐ 11 m/s. Ⓑ 12 m/s. Ⓒ 13 m/s. Ⓓ 14 m/s.

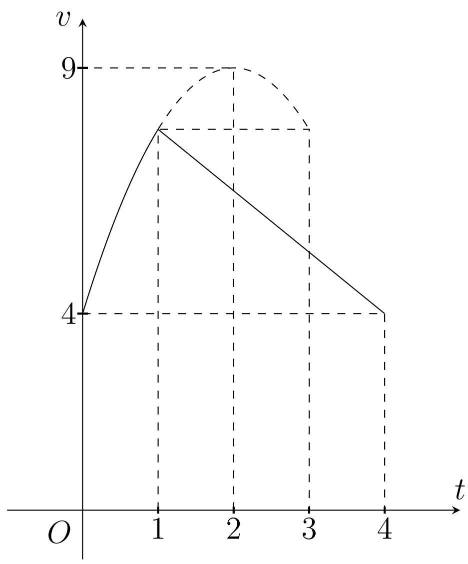
Lời giải.

Vận tốc $v = \displaystyle\int v'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{3}{t+1}\,\mathrm{d}t = 3\ln|t+1| + C$.
Vì $v(0) = 6 \Rightarrow C = 6 \Rightarrow v(t) = 3\ln|t+1| + 6 \Rightarrow v(10) = 3\ln 11 + 6 = 13$ m/s.

Chọn phương án Ⓒ

Câu 29.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình vẽ bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại vật chuyển động chậm dần đều. Tính quãng đường S mà vật đi được trong 4 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



(A) $S = 23,71$ km. (B) $S = 23,58$ km.
(C) $S = 23,56$ km. (D) $S = 23,72$ km.

Lời giải.

Trong 1 giờ đầu, ta gọi phương trình vận tốc của vật là $v = at^2 + bt + c$, suy ra $v' = 2at + b$.
Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v(2) = 9 \\ v'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + 4 = 9 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases}.$$

Suy ra $v(t) = -\dfrac{5}{4}t^2 + 5t + 4$, từ đó ta có $v(1) = \dfrac{31}{4}$.
Trong 3 giờ sau, gọi phương trình vận tốc $v(t) = at + b$.
Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} v(1) = a + b = \dfrac{31}{4} \\ v(4) = 4a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = 9 \end{cases}.$$

Suy ra $v(t) = -\dfrac{5}{4}t + 9$.
Quãng đường vật đi trong 4 giờ là

$$S = \int\limits_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right)\,\mathrm{d}t + \int\limits_1^4 \left(-\frac{5}{4}t + 9\right)\,\mathrm{d}t = 23,7083.$$

Chọn phương án (A)

Câu 30. Gọi $F(t)$ là số lượng vi khuẩn phát triển sau t giờ. Biết $F(t)$ thỏa mãn $F'(t) = \dfrac{10000}{1+2t}$ với $t \geq 0$ và ban đầu có 1000 con vi khuẩn. Hỏi sau 2 giờ số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

(A) 17094. (B) 9047. (C) 32118. (D) 8047.

Lời giải.

$F(t) = \displaystyle\int \frac{10000}{1+2t}\,\mathrm{d}t = 5000\ln|1+2t| + C$.
$F(0) = 1000 \Leftrightarrow 5000\ln|1+2\cdot 0| + C = 1000 \Leftrightarrow C = 1000$.
Số lượng vi khuẩn sau 2 giờ:
$F(2) = 5000\ln|1+2\cdot 2| + 1000 = 5000\ln(5) + 1000 \approx 9047$.
Chọn phương án (B)

Câu 31. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ (m/s²). Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{2200}{3}$ m. Ⓑ $\dfrac{4000}{4}$ m. Ⓒ $\dfrac{1900}{3}$ m. Ⓓ $\dfrac{4300}{3}$ m.

Lời giải.

Ta có $a(t) = v'(t) \Rightarrow v(t) = \int \left(3t + t^2\right) \mathrm{d}x = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{3t^2}{2} + c$, khi $t = 0$ thì $v = 10 \Rightarrow c = 10$.

Mặt khác $v(t) = s'(t) \Rightarrow s = \displaystyle\int_0^{10} \left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 10\right) \mathrm{d}x = \frac{4300}{3}$.

Chọn phương án Ⓓ

Câu 32. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lại đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

Ⓐ 10 m. Ⓑ 5 m. Ⓒ 20 m. Ⓓ 8 m.

Lời giải.

Thời điểm ô tô dừng hẳn $v(t) = -5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (s).

Quãng đường từ lúc đạp phanh tới khi ô tô dừng hẳn $s = \displaystyle\int_0^2 (-5t + 10)\,\mathrm{d}t = 10$ (m).

Chọn phương án Ⓐ

Câu 33. Một vật chuyển động với vận tốc $v = 20$ m/s thì thay đổi vận tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t) = -4 + 2t$ m/s². Tính quãng đường vật đi được để từ thời điểm thay đổi gia tốc đến lúc vật đạt vận tốc bé nhất.

Ⓐ $\dfrac{104}{3}$ m. Ⓑ 104 m. Ⓒ 208 m. Ⓓ $\dfrac{104}{6}$ m.

Lời giải.

Ta có $v = \int (-4 + 2t)\,\mathrm{d}t = -4t + t^2 + C$. Tại thời điểm $t = 0$, $v = 20 \Rightarrow C = 20$.

Do đó $v = t^2 - 4t + 20 = (t-2)^2 + 16 \geq 16$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = 2$.

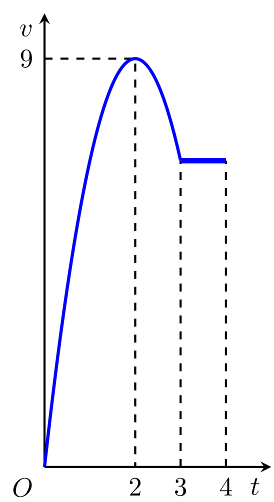
Vậy $s = \displaystyle\int_0^2 (t^2 - 4t + 20)\,\mathrm{d}t = \frac{104}{3}$ m.

Chọn phương án Ⓐ

Câu 34.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.

Ⓐ 28,5 (km). Ⓑ 27 (km). Ⓒ 26,5 (km). Ⓓ 24 (km).



Lời giải.

Gọi parabol đồ thị vận tốc hình bên có dạng: $v = at^2 + bt + c$. Vì parabol đi qua gốc tọa độ nên $c = 0$. Từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{9}{4} \\ b = 9 \end{cases}$.

Vậy parabol cần tìm $v = -\dfrac{9}{4}t^2 + 9t$.

Quãng đường vật di chuyển trong 4 giờ được tính theo công thức:

$S = S_1 + S_2 = \displaystyle\int_0^3 \left(-\dfrac{9}{4}t^2 + 9t\right) \mathrm{d}t + v(3) \cdot 1 = \dfrac{81}{4} + \dfrac{27}{4} = 27$ (km).

Chọn phương án B

Câu 35. Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

A $\dfrac{45}{2}$ m. **B** $\dfrac{201}{4}$ m. **C** $\dfrac{81}{4}$ m. **D** $\dfrac{65}{2}$ m.

Lời giải.

Ta có $v(t) = \displaystyle\int a(t)\,\mathrm{d}t = \int (t^2 + 3t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{3}{2}t^2 + C$.

Coi $t = 0$ là thời điểm vật bắt đầu tăng tốc.

Theo giả thiết $v(0) = 10 \Leftrightarrow C = 10 \Rightarrow v(t) = \dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{3}{2}t^2 + 10$.

Quãng đường vật đi được trong khoảng 3 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc là

$S = \displaystyle\int_0^3 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^3 \left(\dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{3}{2}t^2 + 10\right) \mathrm{d}t = \dfrac{201}{4}$.

Chọn phương án B

Câu 36. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ m/s^2. Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu?

A $\dfrac{43}{3}$ m. **B** $\dfrac{430}{3}$ m. **C** $\dfrac{4300}{3}$ m. **D** $\dfrac{43000}{3}$ m.

Lời giải.

Vận tốc của vật sau khi tăng tốc có phương trình $v(t) = \displaystyle\int (3t + t^2)\,\mathrm{d}t = \dfrac{3t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + C$.

Vì $v(0) = 10$ nên $c = 10$. Suy ra $v(t) = \dfrac{3t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + 10$.

Do đó, trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc vật được quảng đường

$$s = \int_0^{10} \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{12} + 10t\right)\Bigg|_0^{10} = \frac{4300}{3} \text{ (m)}.$$

Chọn phương án C

Câu 37. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ m/s. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A 20 m. **B** 2 m. **C** 0,2 m. **D** 10 m.

Lời giải.

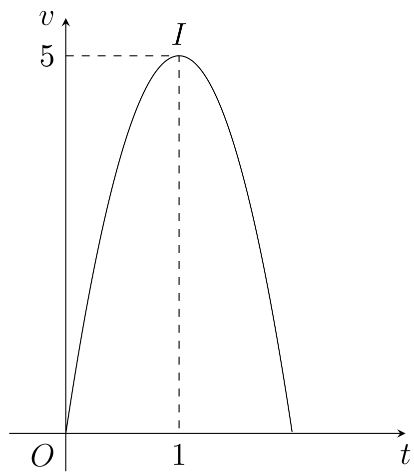
Chọn gốc thời gian lúc người lái đạp phanh. Thời điểm ô tô dừng hẳn là: $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ s. Vậy quãng đường di chuyển được là $s = \displaystyle\int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}2$ m.

Chọn phương án D

Câu 38.

Một người chạy bộ trong 2 giờ, với vận tốc $v = v(t)$ (t tính theo giờ, v tính theo km/h). Biết rằng đồ thị của $v = v(t)$ là một parabol có trục đối xứng song song với trục tung và có đỉnh là điểm $I(1;5)$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính quãng đường người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút đầu tiên kể từ lúc chạy (làm tròn đến hàng phần trăm).

A 2,11 km. **B** 6,67 km. **C** 5,63 km. **D** 3,33 km.



Lời giải.

Ta có $v(0) = 0$, cùng với giả thiết về đồ thị của $v(t)$, ta suy ra phương trình của $v(t)$ theo t là $v(t) = -5(t-1)^2 + 5$. Do đó, $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 2$. Quãng đường người đó chạy được là

$$s = \int_0^{1{,}5} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{1{,}5} \left(-5(t-1)^2 + 5\right)\,\mathrm{d}t = 5{,}625 \text{ km}.$$

Chọn phương án C

Câu 39. Một vật bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 (m/s), sau 6 giây chuyển động thì phát hiện có chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\dfrac{5}{2}t + a$ (m/s) cho đến lúc dừng hẳn. Tìm v_0, biết trong toàn bộ quá trình, vật di chuyển được 80 m.

A $v_0 = 10$ m/s. **B** $v_0 = 5$ m/s. **C** $v_0 = 12$ m/s. **D** $v_0 = 8$ m/s.

Lời giải.

Do $v(6) = v_0$ nên $a = v_0 + 15$. Suy ra $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2a}{5} = \dfrac{2v_0 + 30}{5}$. Quãng đường vật di chuyển được trong toàn bộ quá trình là

$$S = 6v_0 + \int_6^{\frac{2v_0+30}{5}} v(t)\,\mathrm{d}t = 6v_0 + \int_6^{\frac{2v_0+30}{5}} \left(-\frac{5}{2}t + v_0 + 15\right)\,\mathrm{d}t = 6v_0 + \frac{v_0^2}{5}.$$

Giải phương trình $6v_0 + \dfrac{v_0^2}{5} = 80$, ta suy ra $v_0 = 10$ m/s $(v_0 > 0)$.

Chọn phương án A

Câu 40. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bằng công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn thì khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A 33 m. **B** 12 m. **C** 31 m. **D** 32 m.

Lời giải.

Dễ thấy ô tô A dừng lại sau 4 giây. Quãng đường mà ô tô A di chuyển từ lúc bắt đầu hãm phanh đến lúc dừng lại là

$$\int_0^4 (16-4t)\,\mathrm{d}t = \left(16t - 2t^2\right)\Big|_0^4 = 32 \text{ (m)}.$$

Vậy ô tô A phải bắt đầu hãm phanh cách ô tô B một khoảng ít nhất $32 + 1 = 33$ m.

Chọn phương án A

Câu 41. Một chiếc ô tô đang chuyển động với vận tốc $v(t) = 2 + \dfrac{t^2-4}{t+4}$ (m/s). Quãng đường ô tô đi được từ thời điểm $t = 5\,\text{s}$ đến thời điểm $t = 10\,\text{s}$ là

A. 12,23 m. B. 32,8 m. C. 45,03 m. D. 10,24 m.

Lời giải.

Quãng đường ô tô đi được là $s = \displaystyle\int_5^{10} \left(2 + \frac{t^2-4}{t+4}\right) \mathrm{d}t = 32{,}8\,\text{m}$.

Chọn phương án B

Câu 42. Một vật chuyển động có phương trình $v(t) = t^3 - 3t + 1$ m/s. Quãng đường vật đi được kể từ khi bắt đầu chuyển động đến khi gia tốc bằng 24 m/s^2 là

A. $\dfrac{15}{4}$ m. B. 20 m. C. 19 m. D. $\dfrac{39}{4}$ m.

Lời giải.

Gia tốc của chuyển động là $a(t) = v'(t) = 3t^2 - 3$.

Tại thời điểm vật có gia tốc 24 m/s^2 thì $24 = 3t^2 - 3 \Leftrightarrow t = 3$.

Quãng đường vật đi được kể từ khi bắt đầu chuyển động đến khi gia tốc bằng 24 m/s^2 là quãng đường vật đi từ vị trí $t = 0$ đến vị trí $t = 3$.

Vậy $S(3) = \displaystyle\int_0^3 (t^3 - 3t + 1)\,\mathrm{d}t = \frac{39}{4}$ m.

Chọn phương án D

Câu 43. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 6t + 12t^2$ (m/s^2). Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

A. $\dfrac{4300}{3}$ m. B. 4300 m. C. $\dfrac{98}{3}$ m. D. 11100 m .

Lời giải.

Ta có công thức chuyển động của vật theo thời gian kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}x = \int (6t + 12t^2)\,\mathrm{d}x = 4t^3 + 3t^2 + C.$$

Do $v(0) = 10$ nên ta có $C = 10$. Suy ra $v(t) = 4t^3 + 3t^2 + 10$. Từ đó ta có quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

$$s = \int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} (4t^3 + 3t^2 + 10)\,\mathrm{d}x = 11100.$$

Chọn phương án D

Câu 44. Một ô tô đang chuyển động đều với vận tốc $15\,\text{m/s}$ thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái xe đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-a\,(\text{m/s}^2)\,,(a>0)$. Biết ô tô chuyển động được 20m nữa thì dừng hẳn. Hỏi a thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $(3;4)$. (B) $(4;5)$. (C) $(5;6)$. (D) $(6;7)$.

Lời giải.

Chọn gốc thời gian $t=0$ tại lúc ôtô bắt đầu đạp phanh.

Vận tốc $v(t)-v(0)=\int\limits_0^t -a\,\mathrm{d}t \Rightarrow v(t)=-at+15$.

Quãng đường $s(t)=\int\limits_0^t(-at+15)\,\mathrm{d}t=\dfrac{-at^2}{2}+15t$.

Ta có $\begin{cases}v(t)=0\\ s(t)=20\end{cases}.\Rightarrow\begin{cases}-at+15=0\\ \dfrac{-at^2}{2}+15t=20\end{cases}\Rightarrow t=\dfrac{8}{3}\Rightarrow a=\dfrac{15.3}{8}=\dfrac{45}{8}\in(5;6)$.

Chọn phương án (C)

Câu 45. Một ô tô đang chuyển động đều với vận tốc 20 m/s rồi hãm phanh chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+20$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Tính quãng đường mà ô tô đi được trong 15 giây cuối cùng đến khi dừng hẳn.

(A) 100 m. (B) 75 m. (C) 200 m. (D) 125 m.

Lời giải.

Khi vật dừng lại thì $v=0\Rightarrow -2t+20=0\Leftrightarrow t=10$ s.

Quãng đường vật đi được trong 15 s cuối cùng đến khi dừng hẳn là

$$s=20\cdot 5+\int\limits_0^{10}v(t)\,\mathrm{d}t=20\cdot 5+\int\limits_0^{10}(-2t+20)\,\mathrm{d}t=100+\left(-t^2+20t\right)\Big|_0^{10}=200\text{ m}.$$

Chọn phương án (C)

Câu 46. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\dfrac{1}{100}t^2+\dfrac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

(A) 15 (m/s). (B) 9 (m/s). (C) 42 (m/s). (D) 25 (m/s).

Lời giải.

Ta có $v_B(t)=\int a\,\mathrm{d}t=at+C$. Do $v_B(0)=0$ nên $C=0\Rightarrow v_B(t)=at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A=\int\limits_0^{25}\left(\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{300}t^3+\frac{13}{60}t^2\right)\Bigg|_0^{25}=\frac{375}{2}.$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$$S_B=\int\limits_0^{15}at\,\mathrm{d}t=\frac{at^2}{2}\Bigg|_0^{15}=\frac{225a}{2}.$$

Ta có $\frac{375}{2}=\frac{225a}{2}\Leftrightarrow a=\frac{5}{3}$.

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15)=\frac{5}{3}\cdot 15=25$ (m/s).

Chọn phương án (D)

Câu 47. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có giá tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

(A) 25 (m/s). (B) 36 (m/s). (C) 30 (m/s). (D) 21 (m/s).

Lời giải.

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t)=\int a\,\mathrm{d}t=at+C$ mà $v_B(0)=0\Rightarrow v_B(t)=at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm bằng nhau do đó

$$\int\limits_0^{18}\left(\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{15}at\,\mathrm{d}t\Leftrightarrow 225=a\cdot\frac{225}{2}\Leftrightarrow a=2.$$

Vậy vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t)=2\cdot 15=30$ (m/s).

Chọn phương án (C)

Câu 48. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-12$ (m/s^2). Tính quãng đường S (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

(A) $S=168$ m. (B) $S=166$ m. (C) $S=144$ m. (D) $S=152$ m.

Lời giải.

Quãng đường xe đi được trong 12 giây đầu là $s_1=\int\limits_0^{12}2t\,\mathrm{d}t=144$ (m).

Sau khi đi được 12 giây thì đạt vận tốc $v=24$ (m/s).

Sau đó vận tốc của vật có phương trình $v_2(t)=24-12t$ (m/s).

Vật dừng hẳn sau 2 giây kể từ khi phanh.

Quãng đường xe đi được từ khi đạp phanh đến khi dừng hẳn là $s_2=\int\limits_0^{2}(24-12t)\,\mathrm{d}t=24$ (m).

Vậy $S=s_1+s_2=168$ (m).

Chọn phương án (A)

Câu 49. Một vật di chuyển với gia tốc $a(t)=-20(1+2t)^{-2}$ (m/s^2). Khi $t=0$ thì vận tốc của vật là 30 m/s. Tính quãng đường vật đó đi được sau 2 giây đầu tiên.

(A) 47 m. (B) 48 m. (C) 49 m. (D) 46 m.

Lời giải.

$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int \dfrac{-20}{(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{10}{1+2t} + C.$
Vì $v(0) = 30 \Rightarrow 10 + C = 30 \Leftrightarrow C = 20$. Suy ra quãng đường cần tính là

$$s = \int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \left(\frac{10}{1+2t} + 20\right)\,dt = (5\ln(1+2t) + 20t)\Big|_0^2 \approx 48.$$

Chọn phương án (B)

Câu 50. Một ô tô chạy với vận tốc 20 (m/s) thì người lái đạp phanh (còn nói là thắng). Sau khi đạp phanh, ô tô di chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

(A) 20 (m). (B) 15 (m). (C) 5 (m). (D) 10 (m).

Lời giải.

Ta có $v(t) = -40t + 20$.

Lúc ô tô dừng hẳn $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Quãng đường ô tô đi được từ lúc đạp phanh ($t = 0$) đến lúc ô tô dừng $\left(t = \dfrac{1}{2}\right)$ là

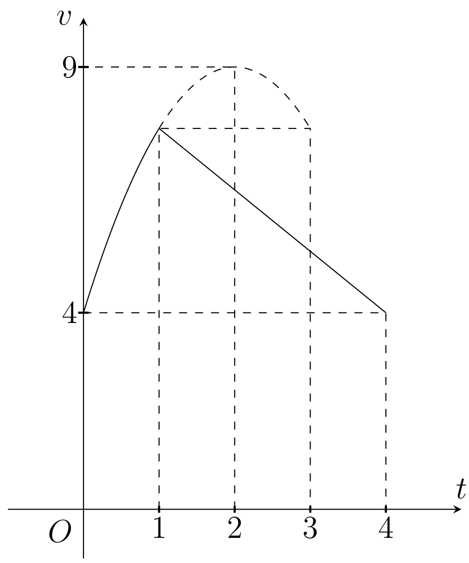
$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} (-40t + 20)\,\mathrm{d}t = 5 \text{ (m)}.$$

Chọn phương án (C)

Câu 51.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình vẽ bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại vật chuyển động chậm dần đều. Tính quãng đường S mà vật đi được trong 4 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

(A) $S = 23,71$ km. (B) $S = 23,58$ km.
(C) $S = 23,56$ km. (D) $S = 23,72$ km.



Lời giải.

Trong 1 giờ đầu, ta gọi phương trình vận tốc của vật là $v = at^2 + bt + c$, suy ra $v' = 2at + b$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v(2) = 9 \\ v'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + 4 = 9 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases}.$$

Suy ra $v(t) = -\dfrac{5}{4}t^2 + 5t + 4$, từ đó ta có $v(1) = \dfrac{31}{4}$.

Trong 3 giờ sau, gọi phương trình vận tốc $v(t) = at + b$.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} v(1) = a + b = \dfrac{31}{4} \\ v(4) = 4a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = 9 \end{cases}.$$

Suy ra $v(t) = -\dfrac{5}{4}t + 9$.

Quãng đường vật đi trong 4 giờ là

$$S = \int\limits_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right) \mathrm{d}t + \int\limits_1^4 \left(-\frac{5}{4}t + 9\right) \mathrm{d}t = 23,7083.$$

Chọn phương án A

Câu 52. Cho hai chất điểm A và B cùng bắt đầu chuyển động trên trục Ox từ thời điểm $t = 0$. Tại thời điểm t, vị trí của chất điểm A được cho bởi $x = f(t) = -6 + 2t - \frac{1}{2}t^2$ và vị trí của chất điểm B được cho bởi $x = g(t) = 4\sin t$. Gọi t_1 là thời điểm đầu tiên và t_2 là thời điểm thứ hai mà mà hai chất điểm có vận tốc bằng nhau. Tính theo t_1, t_2 độ dài quãng đường mà chất điểm A đã di chuyển từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2.

A. $4 - 2(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2)$.

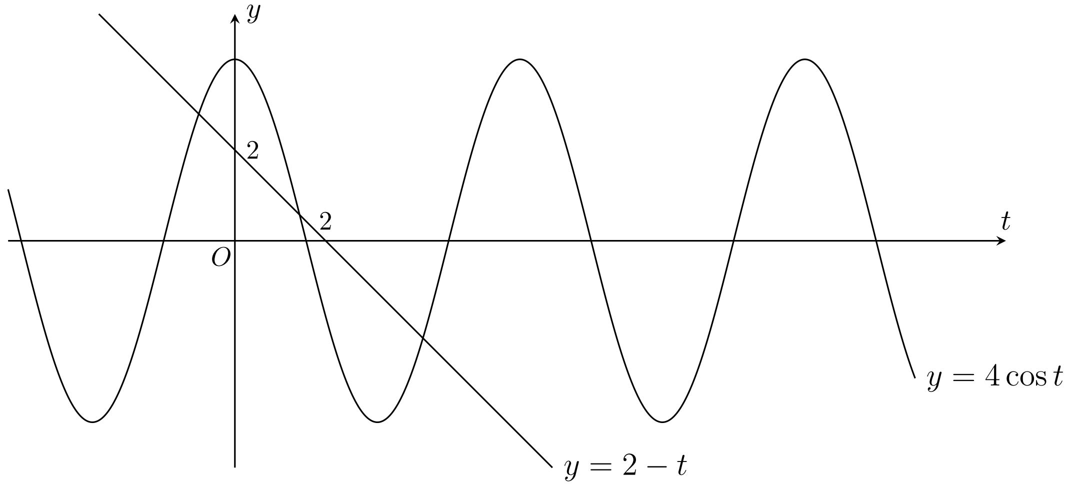
B. $4 + 2(t_1 + t_2) - \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2)$.

C. $2(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}(t_2^2 - t_1^2)$.

D. $2(t_1 - t_2) - \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2^2)$.

Lời giải.

Ta có $f'(t) = 2 - t, g'(t) = 4\cos t$. Theo giả thiết ta có t_1, t_2 là các nghiệm của phương trình $f'(t) = g'(t)$ với $0 < t_1 < t_2$. Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = f'(t)$ và $y = g'(t)$ trên cùng hệ trục ta thấy $t_1 < 2 < t_2$.



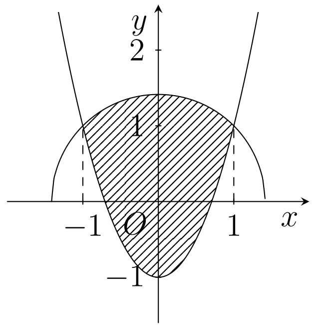
Quãng đường cần tính là

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} |2 - t|\mathrm{d}t = \int\limits_{t_1}^{2} |2 - t|\mathrm{d}t + \int\limits_{2}^{t_2} |2 - t|\mathrm{d}t = \int\limits_{t_1}^{2} (2 - t)\mathrm{d}t + \int\limits_{2}^{t_2} (t - 2)\mathrm{d}t$$
$$= \left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_{t_1}^{2} + \left(\frac{t^2}{2} - 2t\right)\Big|_{2}^{t_2}$$
$$= 4 - 2(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}\left(t_1^2 + t_2^2\right).$$

Chọn phương án A

Câu 1.

Người ta cần trồng một vườn hoa theo hình giới hạn bởi một đường Parabol và nửa đường tròn có bán kính $\sqrt{2}$ mét (phần tô trong hình vẽ). Biết rằng: để trồng mỗi m^2 hoa cần ít nhất là 250000 đồng, số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu gần bằng



(A) 893000 đồng. (B) 476000 đồng.

(C) 809000 đồng. (D) 559000 đồng.

Lời giải.

Nửa đường tròn (T) có phương trình $y=\sqrt{2-x^2}$.
Xét parabol (P) có trục đối xứng Oy nên có phương trình dạng: $y=ax^2+c$.
(P) cắt Oy tại điểm $(0;-1)$ nên ta có: $c=-1$.
(P) cắt (T) tại điểm $(1;1)$ thuộc (T) nên ta được: $a+c=1\Rightarrow a=2$.
Phương trình của (P) là: $y=2x^2-1$.
Diện tích miền phẳng D (tô màu trong hình) là:

$$S=\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-2x^2+1\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}\left(-2x^2+1\right)\,\mathrm{d}x.$$

$I_1=\int\limits_{-1}^{1}\left(-2x^2+1\right)\,\mathrm{d}x=\left(-\frac{2}{3}x^3+x\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}.$

Xét $I_2=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$, đặt $x=\sqrt{2}\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thì $\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cos t\,dt$.

Đổi cận: $x=-1$ thì $t=-\frac{\pi}{4}$, với $x=1$ thì $t=\frac{\pi}{4}$, ta được:

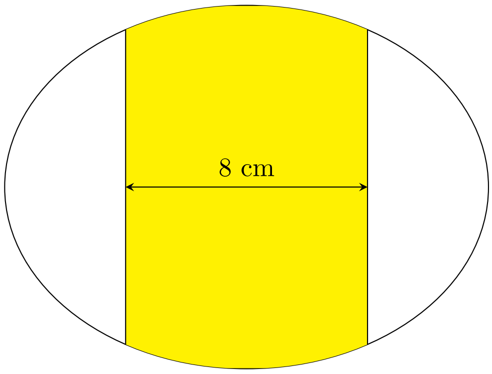
$$\begin{aligned}I_2&=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{2-2\sin^2 t}\sqrt{2}\cos t dt=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}2\cos^2 t dt\\&=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 2t)\,dt=\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=1+\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Suy ra $S=I_1+I_2=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}$ m^2.

Số tiền trồng hoa tối thiểu là: $250000\left(\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\approx 809365$ đồng.

Câu 2.

Ông Nam có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16 m và độ dài trục bé bằng 10 m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8 m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/ 1 m^2. Hỏi ông Nam cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



(A) 7.862.000 đồng. (B) 7.653.000 đồng.
(C) 7.128.000 đồng. (D) 7.826.000 đồng.

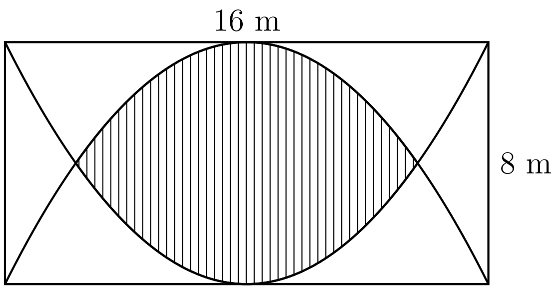
Lời giải.

Giả sử elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.
Từ giả thiết ta có $2a=16\Rightarrow a=8$ và $2b=10\Rightarrow b=5$.
Vậy phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{25}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{ll} y=-\dfrac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_1)\\ y=\dfrac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_2).\end{array}\right.$
Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1), (E_2), $x=-4$, $x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\displaystyle\int_{-4}^{4}\dfrac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2}\int_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x$

Khi đó số tiền là $T=80\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot 100000=7652891,82\simeq 7.653.000$.

Chọn phương án (B)

Câu 3. Một mảnh vườn toán học có dạng hình chữ nhật, chiều dài là 16 m và chiều rộng là 8 m. Các nhà toán học dùng hai đường parabol có đỉnh là trung điểm của một cạnh dài và đi qua 2 điểm đầu của cạnh đối diện, phần mảnh vườn nằm ở miền trong của cả hai parabol (phần gạch sọc như hình vẽ minh họa) được trồng hoa hồng. Biết chi phí để trồng hoa hồng là 45000 đồng/m^2. Hỏi các nhà toán học phải chi bao nhiêu tiền để trồng hoa trên phần mảnh vườn đó (số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)?



(A) 3322000 đồng. (B) 3476000 đồng. (C) 2715000 đồng. (D) 2159000 đồng.

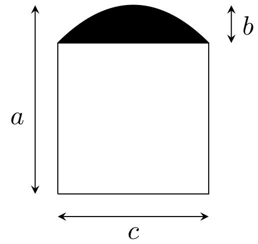
Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc là tâm hình chữ nhật, các trục tọa độ song song với các cạnh của hình chữ nhật khi đó các phương trình của parabol là $y=-\dfrac{x^2}{8}+4$ và $y=\dfrac{x^2}{8}-4$. Diện tích phần trồng hoa là $S=\displaystyle\int_{-4\sqrt{2}}^{4\sqrt{2}}\left(-\dfrac{x^2}{8}+4-\dfrac{x^2}{8}+4\right)\mathrm{d}x\approx 60,34\text{ m}^2$.

Chọn phương án (C)

Câu 4.

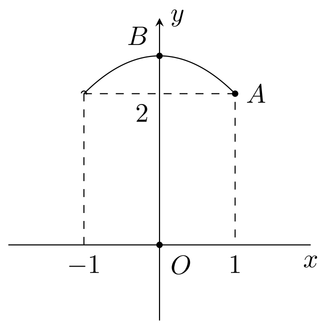
Nhà bạn Minh cần làm một cái cửa có dạng như hình vẽ, nửa dưới là hình vuông, phần phía trên (phần tô đen) là một Parabol. Biết các kích thước $a = 2{,}5$ m, $b = 0{,}5$ m, $c = 2$ m. Biết số tiền để làm $1\ \text{m}^2$ cửa là 1 triệu đồng. Số tiền để làm cửa là



(A) $\dfrac{14}{3}$ triệu đồng.
(B) $\dfrac{13}{3}$ triệu đồng.
(C) $\dfrac{63}{17}$ triệu đồng.
(D) $\dfrac{17}{3}$ triệu đồng.

Lời giải.

Gọi $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ là Parabol đi qua $A(1;2)$ và có đỉnh là $B(0;2{,}5)$.



Khi đó ta có $\begin{cases} a+b+c=2 \\ -\dfrac{b}{2a}=0 \\ c=2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-0{,}5 \\ b=0 \\ c=2{,}5. \end{cases}$

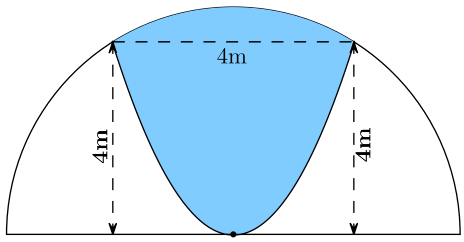
Vậy $(P)\colon y = -0{,}5x^2 + 2{,}5$.

Diện tích cái cửa là $\displaystyle\int_{-1}^{1} (-0{,}5x^2 + 2{,}5)\,\mathrm{d}x = \frac{14}{3}\ \text{m}^2$.

Do đó, số tiền để làm cửa là $\dfrac{14}{3}$ triệu đồng.

Chọn phương án (A)

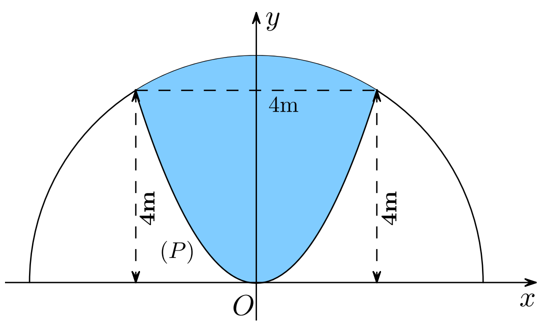
Câu 5. Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4(m), phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)



(A) 3.895.000 (đồng).
(B) 1.948.000 (đồng).
(C) 2.388.000 (đồng).
(D) 1.194.000 (đồng).

Lời giải.

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình nửa đường tròn là $y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - x^2} = \sqrt{20 - x^2}$.



Phương trình parabol (P) có đỉnh là gốc O sẽ có dạng $y = ax^2$. Mặt khác (P) qua điểm $M\,(2;4)$ do đó: $4 = a(-2)^2 \Rightarrow a = 1$.

Phần diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P) và nửa đường tròn.(phần tô màu)

Ta có công thức $S_1 = \displaystyle\int_{-2}^{2} \left(\sqrt{20 - x^2} - x^2\right) dx \cong 11,94m^2$.

Vậy phần diện tích trồng cỏ là $S_{trongco} = \dfrac{1}{2} S_{hinhtron} - S_1 \approx 19,47592654$

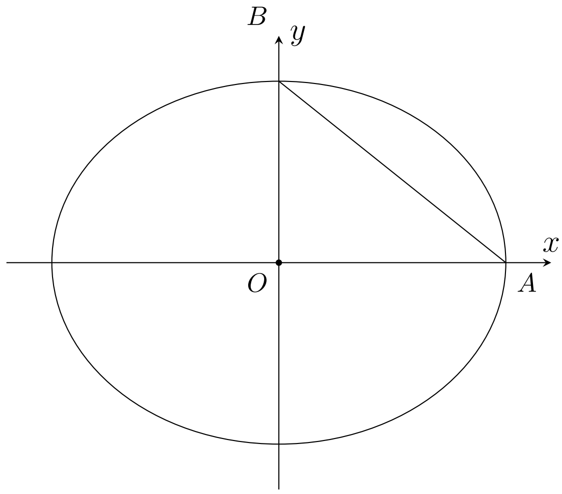
Vậy số tiền cần có là $S_{trongxo} \times 100000 \approx 1.948.000$ (đồng)

Chọn phương án (B)

Câu 6. Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng 100 m, trục nhỏ bằng 80 m được chia thành 2 phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2000 mỗi m^2 trồng cây con và 4000 mỗi m^2 trồng rau. Hỏi thu nhập từ cả mảnh vườn là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn).

(A) 31904000. (B) 23991000. (C) 10566000. (D) 17635000.

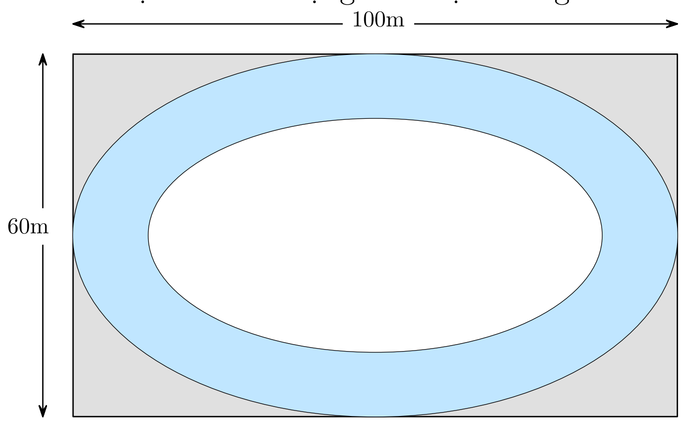
Lời giải.



Theo giả thiết phương trình của Ellip là
$\dfrac{x^2}{2500} + \dfrac{y^2}{1600} = 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{5}\sqrt{2500 - x^2}$ (m^2).
Diện tích của cả khu vườn là
$S = 4\displaystyle\int_0^{50} \dfrac{4}{5}\sqrt{2500 - x^2}\text{d}x = 2000\pi.$
Diện tích phần trồng cây con là
$S_1 = \displaystyle\int_0^{50} \dfrac{4}{5}\sqrt{2500 - x^2}\text{d}x - S_{OAB} = 500\pi - \dfrac{1}{2}\cdot 40\cdot 50 = 500\pi - 1000$ (m^2).
Diện tích phần trồng rau là
$S_2 = S - S_1 = 3\cdot 500\pi + 1000$ (m^2).
Tổng thu nhập của cả mảnh vườn là
$T = 2000\cdot(500\pi - 1000) + 4000\cdot(3\cdot 500\pi + 1000) \approx 23991000.$

Chọn phương án (B)

Câu 7. Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 và chiều rộng là 60m người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là 2m.



Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

(A) 293904000. (B) 283904000. (C) 293804000. (D) 283604000.

Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt gốc tọa độ O vào tâm của hình Elip.
Phương trình Elip của đường viền ngoài của con đường là $(E_1): \dfrac{x^2}{50^2} + \dfrac{y^2}{30^2} = 1$. Phần đồ thị của (E_1) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y = 30\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{50^2}} = f_1(x)$.
Phương trình Elip của đường viền trong của con đường là $(E_2): \dfrac{x^2}{48^2} + \dfrac{y^2}{28^2} = 1$. Phần đồ

thị của (E_2) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y = 28\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{48^2}} = f_2(x)$.

Gọi S_1 là diện tích của (E_1) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y = f_1(x)$. Gọi S_2 là diện tích của (E_2) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y = f_2(x)$.

Gọi S là diện tích con đường. Khi đó

$$S = S_1 - S_2 = 2\int\limits_{-50}^{50} 30\sqrt{1 - \frac{x^2}{50^2}}\mathrm{d}x - 2\int\limits_{-48}^{48} 28\sqrt{1 - \frac{x^2}{48^2}}\mathrm{d}x.$$

Tính tích phân $I = 2\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x, \left(a, b \in \mathbb{R}^+\right)$.

Đặt $x = a\sin t, \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = -a \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{2}; x = a \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\text{Khi đó } I = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b\sqrt{1 - \sin^2 t}.a\cos t\,\mathrm{d}t = 2ab\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = ab\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= ab\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi.$$

Do đó $S = S_1 - S_2 = 50.30\pi - 48.28\pi = 156\pi$.

Vậy tổng số tiền làm con đường đó là $600000.S = 600000.156\pi \approx 294053000$ (đồng)

Chọn phương án A

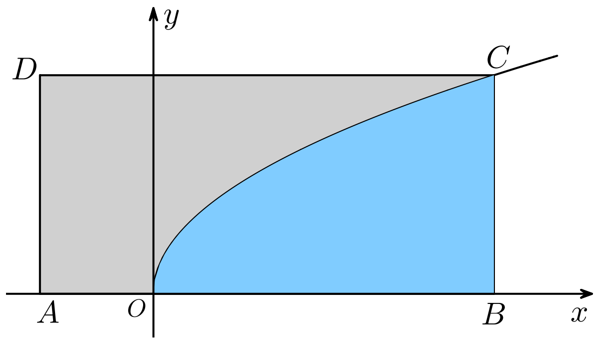
Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật (H) có một cạnh nằm trên trục hoành, và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1; 0)$ và $B(a; \sqrt{a})$, với $a > 0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm a.

A $a = 9$. **B** $a = 4$. **C** $a = \dfrac{1}{2}$. **D** $a = 3$.

Lời giải.

Gọi $ACBD$ là hình chữ nhật với AC nằm trên trục Ox, $A(-1; 0)$ và $B(a; \sqrt{a})$

Nhận thấy đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 0 và đi qua $B(a; \sqrt{a})$. Do đó nó chia hình chữ nhật $ACBD$ ra làm 2 phần là có diện tích lần lượt là S_1, S_2. Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$ và trục Ox, $x = 0, x = a$ và S_1 là diện tích phần còn lại. Ta lần lượt tính S_1, S_2.



Tính diện tích $S_2 = \displaystyle\int\limits_{0}^{a} \sqrt{x}\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$; Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = a \Rightarrow t = \sqrt{a}$.

Do đó $S_2 = \displaystyle\int\limits_{0}^{\sqrt{a}} 2t^2\mathrm{d}t = \left(\frac{2t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a}} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$.

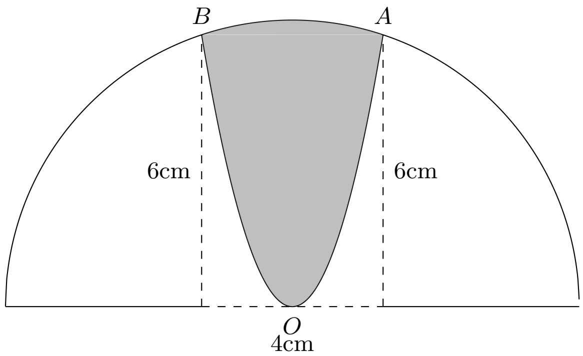
Hình chữ nhật $ACBD$ có $AC = a+1$; $AD = \sqrt{a}$ nên $S_1 = S_{ACBD} - S_2 = \sqrt{a}\,(a+1) - \dfrac{2a\sqrt{a}}{3} =$

$\frac{1}{3}a\sqrt{a}+\sqrt{a}$

Do đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau nên $S_1=S_2 \Leftrightarrow \frac{2a\sqrt{a}}{3}=\frac{1}{3}a\sqrt{a}+\sqrt{a} \Leftrightarrow a\sqrt{a}=3\sqrt{a} \Leftrightarrow a=3$ (Do $a>0$)

Chọn phương án D

Câu 9. Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người ta thiết kế phần trồng hoa hồng có dạng một hình parabol có đỉnh trùng với tâm hình tròn và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa đường tròn, hai đầu mút của parabol nằm trên đường tròn và cách nhau một khoảng bằng 4 mét (phần gạch chéo). Phần còn lại của công viên (phần không gạch chéo) dùng để trồng hoa cúc. Biết các kích thước cho như hình vẽ. Chi phí để trồng hoa hồng và hoa cúc lần lượt là 120.000 đồng/m^2 và 80.000 đồng/m^2.

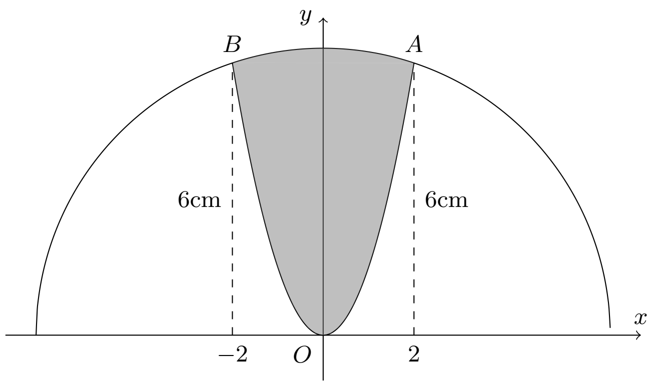


Hỏi chi phí trồng hoa khuôn viên đó gần nhất với số tiền nào dưới đây (làm tròn đến nghìn đồng)

A 6.847.000 đồng. B 6.865.000 đồng. C 5.710.000 đồng. D 5.701.000 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Đường tròn tâm $O(0;0)$ và đi qua điểm $A(2;6)$ có bán kính $R=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$.

Phương trình đường tròn có dạng: $x^2+y^2=40 \Rightarrow y=\sqrt{40-x^2}$ là phương trình nửa đường tròn phía trên trục hoành.

Diện tích nửa hình tròn là $S=\frac{\pi R^2}{2}=20\pi$.

Gọi parabol $(P)\colon y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$.

(P) đi qua các điểm $O(0;0)$; $A(2;6)$; $B(-2;6)$ suy ra $a=\frac{3}{2},\ b=0,\ c=0 \Rightarrow (P)\colon y=\frac{3}{2}x^2$.

Diện tích trồng hoa hồng giới hạn bởi các đường $y=\frac{3}{2}x^2,\ y=\sqrt{40-x^2},\ x=-2,\ x=2$ là

$$S_1=\int\limits_{-2}^{2}\left|\sqrt{40-x^2}-\frac{3}{2}x^2\right|\mathrm{d}x.$$

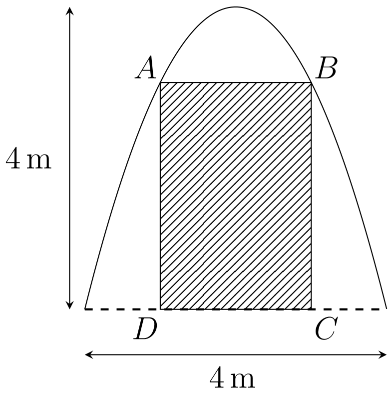
Vậy chi phí cần dùng để trồng hoa trong khuôn viên là

$$S_1.120000+(S-S_1)\cdot 80000=\left(80\cdot 20\pi+40\cdot\int\limits_{-2}^{2}\left|\sqrt{40-x^2}-\frac{3}{2}x^2\right|\,\mathrm{d}x\right)\cdot 1000=5.701.000 \text{ đồng}.$$

Chọn phương án D

Câu 10.

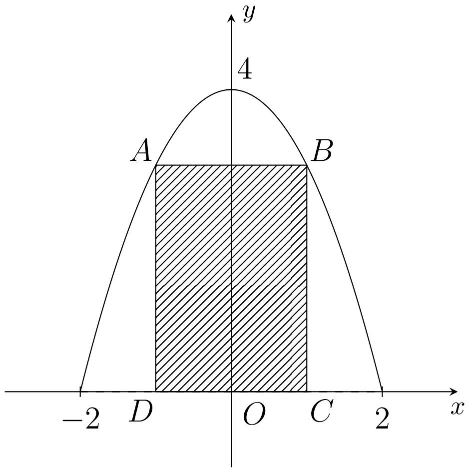
Trong đợt hội trại "Khi tôi 18" được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một 2 m bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?



(A) 900.000 (đồng).
(B) 1.232.000 (đồng).
(C) 902.000 (đồng).
(D) 1.230.000 (đồng).

Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ.
Parabol của pano có dạng $y=ax^2+c$ với $a<0$.
Vì (P) cắt Oy tại điểm có tung độ 4 nên $c=4$.
Mà (P) đi qua điểm $(2;0)$ nên $a=-1$.
Như vậy, parabol của pano là đồ thị của hàm số $y=4-x^2$ trên đoạn $[-2;2]$.
Giả sử $CD=2x$ với $0\le x\le 2$, khi đó diện tích hình chữ nhật là $S_{ABCD}=2x(4-x^2)$.
Diện tích phần trang trí hoa văn là

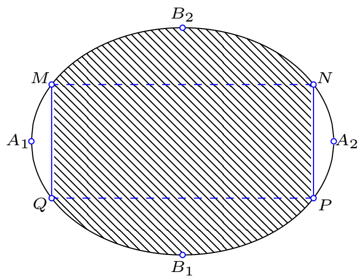


$$S(x)=\int\limits_{-2}^{2}(4-x^2)\,\mathrm{d}x-2x(4-x^2)=2x^3-8x+\frac{32}{3}.$$

Hàm số $S(x)$ có $S'(x)=6x^2-8$ và $S'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
Trên đoạn $[-2;2]$, ta có $S(\pm 2)=\frac{32}{3}, S\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{96-32\sqrt{3}}{9}, S\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{96+32\sqrt{3}}{9}$.
Do đó giá trị nhỏ nhất của $S(x)$ trên $[-2;2]$ là $\frac{96-32\sqrt{3}}{9}$.
Chi phí cho việc trang trí hoa văn lúc đó là $\frac{96-32\sqrt{3}}{9}\times 200.000\approx 902.000$ (đồng).
Chọn phương án C

Câu 11.

Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8$m, $B_1B_2 = 6$m và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3$m ?



A 7.322.000 đồng. **B** 7.213.000 đồng.
C 5.526.000 đồng. **D** 5.782.000 đồng.

Lời giải.

Giả sử phương trình elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} A_1A_2 = 8 \\ B_1B_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 3 \end{cases}$

Suy ra $(E)\colon \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm\dfrac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

Diện tích của elip (E) là $S_{(E)} = \pi ab = 12\pi$ (m^2).

Ta có: $MQ = 3 \Rightarrow \begin{cases} M = d \cap (E) \\ N = d \cap (E) \end{cases}$ với $d\colon y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow M(-2\sqrt{3}; \dfrac{3}{2})$ và $N(2\sqrt{3}; \dfrac{3}{2})$.

Khi đó, diện tích phần không tô màu là $S = 4\displaystyle\int\limits_{2\sqrt{3}}^{4} (\dfrac{3}{4}\sqrt{16 - x^2})\mathrm{d}x = 4\pi - 6\sqrt{3}(m^2)$.

Diện tích phần tô màu là $S' = S_{(E)} - S = 8\pi + 6\sqrt{3}$.

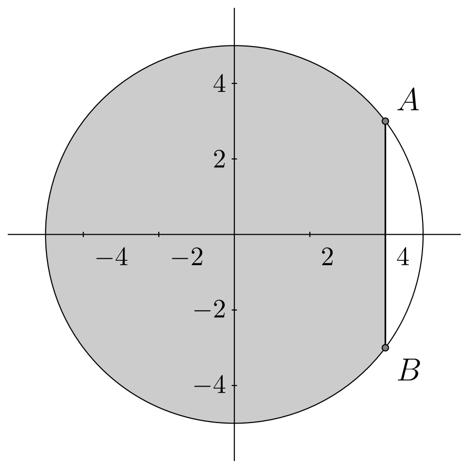
Số tiền để sơn theo yêu cầu bài toán là

$$T = 100.000 \times (4\pi - 6\sqrt{3}) + 200.000 \times (8\pi + 6\sqrt{3}) \approx 7.322.000 \text{ đồng}.$$

Chọn phương án A

Câu 12.

Một người có mảnh đất hình tròn có bán kính 5 m. Người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được 100 nghìn. Tuy nhiên, cần có khoảng trống để dựng chòi và đồ dùng nên người này căng sợi dây 6 m vào hai đầu mút dây nằm trên đường tròn xung quanh mảnh đất. Hỏi người này thu hoạch được bao nhiêu tiền? (Tính theo đơn vị nghìn đồng và bỏ số thập phân).



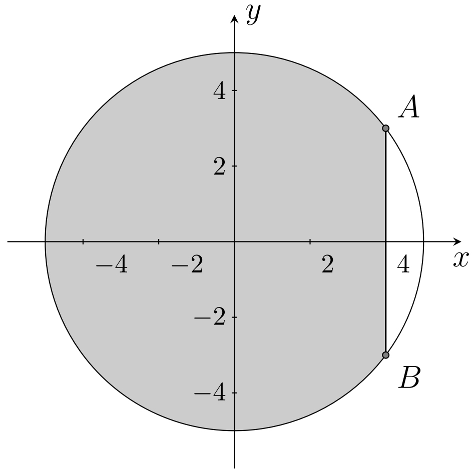
A 3722. **B** 7445. **C** 7446. **D** 3723.

Lời giải.

Đưa vào hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Diện tích trồng cây là $S = 2\int\limits_{-5}^{4} \sqrt{25 - x^2}\,\mathrm{d}x \approx 7445$.

Do đó, số tiền thu được là 7445 nghìn đồng.



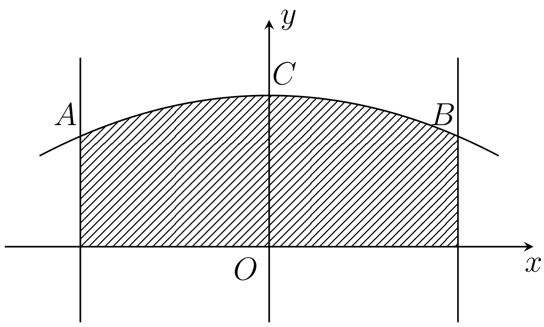
Chọn phương án (B)

Câu 13. Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1\,(m^2)$ của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng phần nghìn).

(A) 6.520.000 đồng. (B) 6.320.000 đồng. (C) 6.417.000 đồng. (D) 6.620.000 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $A\,(-2,5;1,5)$, $B\,(2,5;1,5)$, $C\,(0;2)$.

Giả sử đường cong phá trên là một Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$, với $a; b; c \in \mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm $A\,(-2,5;1,5)$, $B\,(2,5;1,5)$, $C\,(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a(-2,5)^2 + b\,(-2,5) + c = 1,5 \\ a(-2,5)^2 + b\,(2,5) + c = 1,5 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình Parabol là $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$.

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới bởi đồ thị hàm số $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2,5$, $x = 2,5$.

Ta có $S = \int\limits_{-2,5}^{2,5} \left(-\dfrac{2}{25}x^2 + 2\right)\mathrm{d}x = \left(-\dfrac{2}{25}\dfrac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-2,5}^{2,5} = \dfrac{55}{6}$.

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là

$S.\,(700.000) = \dfrac{55}{6}.700000 \approx 6.417.000$ (đồng).

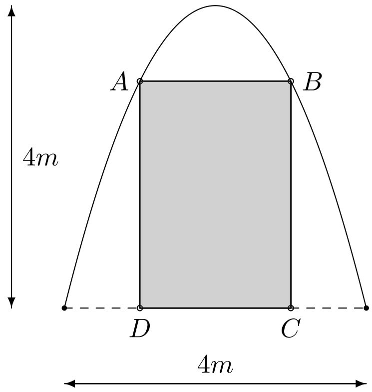
Chọn phương án (C)

Câu 14. Trong đợt hội trại được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2

bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

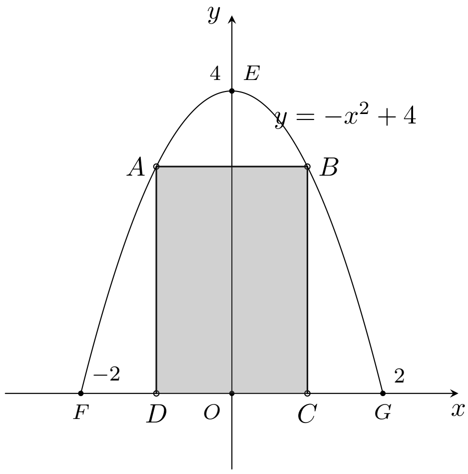
(A) 900.000 (đồng). (B) 1.232.000 (đồng).

(C) 902.000 (đồng). (D) 1.230.000 (đồng).



Lời giải.

Dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Giả sử parabol là $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$.

Khi đó (P) đi qua ba điểm $E(0;4), F(2;0), G(-2;0) \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow (P)\colon y = -x^2 + 4.$

Đặt $CD = 2x, 0 < x < 2 \Rightarrow C(x;0) \Rightarrow BC = -x^2 + 4$.

Do đó diện tích phần trang trí hoa văn là

$$S_{hv} = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\,\mathrm{d}x - 2x(-x^2 + 4) = 2x^3 - 8x + \frac{32}{3} = f(x)$$

Chi phí để dán hoa văn là: $T = 200000 \cdot S_{hv} = 200000 f(x)$.

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 8x + \dfrac{32}{3},\ 0 < x < 2$.

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \in (0;2)$ nên ta có bảng biến thiên sau:

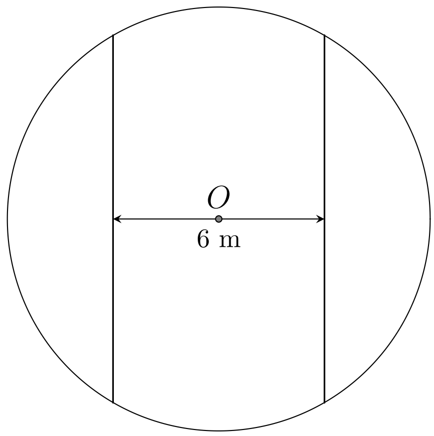
Từ BBT ta có $T \geqslant 200000 \cdot \dfrac{96 - 32\sqrt{3}}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\min T = 200000 \cdot \dfrac{96 - 32\sqrt{3}}{9} \approx 902000$ (đồng).

Chọn phương án (C)

Câu 15.

Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6 m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6 m nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)

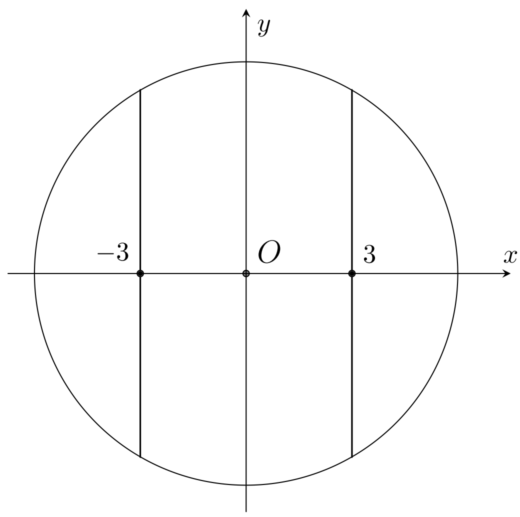


A 4821232 đồng. **B** 8412322 đồng.

C 8142232 đồng. **D** 4821322 đồng.

Lời giải.

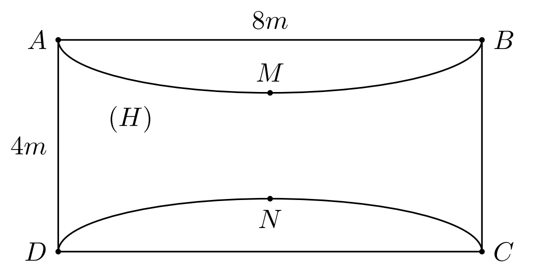
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có phương trình đường tròn (O) là $x^2+y^2=36$. Phần đường tròn phía trên trục Ox có phương trình là $y=f(x)=\sqrt{36-x^2}$. Diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị hàm số $y=f(x)$ và hai đường thẳng $x=-3$, $x=3$. Do đó $S=2\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}\,\mathrm{d}x$. Bằng cách đặt $x=6\sin t$, ta tính được $S=18\sqrt{3}+12\pi$. Do đó số tiền cần dùng là $70000\times S\approx 4821322$ đồng.



Chọn phương án D

Câu 16.

Một sân vườn hình chữ nhật (hình vẽ) có chiều dài $AB=8$ m, chiều rộng $AD=4$ m. Anh Thông chia sân vườn đó thành một phần lối đi (H) ở chính giữa sân (phần tô đậm) và phần còn lại để trồng hoa. Biết phần đất để trồng hoa là hai nửa của một hình Elíp (E), khoảng cách ngắn nhất của hai điểm M,N trên hai viền của Elip là $MN=2$ m. Tính diện tích phần lối đi (H).

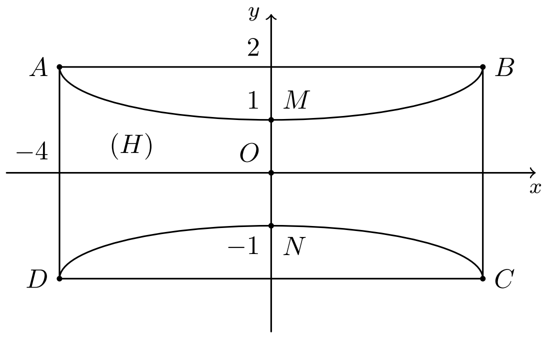


A $(32-4\pi)$ m^2. **B** $(16-4\pi)$ m^2.

C $(32-8\pi)$ m^2. **D** $(16-8\pi)$ m^2.

Lời giải.

Diện tích sân vườn hình chữ nhật $ABCD$
$S = 8 \cdot 4 = 32\ \text{m}^2$.
Xét elip (E) có độ dài trục lớn $2a = AB = 8 \Rightarrow a = 4$.
Vì $MN = 2$ nên suy ra độ dài trục nhỏ của elip (E)
$2b = 2 \Rightarrow b = 1$
Vì hai phần đất trồng hoa là hai nửa của một hình elip (E) nên diện tích phần trồng hoa là
$S_{(E)} = \pi ab = 4\pi\ \text{m}^2$
Suy ra diện tích phần lối đi (H) là
$S_{(H)} = S - S_{(E)} = (32 - 4\pi)\ \text{m}^2$.



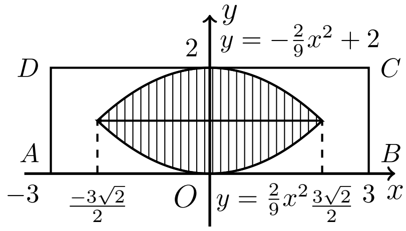
Chọn phương án A

Câu 17. Cho một mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng là 2 m, chiều dài gấp ba chiều rộng. Người ta chia mảnh vườn bằng cách dùng hai đường parabol, mỗi parabol có đỉnh là trung điểm của một cạnh dài và đi qua hai mút của cạnh dài đối diện. Tính tỉ số k diện tích phần mảnh vườn nằm ở miền trong hai parabol với diện tích phần đất còn lại?

A $= \dfrac{1}{3}$. **B** $= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C** $= \dfrac{1}{2}$. **D** $= \dfrac{2+3\sqrt{2}}{7}$.

Lời giải.

Giả sử mảnh vườn được gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên. Khi đó phương trình hai parabol có đỉnh là trung điểm AB, CD lần lượt là $y = \dfrac{2}{9}x^2$ và $y = -\dfrac{2}{9}x^2 + 2$. Xét phương trình
$\dfrac{2}{9}x^2 = -\dfrac{2}{9}x^2 + 2 \Rightarrow x = \pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
Miền diện tích giới hạn bởi các parabol (như hình vẽ) có diện tích là



$$S = \int\limits_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left| -\frac{2}{9}x^2 + 2 - \frac{2}{9}x^2 \right| \mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left(2 - \frac{4}{9}x^2\right) \mathrm{d}x = 4\sqrt{2}.$$

Ta có $S_{ABCD} = 12 \Leftrightarrow k = \dfrac{4\sqrt{2}}{12 - 4\sqrt{2}} = \dfrac{2+3\sqrt{2}}{7}$.

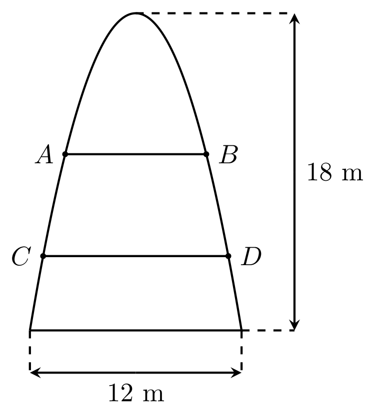
Chọn phương án D

Câu 18.

Một cổng chào có dạng hình parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên).

Tỉ số $\dfrac{AB}{CD}$ bằng

A $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B** $\dfrac{4}{5}$. **C** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D** $\dfrac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

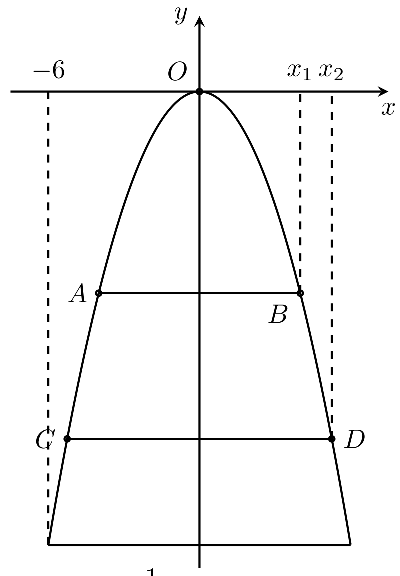


Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.
Phương trình parabol (P) có dạng $y = ax^2$.
Parabol (P) đi qua điểm $(-6; -18)$ nên suy ra

$$a \cdot (-6)^2 = -18 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra $(P): y = -\frac{1}{2}x^2$.
Từ hình vẽ ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}$.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với đường thẳng AB: $y = -\frac{1}{2}x_1^2$ là

$$S_1 = 2\int_0^{x_1} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x_1^2\right) \mathrm{d}x = 2\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x_1^2 x\right)\Big|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với đường thẳng CD: $y = -\frac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2\int_0^{x_2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x_2^2\right) \mathrm{d}x = 2\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x_2^2 x\right)\Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3.$$

Từ giả thiết ta có

$$S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

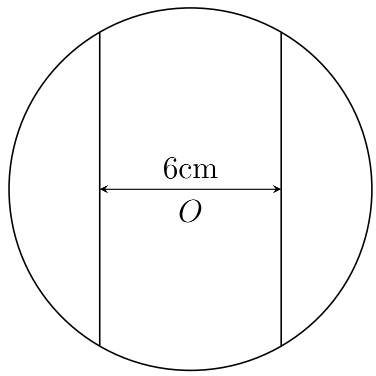
Vậy $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Chọn phương án C

Câu 19.

Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6m nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị).

A 8142232 đồng.
B 4821232 đồng.
C 4821322 đồng.
D 8412322 đồng.



Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là $x^2 + y^2 = 36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình $y = \sqrt{36 - x^2} = f(x)$.

Diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = -3; x = 3 \Rightarrow S = 2\int_{-3}^{3} \sqrt{36 - x^2}\, \mathrm{d}x$.

Đặt $x = 6\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 6\cos t\,\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x = -3 \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{6}$; $x = 3 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$.

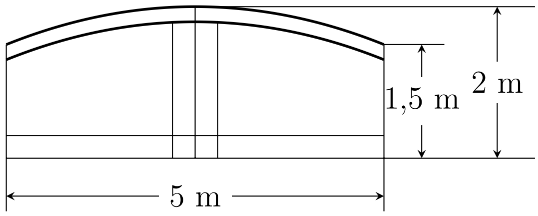
$$\Rightarrow S = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 36\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 36\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t + 1)\,\mathrm{d}t = 18\,(\sin 2t + 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 18\sqrt{3} + 12\pi.$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000 \cdot S \approx 4821322$ đồng.

Chọn phương án C

Câu 20.

Ba Tí muốn làm cửa sắt được thiết kế như hình bên. Vòm cổng có hình dạng một parabol. Giá $1\mathrm{m}^2$ cửa sắt là 660000 đồng. Cửa sắt có giá (nghìn đồng) là



A 6500.　　**B** $\dfrac{55}{6} \cdot 10^3$.

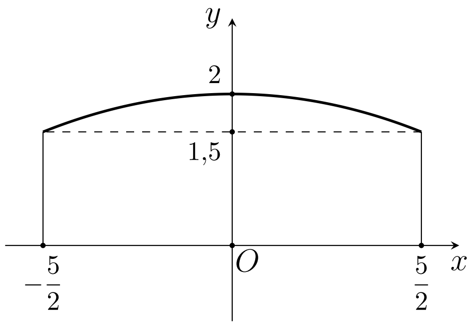
C 5600.　　**D** 6050.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó, vòm cửa là một parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + 2$.

Ta có $1{,}5 = a \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 2 \Leftrightarrow a = -\dfrac{2}{25}$.

Như vậy $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$.



Diện tích của cửa sắt là

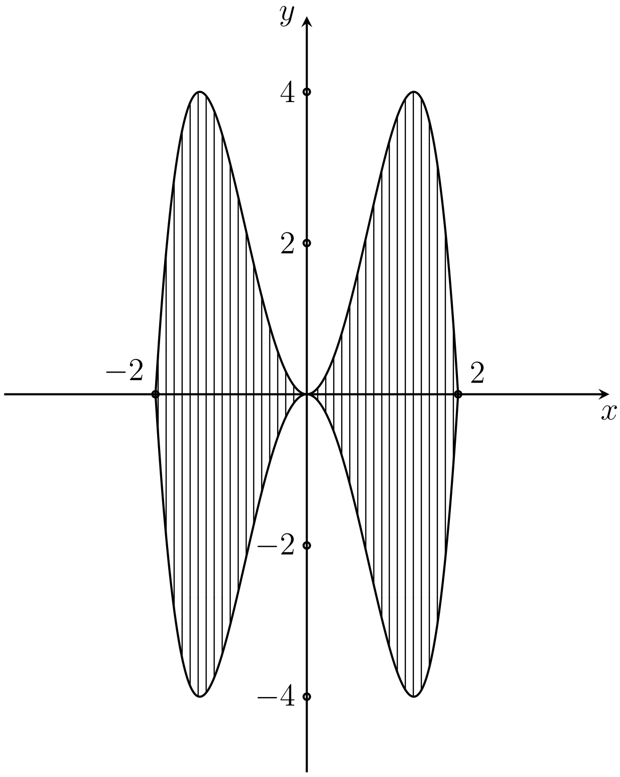
$$S = \int\limits_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} \left(-\frac{2}{25}x^2 + 2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{55}{6}\ \left(\mathrm{m}^2\right).$$

Vậy, giá tiền cửa sắt là

$$\frac{55}{6} \cdot 660000 = 6050000\ \left(\text{đồng}\right) = 6050\ \left(\text{nghìn đồng}\right).$$

Chọn phương án D

Câu 21. Ông Rich muốn gắn những viên kim cương nhỏ vào một mô hình như cánh bướm theo hình vẽ bên dưới. Để tính diện tích đó ông đưa vào một hệ trục tọa độ như hình vẽ thì nhận thấy rằng diện tích mô hình đó là phần giao (tô) giữa hai hàm số trùng phương $y = f(x)$, $y = g(x)$ đối xứng nhau qua trục hoành. Hỏi ông Rich đã gắn bao nhiêu viên kim cương trên mô hình đó biết rằng mỗi đơn vị vuông trên mô hình đó mất 15 viên kim cương?



Ⓐ 256. Ⓑ 128. Ⓒ 64. Ⓓ 265.

Lời giải.

Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại $(2;0)$, $(-2;0)$ có giá trị cực đại bằng 4, giá trị cực tiểu bằng 0, dễ thấy $a = -1, b = 4, c = 0$, $f(x) = -x^4 + 4x^2$, $g(x) = x^4 - 4x^2$. Ta có

$$S = \int\limits_{-2}^{2} \left(-x^4 + 4x^2 - (x^4 - 4x^2)\right)\, \mathrm{d}x = \frac{256}{15}$$

Vậy ông Rich đã gắn $15 \cdot \dfrac{256}{15} = 256$ viên kim cương.

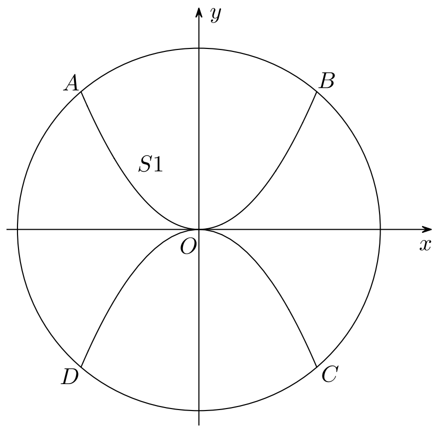
Chọn phương án Ⓐ

Câu 22. Sân trường có một bồn hoa hình tròn tâm O. Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần, bởi hai đường parabol có cùng đỉnh O và đối xứng nhau qua O. Hai đường parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng 4m (như hình vẽ). Phần diện tích S_l, S_2 dùng để trồng hoa, phần diện tích S_3, S_4 dùng để trồng cỏ (Diện tích làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai). Biết kinh phí trồng hoa là 150.000 đồng /1m^2, kinh phí để trồng cỏ là 100.000 đồng/1m^2. Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (Số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn)

Ⓐ 6.060.000 đồng. Ⓑ 5.790.000 đồng. Ⓒ 3.270.000 đồng. Ⓓ 3.000.000 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Parabol có hàm số dạng $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh là gốc tọa độ và đi qua điểm $B(2;2)$ nên có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2$

Đường tròn bồn hoa có tâm là gốc tọa độ và bán kính $OB = 2\sqrt{2}$ nên có phương trình là $x^2 + y^2 = 8$. Do ta chỉ xét nhánh trên của đường tròn nên ta chọn hàm số nhánh trên là $y = \sqrt{8 - x^2}$.

Vậy diện tích phần

$$S_1 = \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{d}x$$

Do đó, diện tích trồng hoa sẽ là $S_1 + S_2 = 2\int_{-2}^{2} \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{d}x \approx 15,233...$

Vậy tổng số tiền để trồng bồn hoa là: $15,233 \times 150.000 + \left(\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 15,233\right) \times 100.000 \approx$ 3.274.924 đồng.

Làm tròn đến hàng chục nghìn nên ta có kết quả là 3.270.000 đồng

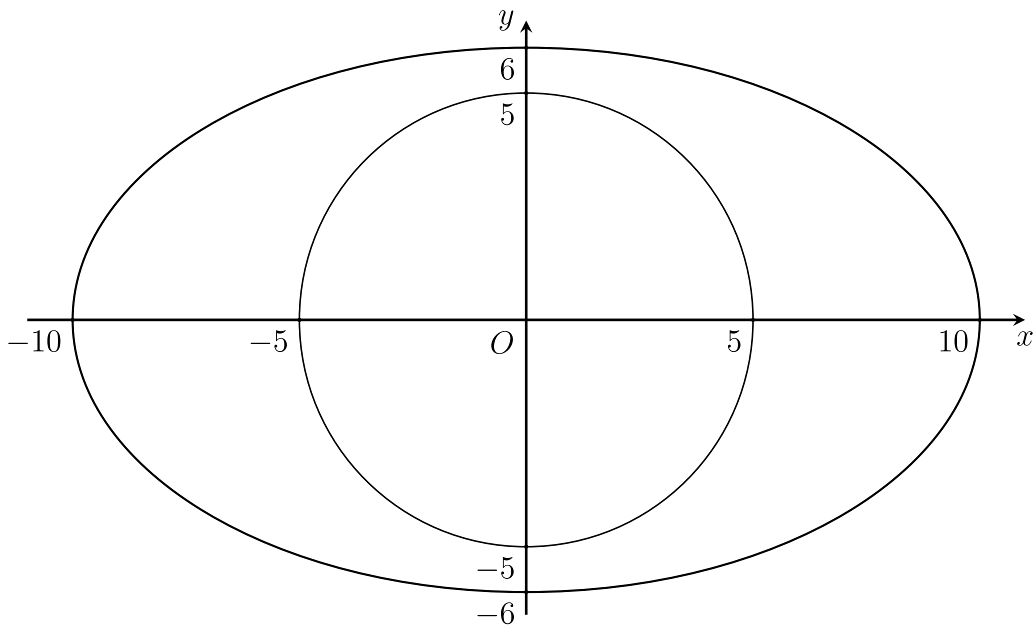
Chọn phương án C

Câu 23. Trong trung tâm công viên có một khuôn viên hình elip có độ dài trục lớn bằng 20 m, độ dài trục bé bằng 12 m. Giữa khuôn viên là một đài phun nước hình tròn có đường kính 10 m, phần còn lại của khuôn viên người ta thả cá. Tính diện tích phần thả cá.

A 35π m^2. **B** 25π m^2. **C** 85π m^2. **D** 60π m^2.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Phương trình đường elip là $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{5}\sqrt{100 - x^2}$.

Elip cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ là -10 và 10. Diện tích khuôn viên hình elip là

$$S = \frac{6}{5}\int_{-10}^{10} \sqrt{100 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $x = 10\sin t, t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{d}x = 10\cos t\,\mathrm{d}t$.

Khi đó $S = \frac{6}{5}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 100\cos^2 x\,\mathrm{d}t = 120\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}t = 60\left(t + \frac{\sin 2t}{t}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 60\pi$.

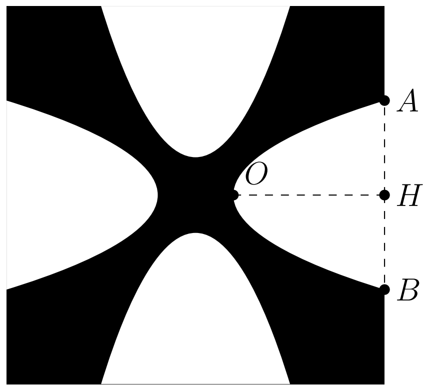
Diện tích đài phun nước là $S' = 25\pi$.

Diện tích phần thả cá bằng $S - S' = 35\pi$.

Chọn phương án A

Câu 24.

Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



(A) $\frac{140}{3}$ cm^2. (B) $\frac{160}{3}$ cm^2. (C) $\frac{14}{3}$ cm^2. (D) 50 cm^2.

Lời giải.

Ta chọn hệ trục Oxy với $H(0;0)$, $A\left(\frac{5}{2};0\right)$, $B\left(-\frac{5}{2};0\right)$, $O(0;4)$.

$(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ là parabol qua ba điểm A; B; O.

Ta có $\begin{cases} A \in (P) \\ B \in (P) \\ O \in (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + c \\ 0 = \frac{25}{4}a - \frac{5}{2}b + c \\ 4 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{16}{25} \\ b = 0 \\ c = 4. \end{cases}$

Suy ra $(P)\colon y = -\frac{16}{25}x^2 + 4$.

Diện tích phần bỏ đi là $S_{\text{bỏ}} = 4\int\limits_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} \left(-\frac{16}{25}x^2 + 4\right)\mathrm{d}x = \frac{160}{3}$.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là $S = 10^2 - S_{\text{bỏ}} = \frac{140}{3}$ (cm^2)

Chọn phương án A

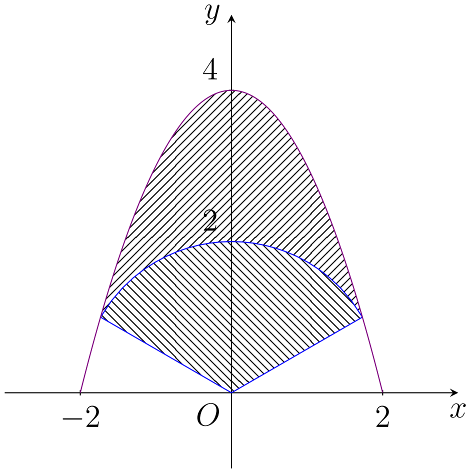
Câu 25. Trên bức tường cần trang trí một hình phẳng dạng parabol đỉnh S như hình vẽ, biết
$OS = AB = 4$ cm, O là trung điểm AB, parabol được chia thành ba phần để sơn ba màu khác nhau với mức chi phí: phần trên là phần kẻ sọc 120000 đồng/ m2, phần giữa là hình quạt tâm O, bán kính $2m$ được tô đậm 140000 đồng/ m2, phần còn lại 160000 đồng/ m2. Tổng chi phí để sơn cả 3 phần gần với số nào sau đây nhất?

(A) 1444000 đồng. (B) 1488000 đồng. (C) 1450000 đồng. (D) 1493000 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

HƯỚNG TỚI KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT QUỐC GIA 2021



Phương trình parabol $y = -x^2 + 4$, phương trình nửa đường tròn $y = \sqrt{4 - x^2}$
Phương trình hoành độ giao điểm:
$\sqrt{4 - x^2} = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

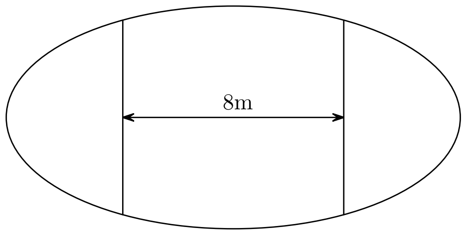
Diện tích phần kẻ sọc trên $S_1 = \displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(-x^2 + 4 - \sqrt{4 - x^2} ==\right) \mathrm{d}x$

Ta có $\widehat{BOM} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MON} = 120^\circ$.
Diện tích hình quạt $S_2 = \dfrac{4\pi}{3}$

Diện tích phần còn lại: $S_3 = \displaystyle\int_{-2}^{2} (-x^2 + 4) - S_1 - S_2$

Tổng chi phí $S_1 \cdot 120000 + S_2 \cdot 140000 + S_3 \cdot 160000 \approx 1440000$.
Chọn phương án A

Câu 26. Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16m và độ dài trục bé bằng10m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/1/m^2. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A 7.862.000 đồng. B 7.653.000 đồng. C 7.128.000 đồng. D 7.826.000 đồng.

Lời giải.

Giả sử elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$.
Từ giả thiết ta có $2a = 16 \Rightarrow a = 8$ và $2b = 10 \Rightarrow b = 5$

Vậy phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{5}{8}\sqrt{64 - y^2} \quad (E_1) \\ y = \dfrac{5}{8}\sqrt{64 - y^2} \quad (E_1) \end{array}\right.$

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1); (E_2); $x = -4$; $x = 4$ và diện tích của dải vườn là $S = 2\displaystyle\int_{-4}^{4} \dfrac{5}{8}\sqrt{64 - x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{5}{2}\int_{0}^{4} \sqrt{64 - x^2}\mathrm{d}x$

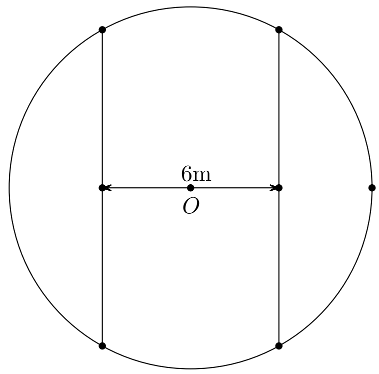
Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x = 8\sin t$, ta được$S = 80\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Khi đó số tiền là$T = 80\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right).100000 = 7652891,82 = 7.653.000$

Chọn phương án B

Câu 27.

Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6m . Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



(A) 8412322 đồng.
(B) 8142232 đồng.
(C) 4821232 đồng.
(D) 4821322 đồng.

Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là $x^2+y^2=36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình $y=\sqrt{36-x^2}=f(x)$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y=f(x)$ và hai đường thẳng $x=-3;\ x=3$

$\Rightarrow S=2\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}dx$

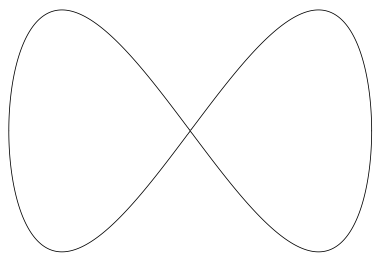
Đặt $x=6\sin t\Rightarrow dx=6\cos tdt$. Đổi cận : $x=-3\Rightarrow t=-\frac{\pi}{6}$; $x=3\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow 2\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}36\cos^2 t\mathrm{d}t=36\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(cos2t+1)\,\mathrm{d}t=18\left(\sin 2t+2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=18\sqrt{3}+12\pi$

Do đó số tiền cần dùng là $70000.S\approx 4821322$ đồng

Chọn phương án D

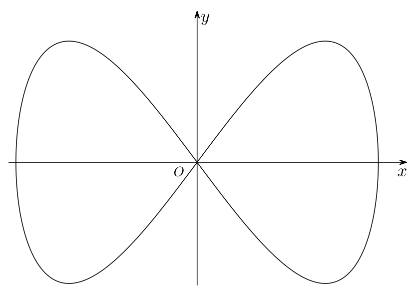
Câu 28. Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemmiscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2=x^2\left(25-x^2\right)$ như hình vẽ bên. Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.



(A) $S=\frac{125}{6}\left(\mathrm{m}^2\right)$.
(B) $S=\frac{125}{4}\left(\mathrm{m}^2\right)$.
(C) $S=\frac{250}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.
(D) $S=\frac{125}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Lời giải.

Vì tính đối xứng trụ nên diện tích của mảnh đất tương ứng với 4 lần diện tích của mảnh đất thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy.



Từ giả thuyết bài toán, ta có $y=\pm\frac{1}{4}x\sqrt{5-x^2}$.

Góc phần tư thứ nhất $y=\frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2}; x\in[0;5]$

Nên $S_{(I)}=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{5}x\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x=\frac{125}{12}\Rightarrow S=\frac{125}{3}(m^3)$

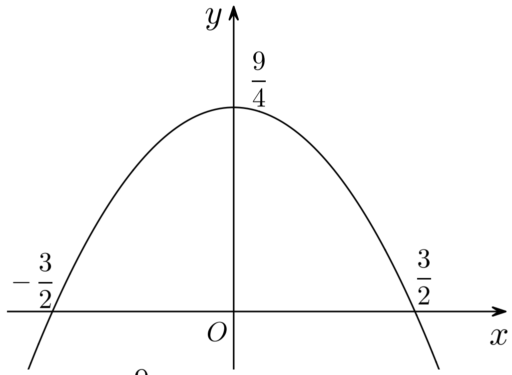
Chọn phương án D

Câu 29. Thầy Tâm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền Thầy Tâm phải trả là:

(A) 12750000 đồng. (B) 3750000 đồng. (C) 6750000 đồng. (D) 33750000 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục như hình vẽ.



Phương trình Parabol là $y = -x^2 + \dfrac{9}{4}$.

Diện tích mái vòm là $S = \left| \displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \dfrac{9}{4}\right) \mathrm{d}x \right| = \dfrac{9}{2}$.

Số tiền cần trả: $\dfrac{9}{2}.1500000 = 6750000$

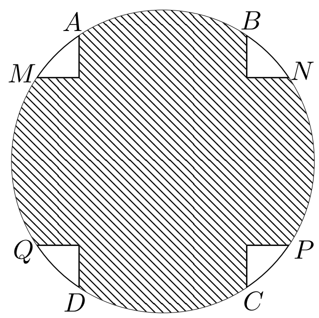
Chọn phương án (C)

Câu 30.

Một vườn hoa có dạng hình tròn, bán kính bằng 5 m. Phần đất trồng hoa là phần tô trong hình vẽ bên. Kinh phí để trồng hoa là 50.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền (làm tròn đến hàng đơn vị) cần để trồng hoa trên diện tích phần đất đó là bao nhiêu? Biết hai hình chữ nhật $ABCD$ và $MNPQ$ có $AB = MQ = 5$ m.

(A) 3.533.057 đồng. (B) 3.641.528 đồng.

(C) 3.641.529 đồng. (D) 3.533.058 đồng.



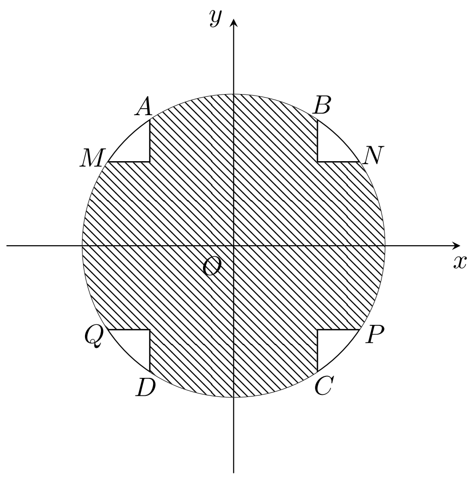
Lời giải.

Xét phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 25$ (C).

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn (C) và các đường thẳng AD, BC là

$$S_1 = 4 \int_0^{\frac{5}{2}} \sqrt{25 - x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{25\pi}{3} + \frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn (C) và các đường thẳng MN, PQ là $S_2 = S_1$.



Gọi I, J lần lượt là giao điểm của MN với AD và BC; L, K lần lượt là giao điểm của PQ với AD và BC.

Ta có $S_{IJKL} = 5 \cdot 5 = 25$ m^2.

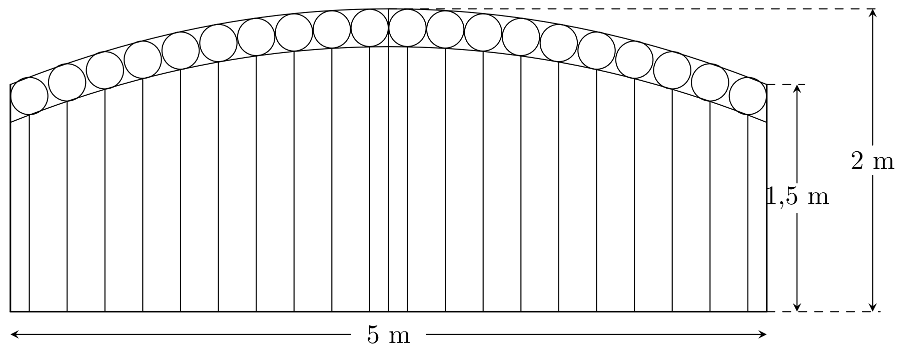
Vậy diện tích phần đất trồng hoa là

$$S = S_1 + S_2 - S_{IJKL} = \frac{50\pi}{3} + 25\sqrt{3} - 25\ \left(\mathrm{m}^2\right).$$

Vậy số tiền cần để trồng hoa là 3.533.057 đồng.

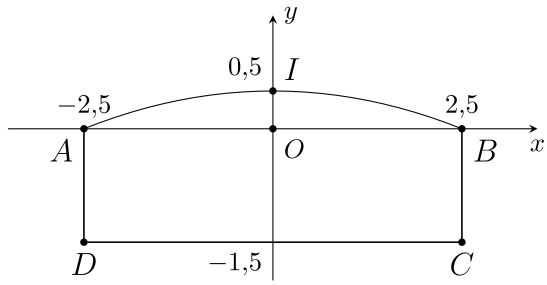
Chọn phương án A

Câu 31. Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một đường parabol. Giá 1 mét vuông cửa rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng phần nghìn)?



(A) 6.620.000 đồng. (B) 6.320.000 đồng. (C) 6.520.000 đồng. (D) 6.417.000 đồng.

Lời giải.



Ta mô hình hóa cánh cửa rào bằng hình thang cong $ADCB$ vuông tại C và D, cung AB như hình vẽ. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho 2 điểm A, B nằm trên trục Ox như hình vẽ. Vậy diện tích cánh cửa sẽ bằng diện tích hình chữ nhật $ABCD$ cộng thêm diện tích miền cong AIB.

Parabol $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(0;0{,}5)$ và cắt trục hoành tại 2 điểm $A(-2{,}5;0)$, $B(2{,}5;0)$ có phương trình là $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + \dfrac{1}{2}$.

Diện tích miền cong AIB bằng $\displaystyle\int_{-2{,}5}^{2{,}5} \left(-\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}$.

Suy ra diện tích cánh cửa bằng $\dfrac{5}{3} + 1{,}5 \cdot 5 = \dfrac{55}{6}$ (m^2).

Giá 1 m^2 cửa rào sắt là 700.000. Vậy giá tiền cửa rào sắt là 6.416.666 đồng.

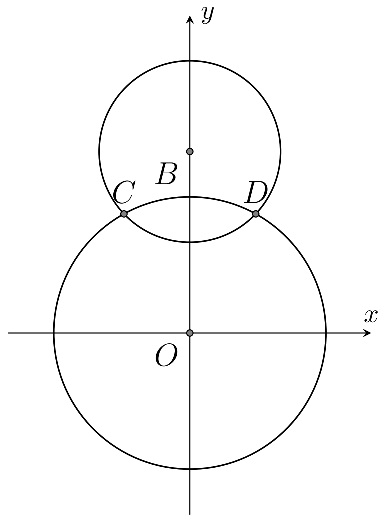
Chọn phương án D

Câu 32. Trên cánh đồng cỏ có hai con bò được cột vào hai cây cọc khác nhau. Biết khoảng cách giữa hai cọc là 4m còn hai sợi dây cột hai con bò dài 3m và 2m. Tính phần diện tích mặt cỏ lớn nhất mà hai con bò có thể ăn chung (lấy giá trị gần đúng nhất).

(A) $1{,}574\mathrm{m}^2$. (B) $1{,}034\mathrm{m}^2$. (C) $1{,}989\mathrm{m}^2$. (D) $2{,}824\mathrm{m}^2$.

Lời giải.

Giả sử con bò thứ nhất được cột vào cọc $O(0;0)$ dây dài 3 mét, con bò thứ hai được cột vào cọc $B(0;4)$ dây dài 2 mét. Con bò 1 di chuyển trong đường tròn $(C_1): x^2+y^2=9$. Con bò 2 di chuyển trong đường tròn $(C_2): x^2+(y-4)^2=4$. Giao điểm C, D có tọa độ thỏa mãn



$$\begin{cases} x^2+(y-4)^2=4 \\ x^2+y^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{21}{8} \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\sqrt{15}}{8} \\ x=\dfrac{-3\sqrt{15}}{8}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Suy ra $C\left(-\dfrac{3\sqrt{15}}{8};\dfrac{21}{8}\right)$, $D\left(\dfrac{3\sqrt{15}}{8};\dfrac{21}{8}\right)$.

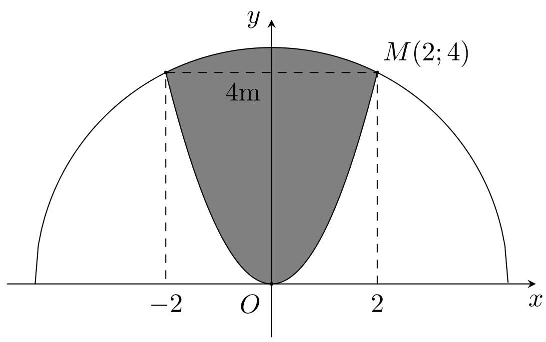
Diện tích phần giao nhau giữa hai đường tròn chính là diện tích phần cỏ lớn nhất mà hai con bò ăn chung

$$S=\int\limits_{-\frac{3\sqrt{15}}{8}}^{\frac{3\sqrt{15}}{8}}\left|\sqrt{9-x^2}-\left(-\sqrt{4-x^2}+4\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{3\sqrt{15}}{8}}^{\frac{3\sqrt{15}}{8}}\left|\sqrt{9-x^2}+\sqrt{4-x^2}-4\right|\mathrm{d}x\approx 1.9898.$$

Chọn phương án C

Câu 33.

Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu) và cách nhau một khoảng bằng 4 m. Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản.

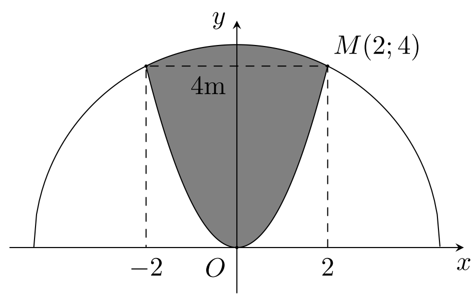


Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150 000 đồng/m^2 và 100 000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)

A 3 738 574 đồng. **B** 1 948 000 đồng. **C** 3 926 990 đồng. **D** 4 115 408 đồng.

Lời giải.

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Tính được bán kính của nửa hình tròn là $R=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.
Khi đó, phương trình nửa đường tròn là



$$y=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{20-x^2}.$$

Phương trình parabol (P) có đỉnh là gốc tọa độ O nên có dạng $y=ax^2$. Vì (P) đi qua $M(2;4)$ nên $4=a\cdot 2^2$, suy ra $a=1$. Phương trình (P): $y=x^2$.
Gọi S_1 là phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và nửa đường tròn (phần tô màu). Khi

đó

$$S_1 = \int\limits_{-2}^{2} \left(\sqrt{20-x^2} - x^2\right) \mathrm{d}x \approx 1194\,\mathrm{m}^2.$$

Gọi S_2 là phần diện tích trồng cỏ Nhật. Khi đó

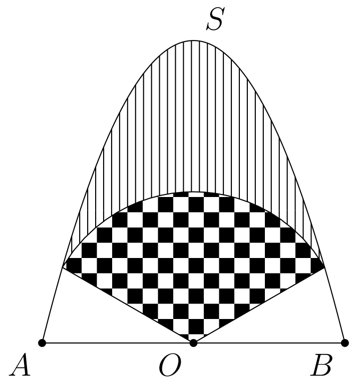
$$S_2 = S_{\text{nửa đường tròn}} - S_1 = \frac{1}{2}\pi R^2 - S_1 = 1948\,\mathrm{m}^2.$$

Vậy số tiền cần có là $150000 \cdot S_1 + 100000 \cdot S_2 \approx 3\,738\,574$ đồng.

Chọn phương án (A)

Câu 34.

Trên bức tường cần trang trí một hình phẳng dạng parabol đỉnh S như hình vẽ, biết $OS = AB = 4$ cm, O là trung điểm AB. Parabol trên được chia thành ba phần để sơn ba màu khác nhau với mức chi phí: phần trên là phần kẻ sọc 140000 đồng/m^2, phần giữa là hình quạt tâm O, bán kính 2 m được tô đậm 150000 đồng/m^2, phần còn lại 160000 đồng/m^2. Tổng chi phí để sơn cả 3 phần gần nhất với số nào sau đây?



(A) 1,597.000 đồng. (B) 1,625.000 đồng. (C) 1,575.000 đồng. (D) 1,600.000 đồng.

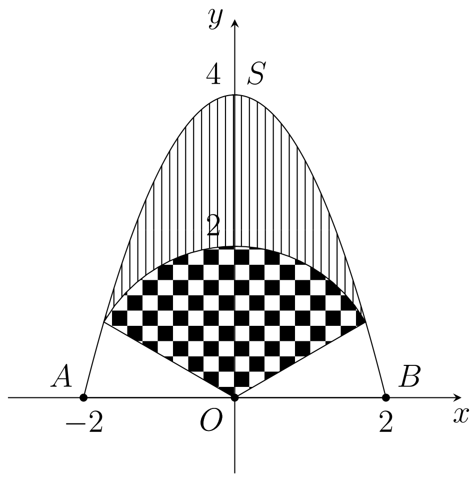
Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy có gốc tạo độ O, tia $Ox \equiv OB$, $Oy \equiv OS$.
Khi đó, parabol có phương trình là $y = 4 - x^2$ và đường tròn có phương trình là $y = \sqrt{4-x^2}$.
Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$4 - x^2 = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Số tiền phần kẻ sọc là

$$T_1 = 140000 \cdot \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(-x^2 + 4 + \sqrt{4-x^2}\right) \mathrm{d}x.$$

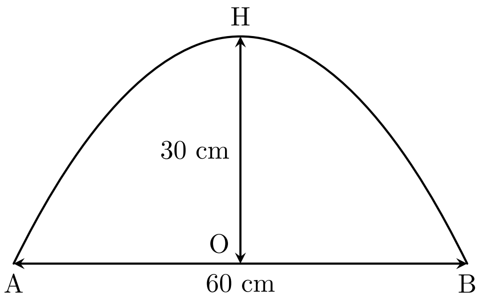


Phần tô đậm là hình quạt có góc ở tâm là $\dfrac{2\pi}{3}$. Số tiền phần tô đậm là $T_2 = 150000 \cdot \dfrac{\pi R^2}{3}$.
Phần còn lại là phần bù của quạt trong hình tròn $T_3 = 160000 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\pi R^2 - \dfrac{p^2}{3}\right) = 160000 \cdot \dfrac{\pi R^2}{6}$.
Vậy tổng số tiền là $T = T_1 + T_2 + T_3 = 1589427$.

Chọn phương án (D)

Câu 35.

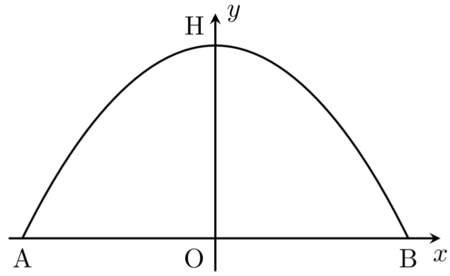
Bạn An cần mua một chiếc gương có viền là đường parabol bậc 2 (xem hình vẽ). Biết rằng đoạn $AB = 60$ cm, $OH = 30$ cm. Diện tích của chiếc gương bạn An mua là



(A) 1000 cm^2. (B) 1400 cm^2.
(C) 1200 cm^2. (D) 900 cm^2.

Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ Oxy, sao cho gốc O trùng với điểm O, trục Ox trùng với tia OB, trục Oy trùng với tia OH.
Khi đó $B(30; 0)$, $H(0; 30)$.
Phương trình Parabol đi qua A, H, B có dạng
$y = ax^2 + b \quad (P)$.



$H \in (P) \Rightarrow 30 = b. \quad (1)$
$B \in (P) \Rightarrow 0 = a \cdot 30^2 + 30 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{30}. \quad (2)$
Từ (1), (2) $\Rightarrow (P)\colon y = -\dfrac{1}{30}x^2 + 30$.
Diện tích của chiếc gương là

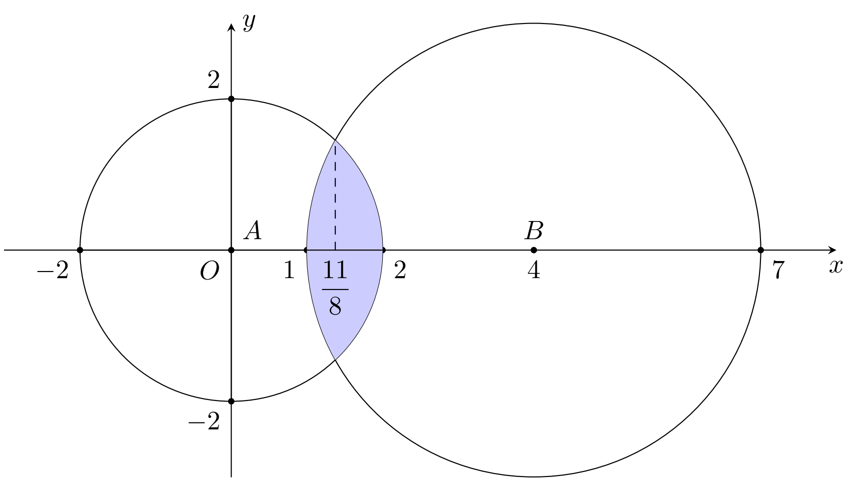
$$\int\limits_{-30}^{30} \left(-\frac{1}{30}x^2 + 30\right) \mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{90} + 30x\right)\Bigg|_{-30}^{30} = 1200\,(\text{cm}^2).$$

Chọn phương án (C)

Câu 36. Trên một cánh đồng cỏ có 2 con bò được cột vào 2 cái cọc khác nhau. Biết khoảng cách giữa 2 cọc là 4 mét còn 2 sợi dây cột 2 con bò dài 3 mét và 2 mét. Tính diện tích mặt cỏ lớn nhất mà 2 con bò có thể ăn chung (lấy giá trị gần đúng nhất).

(A) $1{,}989\text{ m}^2$. (B) $1{,}034\text{ m}^2$. (C) $1{,}574\text{ m}^2$. (D) $2{,}824\text{ m}^2$.

Lời giải.



Gọi hai vị trí cột hai con bò là A và B. Phần cỏ lớn nhất mà hai con bò có thể ăn chung là phần giao nhau của hai hình tròn (C_1) tâm A bán kính $R_1 = 2$ và hình tròn (C_2) tâm B

bán kính $R_2 = 3$.
Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ với $A(0;0)$ và $B(4;0)$.
Khi đó ta được phương trình đường tròn $(C_1)\colon x^2 + y^2 = 4$ và $(C_2)\colon (x-4)^2 + y^2 = 9$.
Hoành độ giao điểm của hai đường tròn (C_1) và (C_2) là nghiệm phương trình

$$4 - x^2 = 9 - (x-4)^2 \Leftrightarrow x = \frac{11}{8}.$$

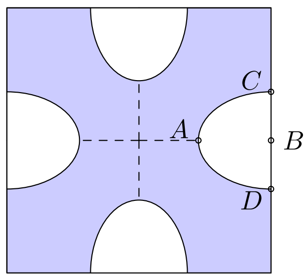
Ta có (C_1) là hợp bởi 2 đồ thị hàm số $y = \pm\sqrt{4-x^2}$;
(C_2) là hợp bởi 2 đồ thị hàm số $y = \pm\sqrt{9-(x-4)^2}$.
Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{9-(x-4)^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = \frac{11}{8}$.
Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4-x^2}$, $y = 0$, $x = \frac{11}{8}$, $x = 2$.
Phần diện tích lớn nhất mà hai con bò có thể ăn chung là

$$S = 2(S_1 + S_2) = 2\left[\int\limits_1^{\frac{11}{8}} \sqrt{9-(x-4)^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{11}{8}}^{2} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right] \approx 1{,}989\,(\mathrm{m}^2).$$

Chọn phương án A

Câu 37. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa hình vuông cạnh 20 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng một nửa e-líp như hình vẽ. Biết nửa trục lớn $AB = 6$ cm, trục bé $CD = 8$ cm. Diện tích bề mặt của một hoa văn đó bằng

A. $400 - 48\pi$ cm^2.
B. $400 - 96\pi$ cm^2.
C. $400 - 24\pi$ cm^2.
D. $400 - 36\pi$ cm^2.



Lời giải.
Gọi S_E là diện tích của một hình e-líp, S_{hv} là diện tích của hình vuông và S_0 là diện tích của hoa văn. Ta có

$$S_0 = S_{hv} - 2S_E.$$

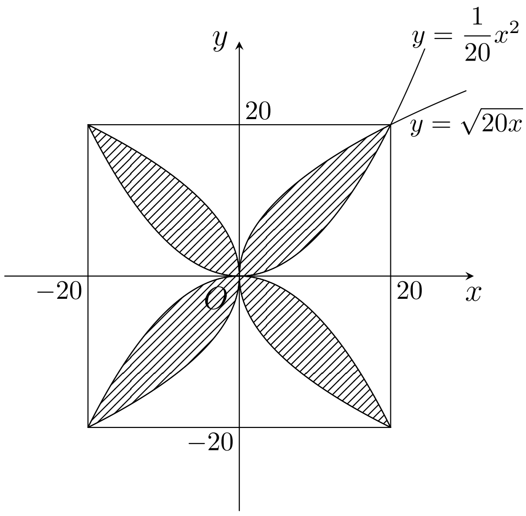
Xét e-lip $(E)\colon \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ có trục lớn bằng 12 cm, trục bé bằng 8 cm.
Ta có $S_E = 2\int\limits_{-6}^{6} 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{36}}\,\mathrm{d}x = 8\int\limits_{-6}^{6} \sqrt{1 - \frac{x^2}{36}}\,\mathrm{d}x$.
Đặt $x = 6\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \mathrm{d}x = 6\cos t\mathrm{d}t$.
Khi đó ta có $S_E = 48\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 24\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)\,\mathrm{d}t = 24\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 24\pi$ cm^2.
Vậy ta có diện tích của một hoa văn là $S_0 = S_{hv} - 2S_E = 20^2 - 2 \times 24\pi = 400 - 48\pi$ cm^2.
Chọn phương án A

Câu 38.

Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm được thiết kế như hình bên dưới. Diện tích mỗi cánh hoa bằng

Ⓐ $\frac{400}{3}$ cm^2. Ⓑ $\frac{800}{3}$ cm^2.

Ⓒ 250 cm^2. Ⓓ 800 cm^2.



Lời giải.

Diện tích mỗi cánh hoa là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^{20} \left| \sqrt{20x} - \frac{1}{20}x^2 \right| \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{20} \sqrt{20x}\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^{20} \frac{1}{20}x^2\,\mathrm{d}x \\ &= 2\sqrt{5} \cdot \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{20} - \left.\frac{x^3}{60}\right|_0^{20} \\ &= \frac{400}{3}. \end{aligned}$$

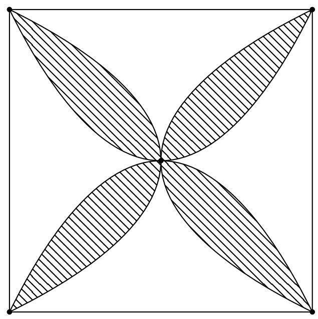
Vậy diện tích mỗi cánh hoa là $\frac{400}{3}$ cm^2.

Chọn phương án Ⓐ

Câu 39.

Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 80 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm của viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (phần gạch sọc như hình vẽ bên). Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

Ⓐ $\frac{800}{3}$ cm^2. Ⓑ $\frac{1600}{3}$ cm^2. Ⓒ $\frac{400}{3}$ cm^2. Ⓓ 250 cm^2.



Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ bên, với $A(40;40)$.

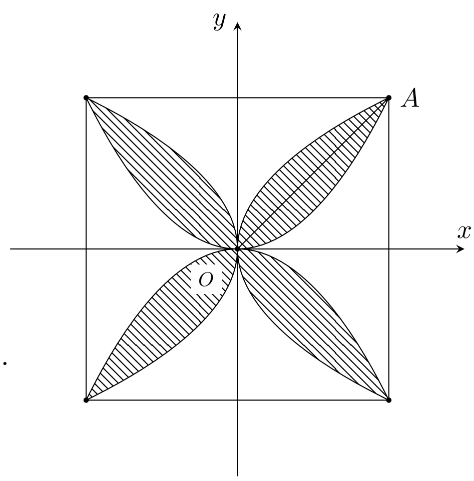
Parabol đi qua gốc tọa độ O và điểm A có phương trình dạng $(P)\colon y = ax^2$.

(P) qua $A(40;40) \Rightarrow 40 = a \cdot 40^2 \Rightarrow a = \frac{1}{40}$.

Đường thẳng OA có phương trình $y = x$.

Diện tích phần cánh hoa ở góc phần tư thứ nhất là

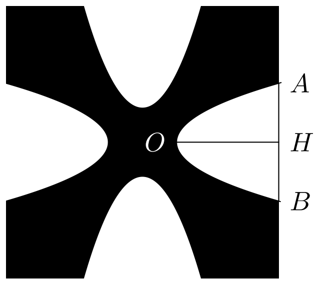
$$S_1 = 2\int\limits_0^{40} \left(x - \frac{x^2}{40}\right)\mathrm{d}x = 2\cdot\left.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{120}\right)\right|_0^{40} = \frac{1600}{3}\ \text{cm}^2.$$



Chọn phương án (B)

Câu 40.

Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình vẽ bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích của bề mặt hoa văn đó.

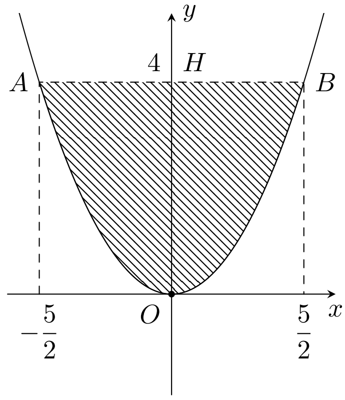


(A) $\dfrac{160}{3}$ cm^2. (B) 50 cm^2. (C) $\dfrac{140}{3}$ cm^2. (D) $\dfrac{14}{3}$ cm^2.

Lời giải.

Diện tích bề mặt hoa văn là $S = 10^2 - 4S_0$, trong đó S_0 là diện tích của Parabol.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ bên.



Parabol có đỉnh $O(0;0)$ và đi qua điểm $B\left(\dfrac{5}{2};4\right)$ nên có phương trình là $y = \dfrac{16}{25}x^2$.

Từ $y = \dfrac{16}{25}x^2$ suy ra $x = \pm\dfrac{5\sqrt{y}}{4}$ với $y \geq 0$.

Phần Parabol cần tính diện tích giới hạn bởi các đường $x = \pm\dfrac{5\sqrt{y}}{4}$, $y = 0$, $y = 4$.

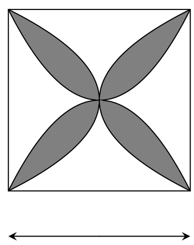
Do đó, $S_0 = \displaystyle\int_0^4 \left|\dfrac{5\sqrt{y}}{4} - \left(-\dfrac{5\sqrt{y}}{4}\right)\right| \mathrm{d}y = \int_0^4 \left|\dfrac{5\sqrt{y}}{2}\right| \mathrm{d}y = \dfrac{40}{3}$.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là $S = 100 - 4 \cdot \dfrac{40}{3} = \dfrac{140}{3}$ cm^2.

Chọn phương án (C)

Câu 41.

Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm. Người ta đã dùng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm của viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (phần tô đậm như hình vẽ). Diện tích của mỗi cánh hoa đó bằng

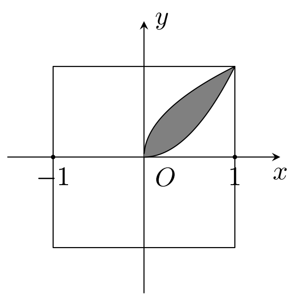


(A) 200 cm^2. (B) $\dfrac{800}{3}$ cm^2. (C) $\dfrac{400}{3}$ cm^2. (D) $\dfrac{200}{3}$ cm^2.

Lời giải.

Đặt hình vuông vào hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, cạnh của hình vuông ta có thể coi có độ dài bằng 2 trên hệ trục tọa độ.

Khi đó diện tích một cánh hoa chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$. Ta có



$$S_1 = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) \mathrm{d}x = \left.\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Vậy thực tế diện tích của mỗi cánh hoa là

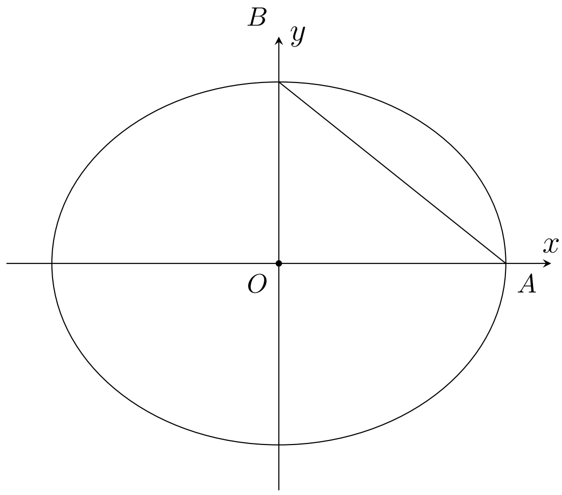
$$S = 20 \times 20 \times S_1 = \frac{400}{3}\text{cm}^2.$$

Chọn phương án (C)

Câu 42. Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng 100 m, trục nhỏ bằng 80 m được chia thành 2 phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2000 mỗi m^2 trồng cây con và 4000 mỗi m^2 trồng rau. Hỏi thu nhập từ cả mảnh vườn là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn).

Ⓐ 31904000. Ⓑ 23991000. Ⓒ 10566000. Ⓓ 17635000.

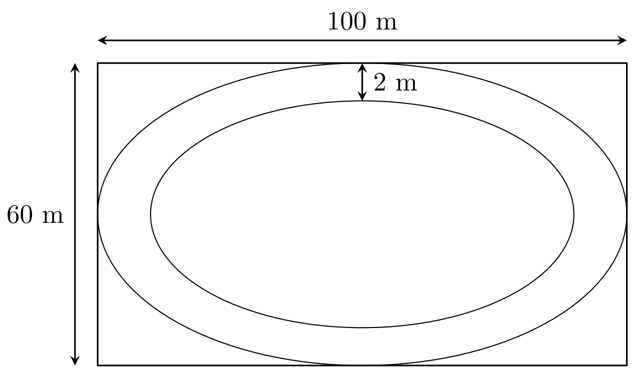
Lời giải.



Theo giả thiết phương trình của elip là
$\dfrac{x^2}{2500}+\dfrac{y^2}{1600}=1\Rightarrow y=\dfrac{4}{5}\sqrt{2500-x^2}$.
Diện tích của cả khu vườn là
$$S=4\int\limits_0^{50}\frac{4}{5}\sqrt{2500-x^2}\mathrm{d}x=2000\pi.$$
Diện tích phần trồng cây con là
$$S_1=\int\limits_0^{50}\frac{4}{5}\sqrt{2500-x^2}\mathrm{d}x-S_{OAB}=500\pi-\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 50=500\pi-1000\ (\mathrm{m}^2).$$
Diện tích phần trồng rau là
$S_2=S-S_1=3\cdot 500\pi+1000\ (\mathrm{m}^2)$.
Tổng thu nhập của cả mảnh vườn là
$T=2000\cdot(500\pi-1000)+4000\cdot(3\cdot 500\pi+1000)\approx 23991000$.

Chọn phương án B

Câu 43. Sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 m và chiều rộng là 60 m người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ).



Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường Elip, Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là 2 m. Kinh phí của mỗi m^2 làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

Ⓐ 293.904.000. Ⓑ 283.904.000. Ⓒ 293.804.000. Ⓓ 294.053.072.

Lời giải.

Gọi (E_1), (E_2) lần lượt là đường elip viền ngoài và viền trong của con đường.
Elip (E_1) có nửa trục lớn là 50 m và nửa trục bé là 30 m.
Elip (E_2) có nửa trục lớn là $50-2=48$ m và nửa trục bé là $30-2=28$ m.
Diện tích mặt đường là phần mặt phẳng giới hạn bởi hai elip (E_1) và (E_2).
Suy ra diện tích mặt đường là $S=\pi(50\cdot 30-48\cdot 28)=156\pi$.
Vậy số tiền làm đường là $T=600000\cdot S\approx 294053072$.

Chọn phương án D

C BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ THỂ TÍCH

Câu 1. Một bác thợ làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường $y = \sqrt{x+1}$ và trục Ox, khi quay quanh trục Ox. Biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm. Khi đó thể tích của lọ là

A 8π dm^3. **B** $\dfrac{15}{2}\pi$ dm^3. **C** $\dfrac{14}{3}\pi$ dm^3. **D** $\dfrac{15}{2}$ dm^3.

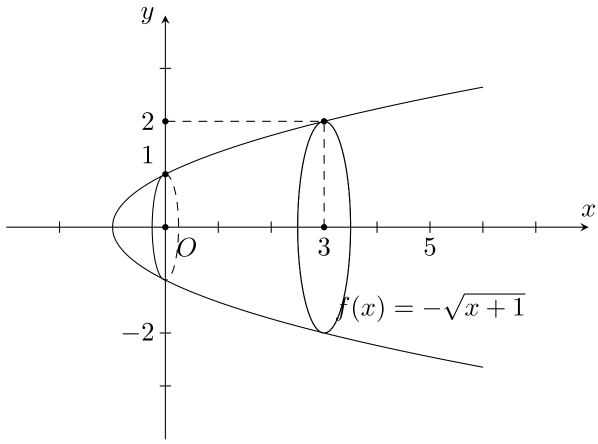
Lời giải.

Đường kính đáy lần lượt là 2 dm và 4 dm nên ta có hoành độ giao điểm của mặt đáy và Ox là nghiệm của các phương trình sau

$$\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy thể tích của lọ là $V = \pi \displaystyle\int_0^3 (x+1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{15}{2}\pi$ dm^3.



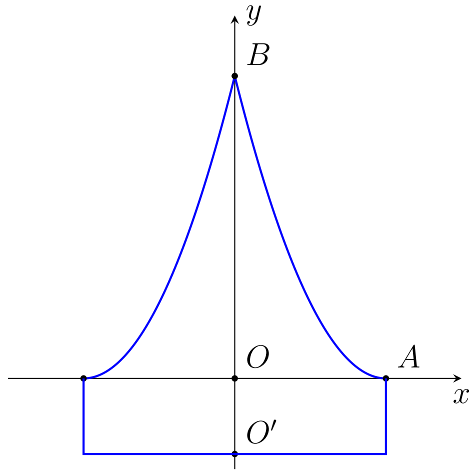
Chọn phương án B

Câu 2.

Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng

A $\dfrac{2750\pi}{3}$ (cm^3). **B** $\dfrac{2500\pi}{3}$ (cm^3).

C $\dfrac{2050\pi}{3}$ (cm^3). **D** $\dfrac{2250\pi}{3}$ (cm^3).



Lời giải.

Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V.

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1.

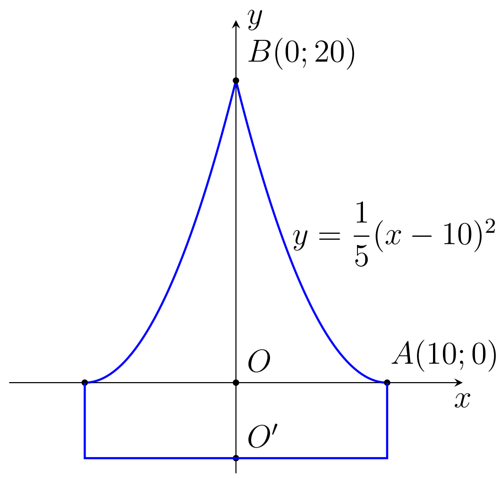
Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2.

Ta có $V = V_1 + V_2$.

$V_1 = 5.10^2\pi = 500\pi$ (cm^3).

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P) : y = a(x-10)^2$.



Vì (P) qua điểm $B(0;20)$ nên $a = \dfrac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y = \dfrac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x < 10$).

Suy ra $V_2 = \pi \displaystyle\int_0^{20} \left(10 - \sqrt{5y}\right)^2 dy = \pi\left(3000 - \dfrac{8000}{3}\right) = \dfrac{1000}{3}\pi\ (cm^3)$.

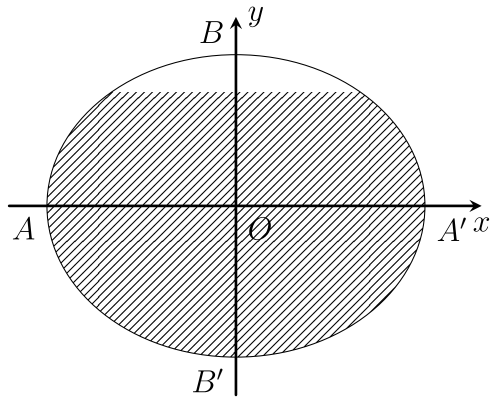
Do đó $V = V_1 + V_2 = \dfrac{1000}{3}\pi + 500\pi = \dfrac{2500}{3}\pi\ (cm^3)$.

Chọn phương án B

Câu 3. Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng $1m$, trục bé bằng $0,8m$, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng $3m$. Được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0,6m$. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).

A. $V = 1,52m^3$. B. $V = 1,31m^3$. C. $V = 1,27m^3$. D. $V = 1,19m^3$.

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Theo đề bài ta có phương trình của Elip là $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{4}{25}} = 1$.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của dầu với elip.

Gọi S_1 là diện tích của Elip ta có $S_1 = \pi ab = \pi\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{5} = \dfrac{\pi}{5}$.

Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip và đường thẳng MN.

Theo đề bài chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0,6m$ nên ta có phương trình của đường thẳng MN là $y = \dfrac{1}{5}$.

Mặt khác từ phương trình $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{4}{25}} = 1$ ta có $y = \dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{1}{4} - x^2}$.

Do đường thẳng $y = \dfrac{1}{5}$ cắt Elip tại hai điểm M, N có hoành độ lần lượt là $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ và $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ nên

$$S_2 = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \left(\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4} - x^2} - \frac{1}{5}\right) \mathrm{d}x = \frac{4}{5}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{\sqrt{3}}{10}.$$

Tính $I = \displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \sqrt{\dfrac{1}{4} - x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x = \dfrac{1}{2}\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\cos t\,\mathrm{d}t$.

Khi $x = \dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ thì $t = -\dfrac{\pi}{3}$; Khi $x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ thì $t = \dfrac{\pi}{3}$.

Khi đó $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

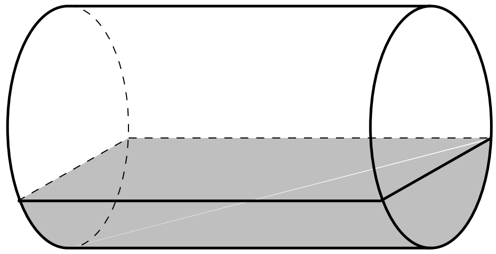
Vậy $S_2 = \frac{4}{5}\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{10} = \frac{\pi}{15} - \frac{\sqrt{3}}{20}$.

Thể tích của dầu trong thùng là $V = \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{15} + \frac{\sqrt{3}}{20}\right) \cdot 3 = 1{,}52$.

Chọn phương án (A)

Câu 4.

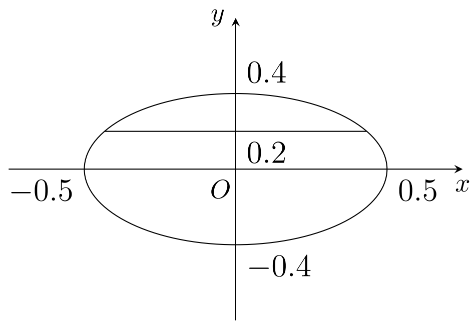
Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng 1 m, trục bé bằng 0,8 m, chiều dài (nằm trong của thùng) bằng 3 m. Được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng(như hình vẽ bên). Biết chiều cao của dầu trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là 0,6 m. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (kết quả được làm tròn đến phần trăm).



(A) $V = 1{,}42$ m^3. (B) $V = 1{,}31$ m^3.
(C) $V = 1{,}27$ m^3. (D) $V = 1{,}52$ m^3.

Lời giải.

Xét một đáy của của thùng đựng dầu và gán hệ trục như hình vẽ.



Phương trình đường elip đáy khi đó có phương trình $\frac{x^2}{0{,}5^2} + \frac{y^2}{0{,}4^2} = 1$.

Khi đó chiều cao mép dầu trong thùng trùng với đường thẳng $y = 0{,}2$.

Xét phương trình $0{,}4\sqrt{1 - \frac{x^2}{0{,}5^2}} = 0{,}2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích phần mặt chứa dầu là

$$S = 0{,}5 \times 0{,}4 \times \pi - \int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \left(0{,}4\sqrt{1 - \frac{x^2}{0{,}5^2}} - 0{,}2\right) \mathrm{d}x \approx$$

0,506.

Do đó thể tích dầu trong thùng là $V = 3 \cdot S \approx 1{,}52\text{m}^3$.

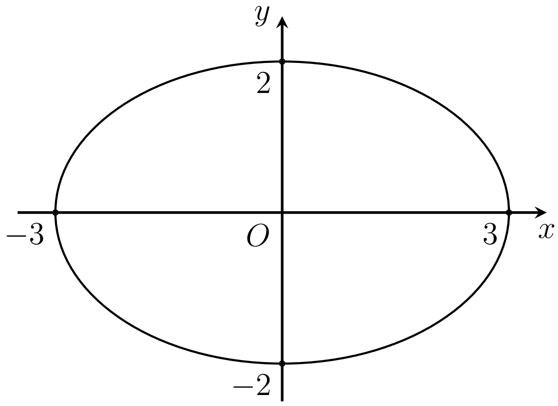
Chọn phương án (D)

Câu 5. Một quả trứng có hình dạng khối tròn xoay, thiết diện qua trục của nó là hình elip có độ dài trục lớn bằng 6, độ dài trục bé bằng 4. Tính thể tích quả trứng đó.

(A) 12π. (B) 18π. (C) 14π. (D) 16π.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

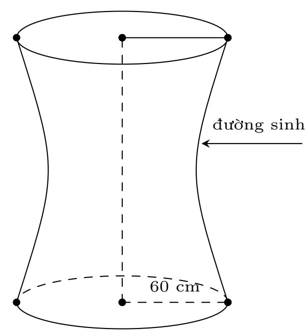


Ta có phương trình đường elip là $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.
Suy ra $y = \pm\dfrac{1}{3}\sqrt{36 - 4x^2}$.
Elip cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 3 và -3. Do đó thể tích của quả trứng là

$$V = \frac{1}{9}\pi \int\limits_{-3}^{3} (36 - 4x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{9}\left(36x - \frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3} = 16\pi.$$

Chọn phương án D

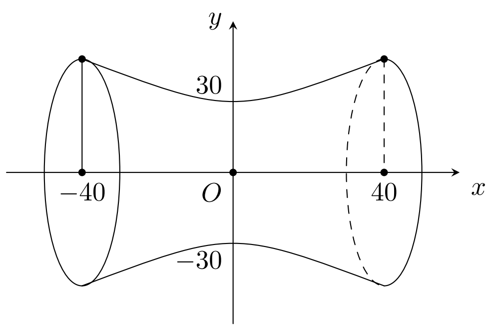
Câu 6.



Cho một chiếc trống như hình vẽ, có đường sinh là nữa elip được cắt bởi trục lớn với độ dài trục lớn bằng 80 cm, độ dài trục bé bằng 60 cm và đáy trống là hình tròn có bán kính bằng 60 cm. Tính thể tích V của trống (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

A $V = 344.963\ \text{cm}^3$. **B** $V = 344.964\ \text{cm}^3$.
C $V = 20.8347\ \text{cm}^3$. **D** $V = 20.8346\ \text{cm}^3$.

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó chiếc trống là hình tròn xoay được sinh bởi một nửa elip, dưới của elip có phương trình là $\dfrac{x^2}{40^2} + \dfrac{(y-60)^2}{30^2} = 1$.
Khi đó nửa đường elip dưới có phương trình $y = 60 - \dfrac{3}{4}\sqrt{40^2 - x^2}$.
Vậy thể tích của chiếc trống là

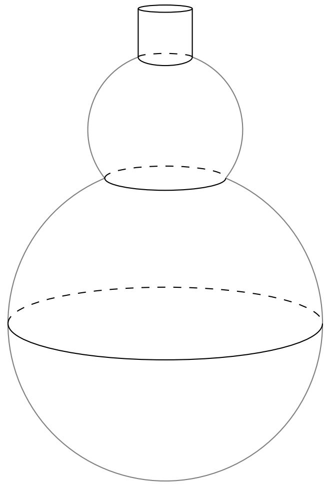
$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int\limits_{-40}^{40} \left(60 - \frac{3}{4}\sqrt{40^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &\approx 344.964\ \text{cm}^3. \end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 7.

Người ta cắt hai hình cầu có bán kính lần lượt là $R = 13$ cm và $r = \sqrt{41}$ cm để làm hồ lô đựng rượu như hình vẽ bên. Biết đường tròn giao của hình cầu có bán kính $r' = 5$ cm và nút đựng rượu là một hình trụ có bán kính đáy bằng $\sqrt{5}$ cm, chiều cao bằng 4 cm. Giả sử độ dày vỏ hồ lô không đáng kể. Hỏi hồ lô đựng được bao nhiêu lít rượu? (kết quả làm trong đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

A 9,5 lít. **B** 8,2 lít. **C** 10,2 lít. **D** 11,4 lít.

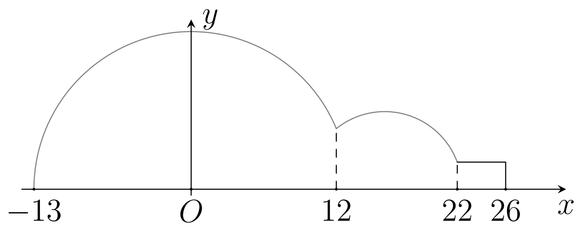


Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Có thể coi hồ lô được tạo thành bằng cách cho đường cong, gấp khúc quay quanh trục Ox.

Phương trình cung cong lớn là $x^2 + y^2 = 13^2 \Rightarrow y = \sqrt{169 - x^2}$.



Phương trình cung cong nhỏ là $(x - 16)^2 + y^2 = 41 \Rightarrow y = \sqrt{41 - (x - 16)^2}$.

Thể tích hồ lô là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-13}^{12} (169 - x^2)\,\mathrm{d}x + \pi \int_{12}^{22} [41 - (x - 16)]\,\mathrm{d}x + \pi \int_{22}^{26} 5\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\left(\frac{8750}{3} + \frac{950}{3} + 20\right) = \frac{9760}{3}\pi \approx 10220{,}65\,\text{cm}^3 \approx 10{,}2\,\text{lít}. \end{aligned}$$

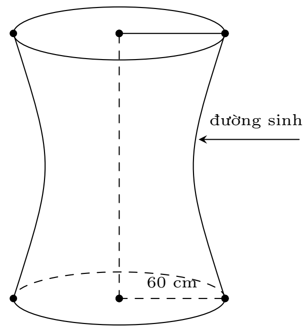
Chọn phương án C

Câu 8.

Cho một chiếc trống như hình vẽ, có đường sinh là nữa elip được cắt bởi trục lớn với độ dài trục lớn bằng 80 cm, độ dài trục bé bằng 60 cm và đáy trống là hình tròn có bán kính bằng 60 cm. Tính thể tích V của trống (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

A $V = 344.963\ (\text{cm}^3)$. **B** $V = 344.964\ (\text{cm}^3)$.

C $V = 20.8347\ (\text{cm}^3)$. **D** $V = 20.8346\ (\text{cm}^3)$.

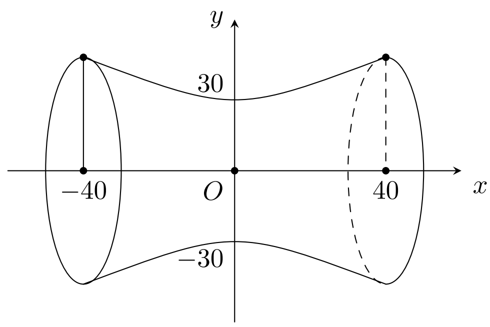


Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó chiếc trống là hình tròn xoay được sinh bởi một nữa elip, dưới của elip có phương trình là $\frac{x^2}{40^2} + \frac{(x - 60)^2}{30^2} = 1$.

Khi đó nữa đường elip dưới có phương trình $y = 60 - \frac{3}{4}\sqrt{40^2 - x^2}$.

Vậy thể tích của chiếc trống là

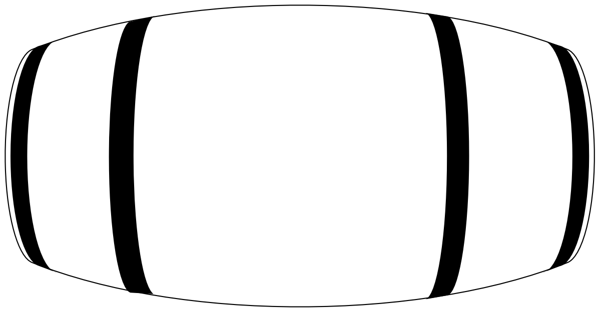


$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_{-40}^{40} \left(60 - \frac{3}{4}\sqrt{40^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &\approx 344.964\ (\text{cm}^3). \end{aligned}$$

Chọn phương án B

Câu 9.

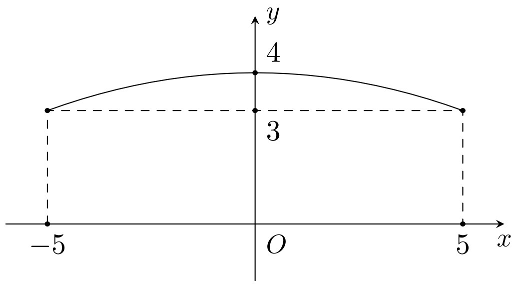
Một thùng đựng rượu làm bằng gỗ là một hình tròn xoay (tham khảo hình bên). Bán kính các đáy là 30 cm, khoảng cách giữa hai đáy là 1 m, thiết diện qua trục vuông góc với trục và cách đều hai đáy có chu vi là 80π cm. Biết rằng mặt phẳng qua trục cắt mặt xung quanh của bình là các đường parabol. Thể tích của thùng gần với số nào sau đây?



(A) 425,2 (lít). (B) 284 (lít). (C) 212,6 (lít). (D) 142,2 (lít).

Lời giải.

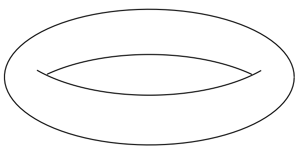
+ Bán kính đáy 30 cm= 3 dm.
+ Khoảng cách giữa hai đáy là 1 m= 10 dm.
+ Thiết diện qua trục vuông góc với trục và cách đều hai đáy có chu vi là 80π cm= 8π dm
$\Rightarrow$ Bán kính $r = 4$ dm.

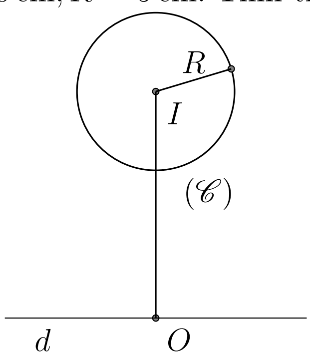


+ Mặt phẳng qua trục cắt mặt xung quanh của bình là các đường parabol có đồ thị như trên
+ Phương trình parabol $y = 4 - \frac{1}{25}x^2$.
+ Thể tích của thùng $V = \pi \int\limits_{-5}^{5} \left(4 - \frac{1}{25}x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{406\pi}{3}$ dm$^3 \approx 425{,}2$ (lít).

Chọn phương án A

Câu 10. Người ta làm một chiếc phao bơi như hình vẽ (với bề mặt có được bằng cách quay đường tròn $(\mathscr{C})$ quanh trục d). Biết rằng $OI = 30\,\text{cm}$, $R = 5\,\text{cm}$. Tính thể tích V của chiếc phao.

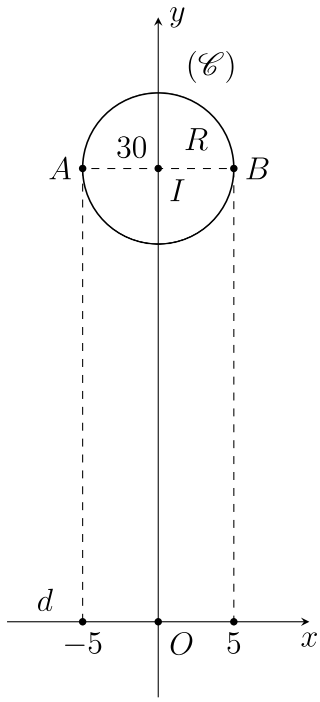




(A) $V = 1500\pi^2\,\text{cm}^3$. (B) $V = 9000\pi^2\,\text{cm}^3$. (C) $V = 1500\pi\,\text{cm}^3$. (D) $V = 9000\pi\,\text{cm}^3$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó, phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ là $x^2 + (y-30)^2 = 25$.
Phương trình nửa trên và nửa dưới (theo đường kính AB) của $(\mathscr{C})$ là



$$\mathscr{C}_t\colon y = 30 + \sqrt{25 - x^2};$$
$$\mathscr{C}_d\colon y = 30 - \sqrt{25 - x^2}.$$

Ta có:

$$V = \pi \int\limits_{-5}^{5} \left[\left(30 + \sqrt{25 - x^2}\right)^2 - \left(30 - \sqrt{25 - x^2}\right)^2\right] \mathrm{d}x$$
$$= \pi \int\limits_{-5}^{5} 120\sqrt{25 - x^2}\, \mathrm{d}x$$

Đặt $x = 5\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \mathrm{d}x = 5\cos t\, \mathrm{d}t$.
Đổi cận: $x = -5 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}; x = 5 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

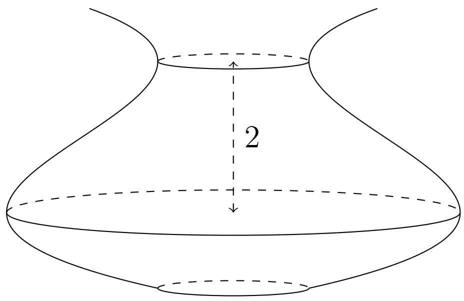
Khi đó, ta có

$$V = 120\pi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 25\cos^2 t\, \mathrm{d}t = 1500\pi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\, \mathrm{d}t = 1500\pi t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 750\pi \sin 2t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1500\pi^2\ \mathrm{cm}^3.$$

Chọn phương án A

Câu 11.

Một con quạ khát nước, nó tìm thấy một cái lọ có nước nhưng cổ lọ lại cao nó không thò mỏ uống được nên đã gắp từng viên bi (hình cầu) bỏ vào trong lọ để nước dâng lên. Hỏi con quạ cần bỏ vào lọ ít nhất bao nhiêu viên bi để có thể uống nước? Biết rằng viên bi có bán kính là $\frac{3}{4}$ (đvđd) và không thấm nước, cái lọ có hình dáng là một khối tròn xoay với đường sinh là

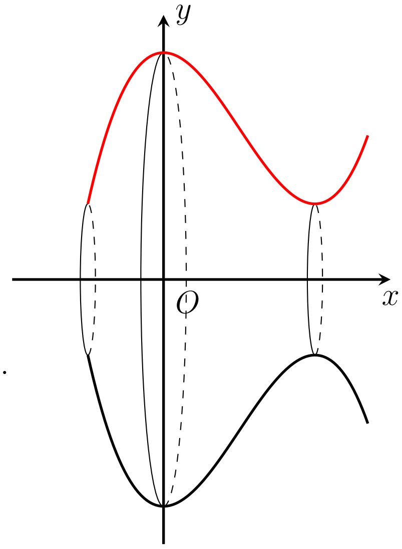


đồ thị của một hàm bậc 3, mực nước ban đầu trong lọ ở vị trí mà mặt thoáng tạo thành hình tròn có bán kính lớn nhất $R = 3$, mực nước mà quạ có thể uống được là vị trí mà hình tròn có bán kính nhỏ nhất $r = 1$ và khoảng cách giữa hai mặt này bằng 2, được minh họa ở hình vẽ trên.

A 15. B 16. C 17. D 18.

Lời giải.

Đặt cái bình vào hệ trục Oxy sao cho O trùng với tâm đường tròn lớn, Ox trùng với trục của cái bình, đi qua tâm hai đường tròn lớn và bé.
Khi đó một đường sinh của cái bình là đồ thị hàm bậc ba có hai điểm cực trị là $A(3;0)$ và $B(2;1)$.
Gọi hàm bậc ba đó là $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ta có hệ



$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \\ y(0) = 3 \\ y(2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 3 \\ 3a + b = 0 \\ 4a + 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b;c;d) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 0; 3\right).$$

Từ đó thể tích phần bình từ đường tròn lớn lên đường tròn nhỏ là

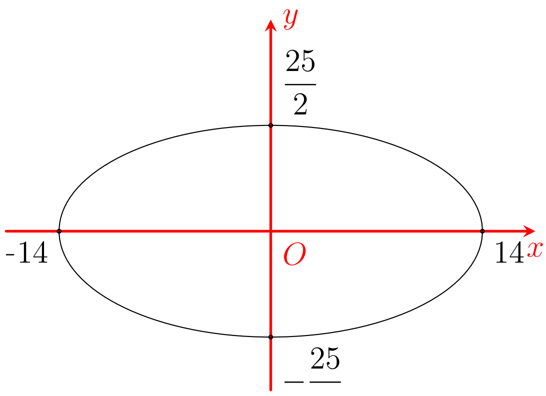
$$V_1 = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{314\pi}{35}.$$

Thể tích một viên bi là $V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{9\pi}{16}$. Ta có $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5024}{315} \approx 15{,}95$.
Do đó số viên bi ít nhất cần phải thả vào lọ là 16 viên.
Chọn phương án B

Câu 12. Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28cm, trục nhỏ 25cm. Biết cứ 1000cm^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20.000đ. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A 183.000đ. B 180.000đ. C 185.000đ . D 190.000đ.

Lời giải.
Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình của Elip là $\frac{x^2}{14^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2} = 1$. Suy ra phương trình nửa đường Elip nằm phía trên trục hoành là $y = \frac{25}{28}\sqrt{196 - x^2}$.
Thể tích của quả dưa hấu là



$$V = \pi \int_{-14}^{14} \left(\frac{25}{28}\sqrt{196 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = 9162\text{cm}^3$$

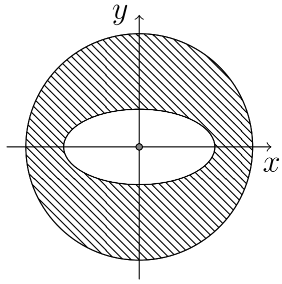
. Vậy từ quả dưa hấu có thể thu được số tiền là $20.000 \cdot 9.162 = 183.000$đ.
Chọn phương án A

Câu 13. Một quả đào có dạng hình cầu đường kính 6 cm. Hạt của nó là khối tròn xoay sinh ra bởi hình Ê-líp khi quay quanh đường thẳng nối hai tiêu điểm F_1, F_2. Biết tâm của Ê-líp trùng với tâm của khối cầu và độ dài trục lớn, trục nhỏ lần lượt là 4 cm và 2 cm. Thể tích phần cùi (phần ăn được) của quả đào bằng $\frac{a}{b}\pi\,(\text{cm}^3)$ với a, b là các số thực và $\frac{a}{b}$ (tối giản), khi đó $a - b$ bằng

A 97. B 36. C 5. D 103.

Lời giải.

Xét Elip có độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ lần lượt là 4 và 2. Ta có $a = 2$, $b = 1$. Phương trình chính tắc của Ê-líp là



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Gọi V_1 là thể tích khối cầu. V_2 là thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi hình Ê-líp khi quay quanh trục Ox. Khi đó thể tích V phần cùi (phần ăn được) của quả đào là $V = V_1 - V_2$.

Ta có $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi$.

$$\text{Ta có } V_2 = 2\pi \int_0^2 \left|1 - \frac{x^2}{4}\right| \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \mathrm{d}x = 2\pi \left(x - \frac{x^3}{12}\right)\Big|_0^2 = 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

Khi đó $V = V_1 - V_2 = 36\pi - \frac{8\pi}{3} = \frac{100\pi}{3}$. Khi đó $a = 100$, $b = 3$ suy ra $a - b = 97$.

Chọn phương án A

Câu 14. Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $v(t) = 10t + 500\ (m^3/s)$. Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?

A $5.10^4\,(\mathrm{m}^3)$. B $4.10^6\,(\mathrm{m}^3)$. C $3.10^7\,(\mathrm{m}^3)$. D $6.10^6\,(\mathrm{m}^3)$.

Lời giải.

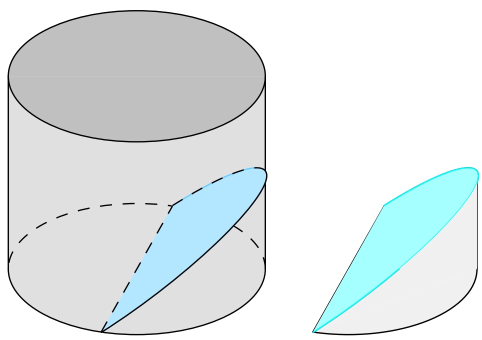
Lượng nước thoát ra là:

$$\int_0^{2400} (10t + 500)\,\mathrm{d}t = \left(5t^2 + 500t\right)\Big|_0^{2400} = 3.10^7\ \left(m^3\right)$$

Chọn phương án C

Câu 15.

Một vật thể bằng gỗ có dạng khối trụ với bán kính đáy bằng $10\,(cm)$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng có giao tuyến với đáy là một đường kính của đáy và tạo với đáy góc 45°. Thể tích của khối gỗ bé là

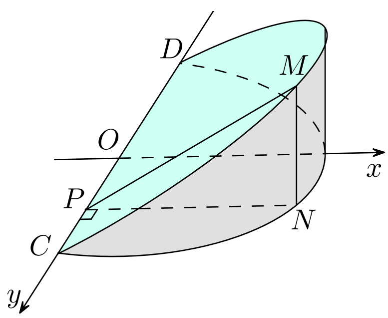


A $\frac{2000}{3}\,(\mathrm{cm}^3)$. B $\frac{1000}{3}\,(\mathrm{cm}^3)$.

C $\frac{2000}{7}\,(\mathrm{cm}^3)$. D $\frac{2000}{9}\,(\mathrm{cm}^3)$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó khúc gỗ bé có đáy là nửa hình tròn có phương trình: $y = \sqrt{100 - x^2}$, $x \in [-10, 10]$



Một một mặt phẳng cắt vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x, $x \in [-10, 10]$

cắt khúc gỗ bé theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ (xem hình).

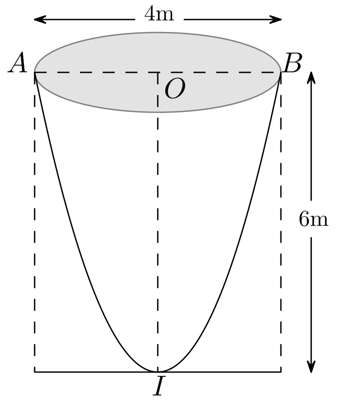
Dễ thấy $NP = y$ và $MN = NP \tan 45^o = y = \sqrt{100 - x^2}$.

Suy ra $S(x) = \frac{1}{2} MN.PN = \frac{1}{2}\left(100 - x^2\right)$

Khi đó thể tích khúc gỗ bé là :$V = \int\limits_{-10}^{10} S(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-10}^{10} \left(100 - x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{2000}{3}\,\left(cm^3\right)$

Chọn phương án (A)

Câu 16. Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây



Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4cm và chiều cao là 6cm. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích $V\,(\mathrm{cm}^3)$ của vật thể đã cho.

(A) $V = 12\pi$. (B) $V = 12$. (C) $V = \frac{72}{5}\pi$. (D) $V = \frac{72}{5}$.

Lời giải.

Chọn gốc tọa độ O trùng với đỉnh I của parabol (P). Vì parabol (P) đi qua các điểm $A(-2;6), B(2;6)$ và $I(0;0)$ nên parabol (P) có phương trình $y = \frac{3}{2}x^2$.

Ta có $y = \frac{3}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}y$. Khi đó thể tích của vật thể đã cho là $V = \pi\int\limits_0^6 \left(\frac{2}{3}y\right)dy = 12\pi\,\left(\mathrm{cm}^3\right)$

Chọn phương án (A)

Câu 17. Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28 cm và trục bé 25 cm. Biết cứ 1000 cm^3 dưa hấu sẽ làm được một cốc sinh tố bán giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa hấu không đáng kể.

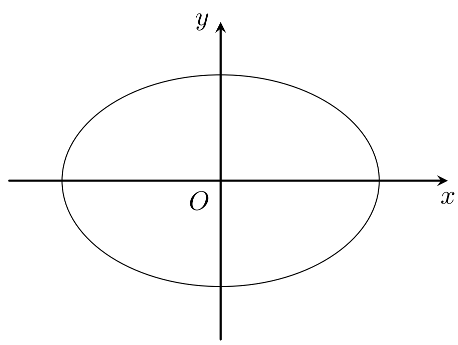
(A) 180000 đồng. (B) 183000 đồng. (C) 185000 đồng. (D) 190000 đồng.

Lời giải.

Xét thiết diện elip của quả dưa hấu được đặt trong hệ trục tọa độ Oxy, ta có $a = 14$, $b = \frac{25}{2}$.

Phương trình chính tắc của elip là $(E)\colon \frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{\frac{625}{4}} = 1$.

Xét phần đồ thị của (E) thuộc góc phần tư thứ nhất, khi đó ta có $x, y > 0$ và $y = \frac{25}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{196}}$.



Từ đó ta có thể tích của khối tròn xoay khi ta quay phần elip thuộc góc phần tư thứ nhất quanh trục hoành là

$$\pi\int_0^{14} \frac{625}{4}\left(1 - \frac{x^2}{196}\right)\mathrm{d}x = \frac{625\pi}{4}\left(x - \frac{x^3}{588}\right)\Bigg|_0^1 4 = \frac{4375\pi}{3}.$$

Suy ra thể tích của quả dưa hấu là $2 \cdot \dfrac{4375\pi}{2} = \dfrac{8750\pi}{3}$ cm^3.

Vậy có thể thu được $\dfrac{8750\pi}{3} \cdot \dfrac{20000}{1000} \approx 183000$ đồng từ việc bán sinh tố.

Chọn phương án (B)

Câu 18. Một khối cầu có bán kính bằng 5dm, người ta cắt bỏ hai đầu bằng hai mặt phẳng vùng vuông góc với một đường kính của khối cầu và cách tâm khối cầu một khoảng bằng 4dm để làm một chiếc lu đựng nước. Thể tích cái lu bằng

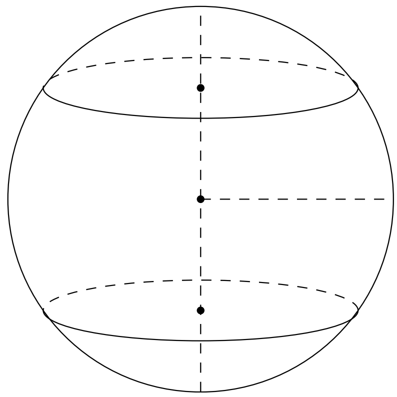
(A) $\dfrac{500\pi}{3}$dm^3. (B) $\dfrac{2296\pi}{15}$dm^3. (C) $\dfrac{952\pi}{27}$dm^3. (D) $\dfrac{472\pi}{3}$dm^3.

Lời giải.

Hai phần cắt đi có thể tích bằng nhau, mỗi phần là một chỏm cầu có thể tích

$$V_1 = \pi \int_d^R \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi \int_4^5 \left(25 - x^2\right) dx = \frac{14\pi}{3}$$

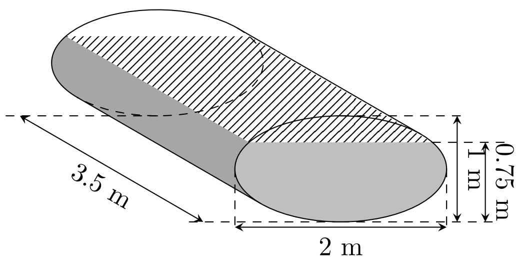
Vậy thể tích của chiếc lu là $V = V_c - 2V_1 = \dfrac{4}{3}\pi 5^3 - 2 \cdot \dfrac{14}{3}\pi = \dfrac{472\pi}{3}$



Chọn phương án (D)

Câu 19.

Một thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có độ dài trục lớn bằng 2 m, độ dài trục bé bằng 1 m, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng 3,5 m. Thùng được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ điểm thấp nhất của đáy thùng đến mặt dầu) là 0,75 m. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



(A) $V = 4{,}42$ m^3. (B) $V = 3{,}25$ m^3. (C) $V = 1{,}26$ m^3. (D) $V = 7{,}08$ m^3.

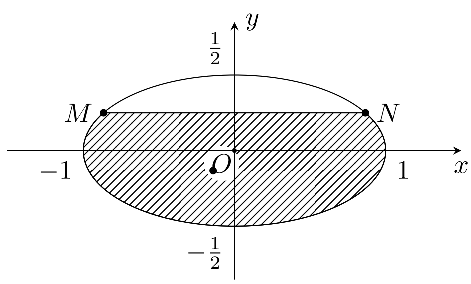
Lời giải.

Ta có phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$.

Gọi S_1 là diện tích của phần mặt phẳng giới hạn bởi elip, ta có $S_1 = \pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới giới hạn bởi nửa trên elip và đường thẳng MN.

Phương trình MN: $y = \dfrac{1}{4}$.



Phương trình nửa trên elip là $y = \sqrt{\dfrac{1 - x^2}{4}} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của elip và MN là

$$\frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 - x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $S_2 = \int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\right) \mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right) \mathrm{d}x - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Đặt $x = \sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$.

Suy ra

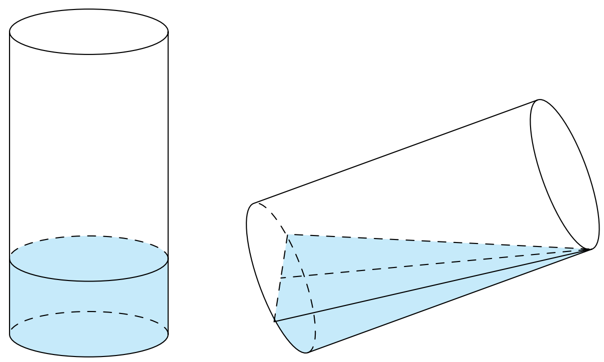
$$\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Suy ra $S_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Vậy thể tích $V = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \cdot 3{,}5 \approx 4{,}42\ \mathrm{m}^3$.

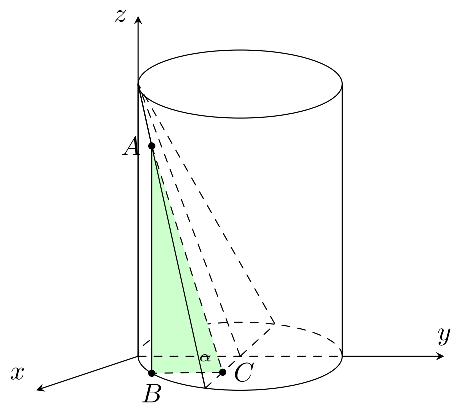
Chọn phương án A

Câu 20. Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 4 cm, chiều cao trong lòng cốc là 12 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết rằng khi nghiêng cốc nước vừa lúc nước chạm miệng cốc, mực nước trùng với đường kính đáy.



A $128\pi\ \mathrm{cm}^3$. B $128\ \mathrm{cm}^3$. C $256\ \mathrm{cm}^3$. D $256\pi\ \mathrm{cm}^3$.

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Cắt khối nước trong cốc khi nằm nghiêng theo mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác ABC vuông tại B.

Ta có: $AB = BC \cdot \tan\alpha = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan\alpha$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2}(R^2 - x^2) \cdot \tan\alpha = \frac{1}{2}(R^2 - x^2) \cdot \frac{h}{R}$.

$\Rightarrow V = \frac{1}{2}\int\limits_{-4}^{4} (R^2 - x^2)\frac{h}{R}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-4}^{4} (R^2 - x^2)\frac{12}{4}\,\mathrm{d}x = 128\ \mathrm{cm}^3$.

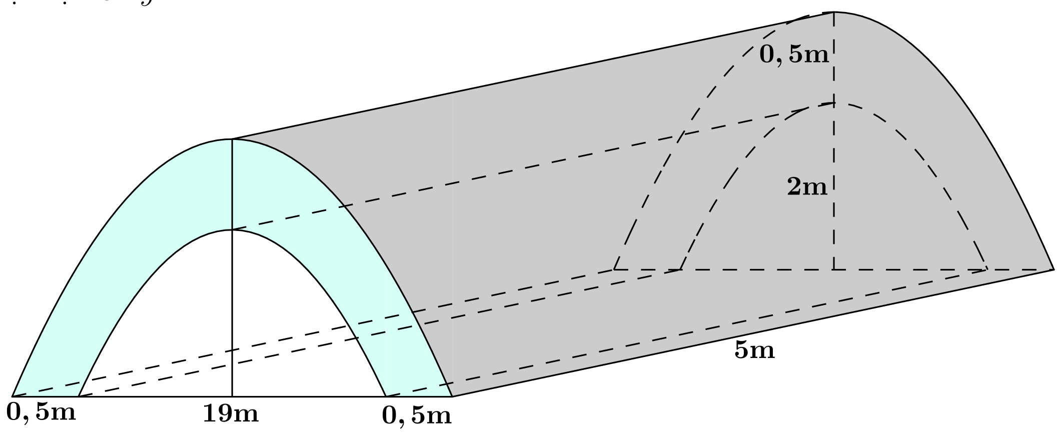
Chọn phương án B

Câu 21. Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).

Ⓐ 19m^3. Ⓑ 21m^3. Ⓒ 18m^3. Ⓓ 40m^3.

Lời giải.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Ta có

Gọi $(P_1): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2}; 0\right), B(0; 2)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{361} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$

Gọi $(P_2): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10; 0), D\left(0; \frac{5}{2}\right)$

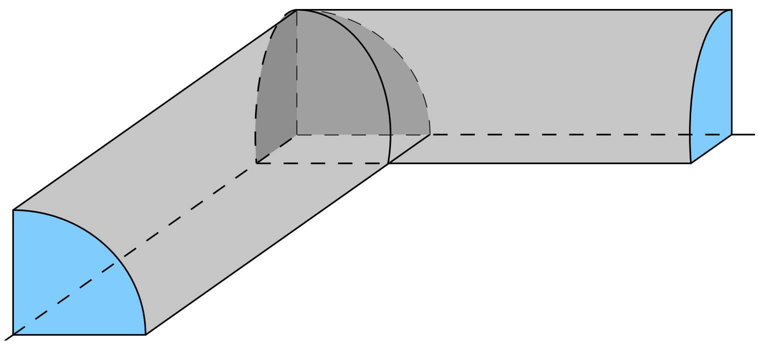
Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$

Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)dx - \int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)dx\right] =$

40m^3

Chọn phương án Ⓓ

Câu 22. Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a, hai trục hình trụ vuông góc với nhau. Xem hình vẽ bên.



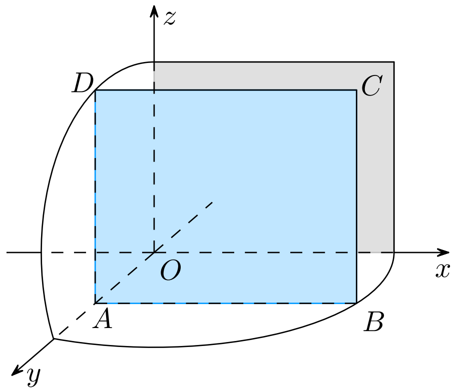
Tính thể tích của (H).

Ⓐ $V_{(H)} = \frac{2a^3}{3}$. Ⓑ $V_{(H)} = \frac{3a^3}{4}$. Ⓒ $V_{(H)} = \frac{a^3}{2}$. Ⓓ $V_{(H)} = \frac{\pi a^3}{4}$.

Lời giải.

Ta gọi trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó phần giao (H) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm O bán kính a, thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục Ox là một hình vuông có diện tích $S(x) = a^2 - x^2$

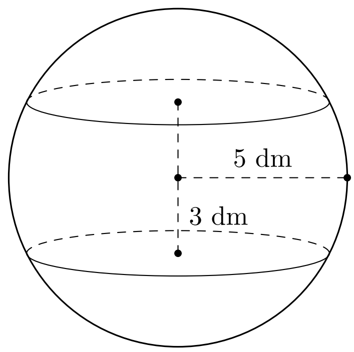
Thể tích khối (H) là $\int_0^a S(x)dx = \int_0^a (a^2 - x^2)dx = \frac{2a^3}{3}$



Chọn phương án (A)

Câu 23.

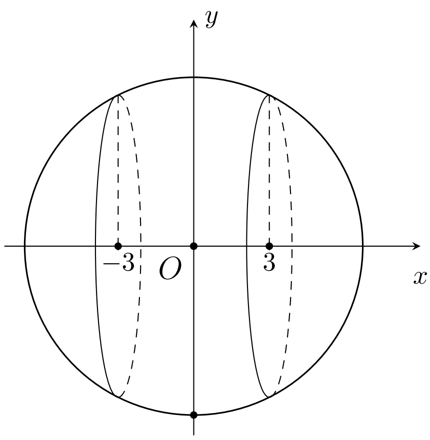
Một khối cầu có bán kính là 5 dm, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc với đường kính và cách tâm một khoảng bằng 3 dm để làm một chiếc lu đựng nước (hình vẽ bên). Thể tích nước tối đa mà chiếc lu có thể chứa được là



(A) $\frac{43}{3}\pi$ dm^3.
(B) $\frac{100}{3}\pi$ dm^3.
(C) 41π dm^3.
(D) 132π dm^3.

Lời giải.

Trong hệ trục tọa độ Oxy, xét đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 = 25$. Khi đó nửa phần trên trục hoành của (C) quay quanh trục hoành tạo ra mặt cầu tâm O bán kính bằng 5. Mặt khác ta tạo hình phẳng H giới hạn bởi nửa phần trên trục hoành của (C), trục Ox và các đường thẳng $x = -3$, $x = 3$; sau đó quay H quanh trục Ox ta được khối tròn xoay chính là chiếc lu trong đề bài. Ta có $x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ suy ra nửa phần trên trục hoành của (C) là $y = \sqrt{25 - x^2}$.



Thể tích V của chiếc lu được tính bởi công thức

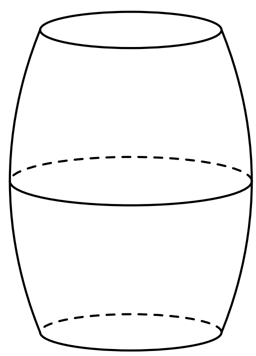
$$V = \pi \int_{-3}^{3} \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-3}^{3} \left(25 - x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \left(25x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3} = 132\pi \text{ dm}^3.$$

Chọn phương án (D)

Câu 24.

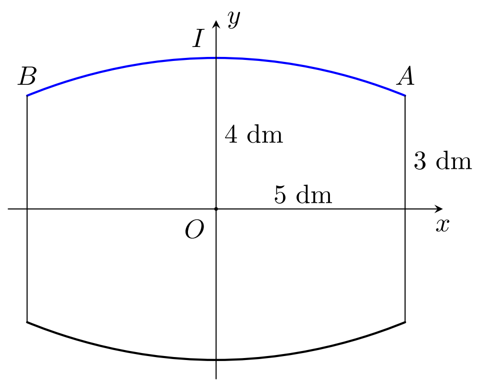
Một thùng rượu có bán kính các đáy là 30 cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có là đường tròn bán kính là 40 cm, chiều cao thùng rượu là 1 m (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích thùng rượu (đơn vị lít) là bao nhiêu?

(A) 425162 lít. (B) 212581 lít. (C) 212,6 lít. (D) 425,2 lít.



Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa trục của thùng rượu. Mặt phẳng (α) cắt mặt xung quanh của thùng rượu theo các đường parabol.



Trong mặt phẳng (α) chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, đơn vị độ dài trên trục là 1 dm.

Phương trình parabol (P) qua A, B, I có dạng $y = ax^2 + c$.

Có $\begin{cases} I(0;4) \\ A(5;3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 40 \\ 3 = 25a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{25} \\ c = 4. \end{cases}$

Phương trình parabol (P) là $y = -\dfrac{1}{25}x^2 + 4$

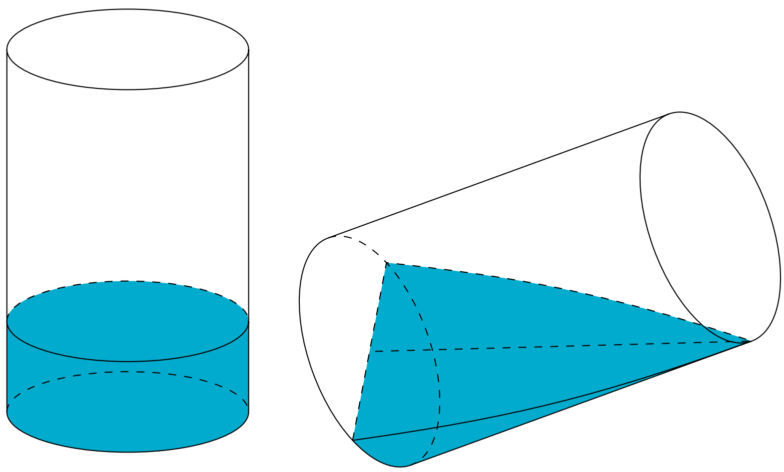
Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -\dfrac{1}{25}x^2 + 4$, $y = 0$, $x = -5$, $x = 5$.

Thùng rượu được xem là khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng D khi quay xung quanh trục Ox. Suy ra thể tích thùng rượu là

$$V = \pi \int_{-5}^{5} \left(-\frac{1}{25}x^2 + 4\right) \mathrm{d}x = \frac{406}{3}\pi\,(\mathrm{dm}^3) \approx 425{,}2\,(\text{lít}).$$

Chọn phương án D

Câu 25. Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao trong lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



A $240\ \mathrm{cm}^3$. **B** $240\pi\ \mathrm{cm}^3$. **C** $120\ \mathrm{cm}^3$. **D** $120\pi\ \mathrm{cm}^3$.

Lời giải.

Đặt trục tọa độ Ox như hình vẽ. Mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x cắt phần nước khi nghiêng cốc theo thiết diện là một tam giác MNK vuông tại N.

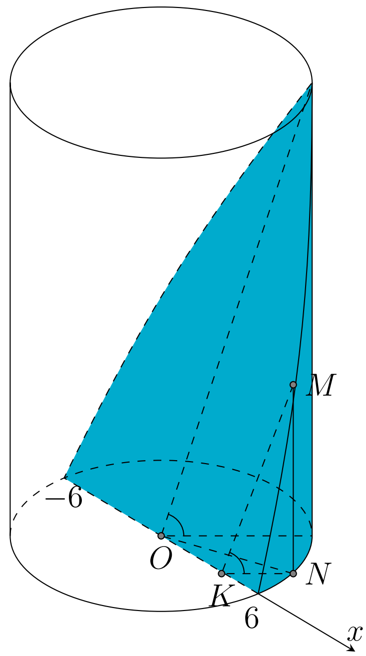
Từ giả thiết suy ra $\tan\widehat{MKN} = \dfrac{MN}{NK} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$, nên $MN = \dfrac{5}{3}NK$.

Mặt khác: $NK^2 = ON^2 - OK^2 = 36 - x^2$.

Nên $S_{MNK} = \dfrac{1}{2} \cdot MN \cdot NK = \dfrac{5}{6}NK^2 = \dfrac{5}{6}(36 - x^2)$.

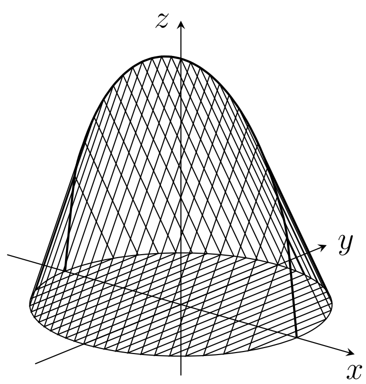
Thể tích lượng nước trong cốc là:

$$V = \int\limits_{-6}^{6} \frac{5}{6}(36 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(30x - \frac{5}{18}x^3\right)\Bigg|_{-6}^{6} = 240\ \mathrm{cm}^3.$$



Chọn phương án (A)

Câu 26.
Cho vật thể có mặt đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (hình vẽ). Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1 \le x \le 1)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó.



(A) $V = \sqrt{3}$. (B) $V = 3\sqrt{3}$. (C) $V = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. (D) $V = \pi$.

Lời giải.

Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1 \le x \le 1)$ thì được thiết diện là một tam giác đều có cạnh bằng $2\sqrt{1 - x^2}$.

Do đó, diện tích của thiết diện là $S(x) = \dfrac{(2\sqrt{1-x^2})^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}(1 - x^2)$.

Vậy, thể tích V của vật thể là

$$V = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{3}(1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn phương án (C)

Câu 27. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0, x = 3$ biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ $x\,(0 \leqslant x \leqslant 3)$ là hình chữ nhật có kích thước là x và $2\sqrt{9 - x^2}$.

(A) 36(đvtt). (B) 9 (đvtt). (C) 18 (đvtt). (D) 54 (đvtt).

Lời giải.

Thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ $x, (0 \leqslant x \leqslant 3)$ là hình chữ nhật có kích thước là x và $2\sqrt{9 - x^2}$.

Diện tích thiết diện được xác định theo hàm là $S(x) = 2x\sqrt{9 - x^2}$.

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay: $V = \int\limits_0^3 2x\sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x = 18$ (đvtt).

Chọn phương án C

Câu 28. Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\,(0 \le x \le \pi)$ là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

A $V = 3$. **B** $V = 3\pi$. **C** $V = 2\pi\sqrt{3}$. **D** $V = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Diện tích tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$ là $S(x) = \dfrac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{\sin x}\right)^2}{4} = \sqrt{3}\sin x$.

Vậy thể tích $V = \int\limits_0^{\pi} S(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{3}\sin x\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{3}$.

Chọn phương án D

Câu 29. Thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1, x = 2$ và có thiết diện tại $x\,(1 < x < 2)$ là hình chữ nhật có cạnh là 2 và $\sqrt{2x+1}$ và được cho bởi công thức nào sau đây?

A $V = \pi\int\limits_1^2 (8x + 4)\,\mathrm{d}x$. **B** $V = \pi\int\limits_1^2 2\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

C $V = \int\limits_1^2 (8x + 4)\,\mathrm{d}x$. **D** $V = \int\limits_1^2 2\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc trục Ox tại điểm $x\,(1 < x < 2)$ là $S(x) = 2 \cdot \sqrt{2x+1}$.

Khi đó thể tích cần tìm là $V = \int\limits_1^2 2\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

Chọn phương án D

Câu 30. Xét vật thể $(\mathcal{T})$ nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$. Biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\ (-1 \le x \le 1)$ là một hình vuông có cạnh $2\sqrt{1 - x^2}$. Thể tích vật thể $(\mathcal{T})$ bằng

A $\dfrac{16\pi}{3}$. **B** $\dfrac{16}{3}$. **C** π. **D** $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Diện tích thiết diện là $S(x) = 4(1 - x^2)$.

Suy ra thể tích vật thể $(\mathcal{T})$ là $V = \int\limits_{-1}^1 4(1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(4x - \dfrac{4x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^1 = \dfrac{16}{3}$.

Chọn phương án B

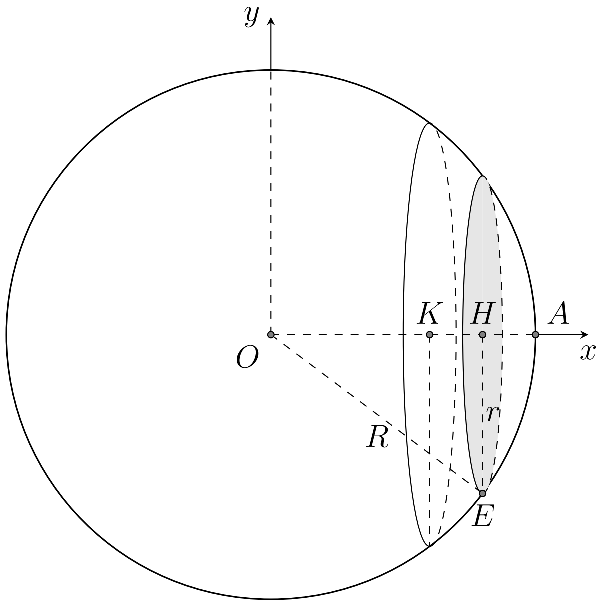
Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho khối cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2 = 25$, mặt phẳng (P) có phương trình $x + 2y - 2z + 5 = 0$ cắt khối cầu (S) thành 2 phần. Tính thể tích của phần không chứa tâm của mặt cầu (S).

A $\dfrac{25\pi}{3}$. **B** $\dfrac{25\pi}{6}$. **C** $\dfrac{14\pi}{3}$. **D** $\dfrac{16\pi}{3}$.

Lời giải.

Tính thể tích chỏm cầu (giới hạn từ điểm K đến điểm A).
Xét một hệ trục tọa độ như hình vẽ bên.
Đặt $OK = h$, $OH = x$, $HE = r$, $OE = R$.
Lúc đó diện tích phần thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại H có diện tích $S(x)$.
Ta có $r^2 = R^2 - x^2 \Rightarrow S(x) = \pi(R^2 - x^2)$.
Thể tích chỏm cầu:

$$\begin{aligned} V &= \int\limits_h^R S(x)\,\mathrm{d}x = \pi\int\limits_h^R (R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{3}(R-h)^2(2R+h) \end{aligned}$$



Quay lại bài toán ban đầu. Mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính $R = 5$.
Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là $h = \dfrac{|1+4+2+5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 4$.

Áp dụng công thức trên ta có $V = \dfrac{14\pi}{3}$.

Chọn phương án C

Câu 32. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le \pi)$ là một tam giác đều cạnh bằng $2\sqrt{\sin x}$.

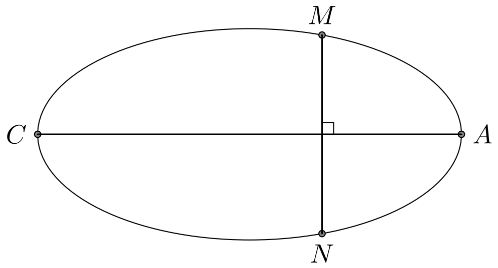
A $V = 2\sqrt{3}$. B $V = 2\sqrt{3}\pi$. C $V = \dfrac{3}{2}\pi$. D $V = \dfrac{3}{2}\pi^2$.

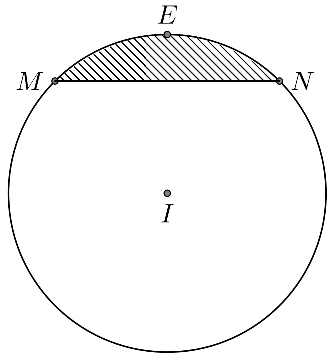
Lời giải.

Thể tích V được tính theo công thức $V = \displaystyle\int\limits_0^\pi \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\sqrt{\sin x}\right)^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\pi \sqrt{3}\sin x\,\mathrm{d}x = -\sqrt{3}\cos x\Big|_0^\pi =$ $2\sqrt{3}$.

Chọn phương án A

Câu 33. Sân vận động Sports Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức ở Singapore năm 2015. Nền sân là một Elip (E) có trục lớn dài 150 m, trục bé dài 90 m (Hình 3). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt Elip (E) ở M, N (Hình a) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong Hình b) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí cho sân vận động thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu làm mái không đáng kể. Hỏi thể tích đó xấp xỉ bao nhiêu?





Hình a

Hình b

(A) $57793\ \mathrm{m}^3$. (B) $115586\ \mathrm{m}^3$. (C) $32162\ \mathrm{m}^3$. (D) $101793\ \mathrm{m}^3$.

Lời giải.

Ta có $2a = 150 \Rightarrow a = 75$, $2b = 90 \Rightarrow b = 45$. Phương trình Elip có dạng $\dfrac{x^2}{75^2} + \dfrac{y^2}{45^2} = 1$.

Gọi $M(x, y) \in (E) \Rightarrow N(x, -y) \in (E) \Rightarrow MN = 2|y| = 2 \cdot \dfrac{45}{75}\sqrt{75^2 - x^2} = \dfrac{6}{5}\sqrt{75^2 - x^2}$.

Diện tích phần gạch sọc được tính bằng

$$\frac{1}{4}S_{(I,IM)} - S_{\triangle IMN} = \frac{1}{4}\pi IM^2 - \frac{1}{2}IM^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)IM^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{MN}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Khi đó, thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, được tính bằng

$$\int\limits_{-75}^{75} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{MN}{\sqrt{2}}\right)^2 \mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\int\limits_{-75}^{75} \frac{18}{25}(75^2 - x^2)\,\mathrm{d}x \approx 115586\ \mathrm{m}^3.$$

Chọn phương án (B)

Câu 34. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng bất kỳ vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\,(1 \leqslant x \leqslant 3)$ thì được thiết diện là tam giác đều có độ dài cạnh là $\sqrt{3x^2 + 4}$.

(A) $\dfrac{17\sqrt{3}}{4}$. (B) $V = \dfrac{17\sqrt{3}}{2}\pi$. (C) $\dfrac{17\sqrt{3}}{4}\pi$. (D) $\dfrac{17\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Giả sử thiết diện là tam giác đều ABC.

Diện tích của thiết diện: $S(x) = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(3x^2 + 4)$

Thể tích khối vật thể $V = \displaystyle\int\limits_1^3 \dfrac{\sqrt{3}}{4}(3x^2 + 4)\,\mathrm{d}x = \dfrac{17\sqrt{3}}{2}$.

Chọn phương án (D)

Câu 35. Một vật thể trong không gian được giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1, x = 3$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1 \leq x \leq 3)$ cắt vật thể theo thiết diện là một hình tam giác đều có cạnh bằng $2\sqrt{x}$ Tính thể tích V của vật thể đó.

(A) $V = 8\sqrt{3}$. (B) $V = 4\sqrt{3}\pi$. (C) $V = 4\sqrt{3}$. (D) $V = 4\pi$.

Lời giải.

Tam giác đều có cạnh bằng $2\sqrt{x}$ nên

Diện tích tam giác đều là $S(x) = \dfrac{(2\sqrt{x})^2\sqrt{3}}{4} = x\sqrt{3}$

Vậy $V = \displaystyle\int\limits_1^3 x\sqrt{3}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{2}\Bigg|_1^3 = 4\sqrt{3}.$

Chọn phương án C

Câu 36. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 4$, biết rằng khi cắt bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ $x\,(1 \leqslant x \leqslant 4)$ thì được thiết diện là lục giác đều có độ dài cạnh là $2x$.

(A) $V = 63\sqrt{3}\pi$. (B) $V = 126\sqrt{3}$. (C) $V = 63\sqrt{3}$. (D) $V = 126\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Thiết diện tại điểm có hoành độ x là lục giác đều có cạnh $2x$ nên nó có diện tích

$$S(x) = 6\frac{(2x)^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}x^2.$$

Thể tích vật thể cần tìm là $V = \displaystyle\int\limits_1^4 S(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 6\sqrt{3}x^2\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{3}x^3\Bigg|_1^4 = 126\sqrt{3}.$

Chọn phương án B

Câu 37 (2D3Y3-4). Một vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$, $x = 1$ và thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ là một hình tròn có diện tích bằng 3π. Thể tích của vật thể là

(A) $3\pi^2$. (B) 6π. (C) 6. (D) 2π.

Lời giải.

Có $V = \displaystyle\int\limits_{-1}^1 S(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^1 3\pi\,\mathrm{d}x = 6\pi.$

Chọn phương án B

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 2$ có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\ (0 \leq x \leq 2)$ là một nửa đường tròn đường kính là $\sqrt{5}x^2$. Tính thể tích V của vật thể đã cho.

(A) $V = 2\pi$. (B) $V = 5\pi$. (C) $V = 4\pi$. (D) $V = 3\pi$.

Lời giải.

Do thiết diện là nửa đường tròn với đường kính $\sqrt{5}x^2$ nên diện tích của thiết diện là

$$S(x) = \frac{\pi\left(\dfrac{\sqrt{5}x^2}{2}\right)^2}{2} = \frac{5\pi x^4}{8}.$$

Từ đó suy ra thể tích của vật thể là

$$V = \int\limits_0^2 S(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \frac{5\pi x^4}{8}\,\mathrm{d}x = 4\pi.$$

Chọn phương án C

Câu 39. Cho phần vật thể $(\Im)$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$. Cắt phần vật thể $(\Im)$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\,(0 \leqslant x \leqslant 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể $(\Im)$.

Ⓐ $V = \dfrac{4}{3}$. Ⓑ $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $V = 4\sqrt{3}$. Ⓓ $V = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Diện tích thiết diện: $S_\Delta = \dfrac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

$$V_\Im = \int\limits_0^2 \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4}\int\limits_0^2 x^2(2-x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn phương án Ⓑ

Câu 40. Cho phần vật thể $(\Im)$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$. Cắt phần vật thể $(\Im)$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể $(\Im)$.

Ⓐ $V = \dfrac{4}{3}$. Ⓑ $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $V = 4\sqrt{3}$. Ⓓ $V = \sqrt{3}$.

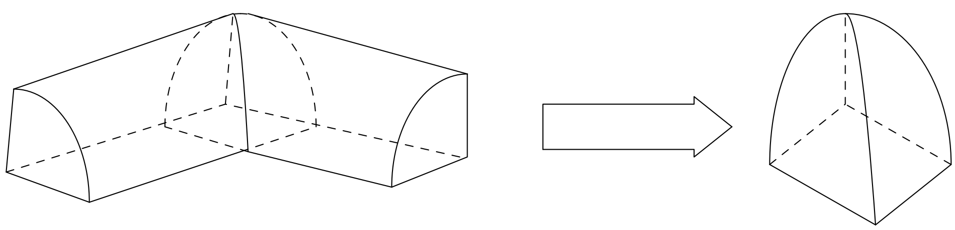
Lời giải.

Diện tích thiết diện: $S_\triangle = \dfrac{x^2\,(2-x)\,\sqrt{3}}{4}$.

$$V_\Im = \int\limits_0^2 \frac{x^2\,(2-x)\,\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4}\int\limits_0^2 x^2\,(2-x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

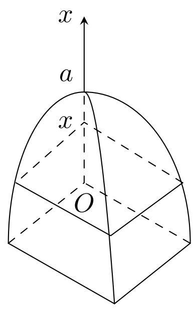
Chọn phương án Ⓑ

Câu 41. Gọi (H) là phần giao của hai khối $\dfrac{1}{4}$ hình trụ đều có bán kính $R = a$, biết hai trục hình trụ vuông góc với nhau (*hình vẽ dưới*). Tính thể tích V của khối (H).



Ⓐ $V_{(H)} = \dfrac{2a^3}{3}$. Ⓑ $V_{(H)} = \dfrac{3a^3}{4}$. Ⓒ $V_{(H)} = \dfrac{a^3}{2}$. Ⓓ $V_{(H)} = \dfrac{\pi a^3}{4}$.

Lời giải.



Dựng trục tọa độ Ox như hình vẽ. Qua điểm có tọa độ x, với $0 \le x \le a$, kẻ mặt phẳng song song với mặt đáy của khối (H), ta được thiết diện là hình vuông có cạnh là $\sqrt{a^2 - x^2}$.
Diện tích của thiết diện là $S(x) = a^2 - x^2$.
Thể tích V của khối (H) là

$$V = \int\limits_0^a (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{2a^3}{3}.$$

Chọn phương án Ⓐ

Câu 42. Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 4$, biết rằng khi cắt bởi mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 < x < 4)$ thì được thiết diện là nửa hình tròn có bán kính $R = x\sqrt{4-x}$.

(A) $V = \dfrac{64}{3}$. (B) $V = \dfrac{32}{3}$. (C) $V = \dfrac{64\pi}{3}$. (D) $V = \dfrac{32\pi}{3}$.

Lời giải.

Diện tích thiết diện là

$$S(x) = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi x^2(4-x).$$

Vậy thể tích cần tìm là

$$V = \int_0^4 S(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^4 \pi x^2(4-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi\int_0^4 \left(4x^2 - x^3\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32\pi}{3}.$$

Chọn phương án (D)

Câu 43. Tính thể tích vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$, biết rằng thiết diện của vật thể đó cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x thỏa mãn $-1 \le x \le 1$ là một tam giác vuông cân với cạnh huyền bằng $\sqrt{1-x^4}$.

(A) 4. (B) $\dfrac{2}{5}$. (C) $\dfrac{1}{4}$. (D) $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Thiết diện là tam giác vuông cân có cạnh huyền $\sqrt{1-x^4}$ nên có cạnh góc vuông là $\dfrac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{2}}$.

Diện tích thiết diện là $S(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{1-x^4}{4}$.

Khi đó, thể tích của vật thể là

$$V = \int_{-1}^{1} \frac{1-x^4}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}.$$

Chọn phương án (B)

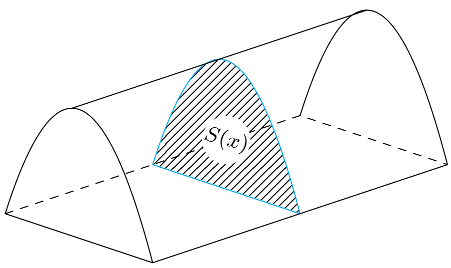
Câu 44. Để chuẩn bị cho hội trại do Đoàn trường tổ chức, lớp $12A$ dự định dựng một cái lều trại có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 6 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Tính thể tích phần không gian bên trong lều trại.

(A) 72. (B) 36. (C) 72π. (D) 36π.

Lời giải.

Hình dạng khung trại là parabol giả sử có phương trình $y = ax^2 + c$, vì đỉnh trại cao 3 m và bề ngang trại rộng 3 m nên khi đó parabol qua điểm $A(0;3)$ và $B(1.5;0)$ suy ra $y = -\dfrac{4}{3}x^2 + 3$.

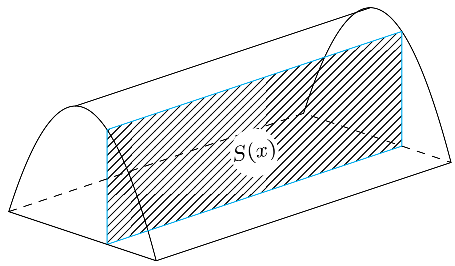
Cách 1: Thiết diện vuông góc với trục của trại là một hình phẳng giới hạn bởi đường parabol như hình vẽ giả sử có diện tích $S(x)$. Khi đó $S(x) = \displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left|-\frac{4}{3}x^2 + 3\right|\,\mathrm{d}x = 6$.



Do trại dài 6 m nên thể tích phần không gian trong trại là

$$V = \int_0^6 S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^6 6\,\mathrm{d}x = 36\ \mathrm{m}^3.$$

Cách 2: Thiết diện dọc theo trại và vuông góc với mặt đất là hình chữ nhật có diện tích $S(x) = 6|f(x)|$ với $-\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2}$. Vậy thể tích không gian trong trại là



$$V = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} S(x)\,\mathrm{d}x = 6\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left|-\frac{4}{3}x^2+3\right| \mathrm{d}x = 36 \text{ m}^3.$$

Chọn phương án B

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vật thể (T) nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$, $x=1$. Tính thể tích V của (T) biết rằng khi cắt (T) bởi mặt phẳng vuông góc trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x, (0 \le x \le 1)$ ta được thiết diện là một tam giác đều có cạnh bằng $\sqrt{1+x}$.

A $V = \frac{3}{2}$. B $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$. C $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. D $V = \frac{3}{2}\pi$.

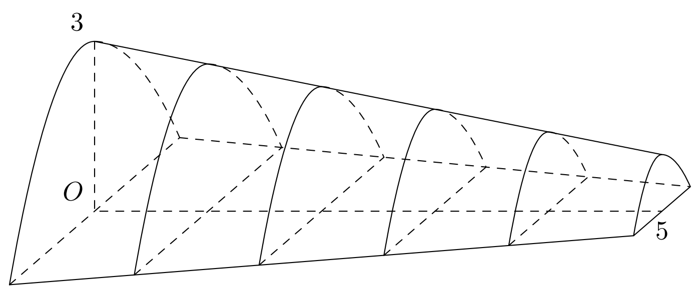
Lời giải.

Thiết diện là tam giác đều có diện tích $S(x) = \frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(x+1)$, với $0 \le x \le 1$.

Vậy $V = \int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4}(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn phương án C

Câu 46. Cho một mô hình $3-D$ mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài 5 (cm); khi cắt mô hình này bởi các mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao của parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x$ (cm), với x (cm) là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

A 29. B 27. C 31. D 33.

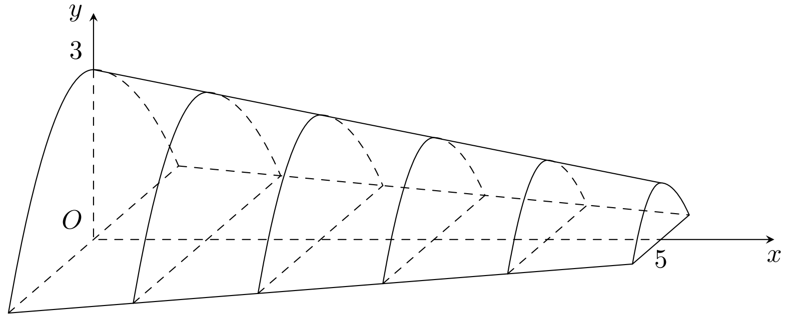
Lời giải.

Thiết diện là parabol có chiều cao $h = 3 - \frac{2}{5}x$ cm.

Vậy độ dài cạnh đáy là $a = 2h = 2\left(3 - \frac{2}{5}x\right)$ cm.

Khi đó, diện tích thiết diện là $S(x) = \frac{2}{3}ah = \frac{4}{3}\left(3-\frac{2}{5}x\right)^2$.

Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Ta có, thể tích không gian bên trong đường hầm mô hình là

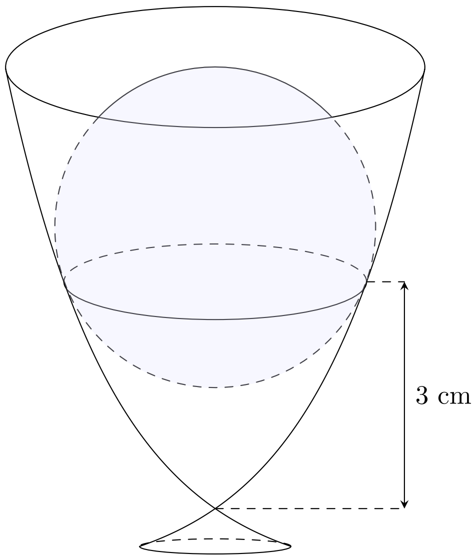
$$V = \int\limits_0^5 S(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^5 \frac{4}{3}\left(3 - \frac{2}{5}x\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{260}{9} \approx 29\ \mathrm{cm}^3.$$

Chọn phương án A

Câu 47.

Một chiếc ly bằng thủy tinh đang chứa nước bên trong được tạo thành khi quay một phần đồ thị hàm số $y = 2^x$ xung quanh trục Oy. Người ta thả vào chiếc ly một viên bi hình cầu có bán kính R thì mực nước dâng lên phủ kín viên bi đồng thời chạm tới miệng ly. Biết điểm tiếp xúc của viên bi và chiếc ly cách đáy của chiếc ly 3 cm (như hình vẽ). Thể tích nước có trong ly gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A 30 cm^2. B 40 cm^2.
C 50 cm^2. D 60 cm^2.



Lời giải.

Xét mặt phẳng (α) đi qua trục của chiếc ly. Gọi $(\mathscr{C})$ là đường tròn lớn của quả cầu. Ta thấy đường tròn $(\mathscr{C})$ và đồ thị $(C)\colon y = 2^x$ tiếp xúc nhau A.

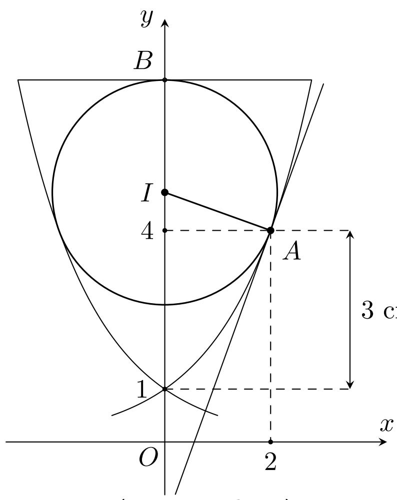
Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, ta được $A(2; 4)$.

Tiếp tuyến với (C) tại A là

$$(d)\colon y = (4\ln 2) \cdot x - 8\ln 2 + 4.$$

Đường thẳng vuông góc với (d) tại A là

$$(\Delta)\colon y = -\frac{1}{4\ln 2} \cdot x + \frac{1}{2\ln 2} + 4.$$



Tâm I của đường tròn $(\mathscr{C})$ là giao điểm của (Δ) và Oy, ta được $I\left(0; \dfrac{1 + 8\ln 2}{2\ln 2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = \left(2; -\dfrac{1}{2\ln 2}\right)$, suy ra thể tích khối cầu $V_{\text{khối cầu}} = \dfrac{4\pi}{3} \cdot IA^3 \approx 40{,}26\ \mathrm{cm}^3$.

Dung tích chiếc ly là $V = \pi \displaystyle\int\limits_1^{y_B} \left[\log_2 y\right]^2 \mathrm{d}y \approx 69{,}92\ \mathrm{cm}^3$.

Thể tích nước chứa trong chiếc ly là $V_{\text{nước}} = V - V_{\text{khối cầu}} \approx 29{,}66\ \mathrm{cm}^3$.

Chọn phương án (A)

Câu 48. Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0; x=2$. Cắt vật thể (T) bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x\,(0\leqslant x\leqslant 2)$ ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)\mathrm{e}^x$. Thể tích vật thể (T) bằng

(A) $\dfrac{(13\mathrm{e}^4-1)\pi}{4}$. (B) $\dfrac{13\mathrm{e}^4-1}{4}$. (C) $2\mathrm{e}^2$. (D) $2\pi\mathrm{e}^2$.

Lời giải.

Thể tích vật thể (T) được áp dụng bởi công thức $V=\displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 (x+1)^2\cdot\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u=x^2+2x+1\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u=(2x+2)\,\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}.\end{cases}$

Khi đó $V=\dfrac{1}{2}(x^2+2x+1)\cdot\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^2-\displaystyle\int_0^2(x+1)\cdot\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(x^2+2x+1)\cdot\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^2-\dfrac{1}{2}(x+1)\cdot$ $\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^2+\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^2$

Do đó $V=\dfrac{13\mathrm{e}^4-1}{4}$.

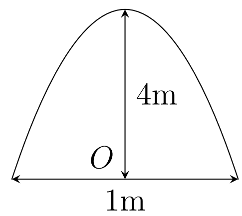
Chọn phương án (B)

Câu 49. Du khách ghé thăm Bình Định không thể bỏ qua địa danh Tháp Bánh Ít nổi tiếng. Tháp có hai cửa, mỗi cửa có hình dáng là một cung Parabol nằm cùng một trục (hướng Đông - Tây). Hai cửa cách nhau 8 mét, có chiều cao 4 mét, lối đi rộng 1 mét thông hai cửa với nhau. Hãy tính thể tích phần không gian lối đi giới hạn giữa hai cửa.

(A) $V=\dfrac{8}{3}$. (B) $V=\dfrac{128\pi}{15}$. (C) $V=\dfrac{64}{3}$. (D) $V=\dfrac{8\pi}{3}$.

Lời giải.

Xét một cửa của Tháp Bánh Ít, đặt hệ trục Oxy như hình vẽ. Dễ dàng tìm được phương trình của parabol là $y=-16x^2+4$.



Diện tích của parabol là $S=\displaystyle\int_{-0,5}^{0,5}\left(-16x^2+4\right)\,\mathrm{d}x=\dfrac{8}{3}$.

Thể tích phần không gian lối đi giới hạn giữa hai cửa là $8\cdot\dfrac{8}{3}=\dfrac{64}{3}$.

Chọn phương án (C)

Câu 50. Cắt một vật thể (V) bởi hai mặt phẳng song song (P), (Q) lần lượt vuông góc với trục Ox tại $x=-\dfrac{\pi}{2}$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ cắt (V) theo thiết diện có diện tích là $S(x)=(1+\sin^2 x)\cos x$. Tính thể tích của phần vật thể (V) giới hạn bởi hai mặt phẳng (P), (Q).

(A) 3,14. (B) $\dfrac{4}{3}$. (C) $\dfrac{13\pi}{16}$. (D) $\dfrac{8\pi}{3}$.

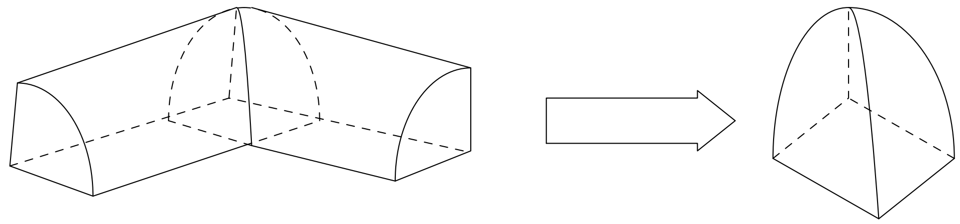
Lời giải.

Thể tích của phần vật thể (V) giới hạn bởi hai mặt phẳng (P), (Q) là

$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} S(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

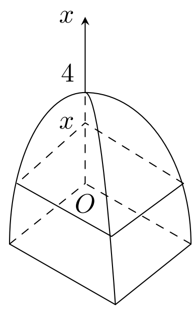
Chọn phương án (B)

Câu 51. Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ đều có bán kính $R = 4$, biết hai trục hình trụ vuông góc với nhau (*hình vẽ dưới*). Tính thể tích V của khối (H).



(A) $V = \frac{128}{3}$. **(B)** $V = 48$. **(C)** $V = 32$. **(D)** $V = 16\pi$.

Lời giải.



Dựng trục tọa độ Ox như hình vẽ. Qua điểm có tọa độ x, với $0 \le x \le 4$, kẻ mặt phẳng song song với mặt đáy của khối (H), ta được thiết diện là hình vuông có cạnh là $a = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{16 - x^2}$.
Diện tích của thiết diện là $S = a^2 = (16 - x^2)$.
Thể tích V của khối (H) là

$$V = \int_0^4 (16 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(16x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{128}{3}.$$

Chọn phương án (A)

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vật thể (H) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$. Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của (H) bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x, với $a \le x \le b$. Giả sử hàm số $y = S(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, thể tích V của vật thể (H) được cho bởi công thức

(A) $V = \int_a^b [S(x)]^2\,\mathrm{d}x$. **(B)** $V = \pi \int_a^b [S(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

(C) $V = \pi \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$. **(D)** $V = \pi \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích của vật thể (H) tính theo công thức $V = \pi \int_a^b [S(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn phương án (B)

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 2$ có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le 2)$ là một nửa đường tròn đường kính là $\sqrt{5}x^2$. Tính thể tích V của vật thể đã cho.

(A) $V = 2\pi$. **(B)** $V = 5\pi$. **(C)** $V = 4\pi$. **(D)** $V = 3\pi$.

Lời giải.

Do thiết diện là nửa đường tròn với đường kính $\sqrt{5}x^2$ nên diện tích của thiết diện là

$$S(x) = \frac{\pi\left(\frac{\sqrt{5}x^2}{2}\right)^2}{2} = \frac{5\pi x^4}{8}.$$

Từ đó suy ra thể tích của vật thể là

$$V = \int\limits_0^2 S(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \frac{5\pi x^4}{8}\,\mathrm{d}x = 4\pi.$$

Chọn phương án C

Câu 54. Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0,\ x = 2$. Cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $(0 \le x \le 2)$ ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)\mathrm{e}^x$. Thể tích vật thể (T) bằng

A $\dfrac{(13\mathrm{e}^4 - 1)\,\pi}{4}$. **B** $\dfrac{13\mathrm{e}^4 - 1}{4}$. **C** $2\mathrm{e}^2$. **D** $2\pi\mathrm{e}^2$.

Lời giải.

Thể tích vật thể (T) được tính theo công thức $V = \displaystyle\int_0^2 (x+1)^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{13\mathrm{e}^4 - 1}{4}$.

Chọn phương án B